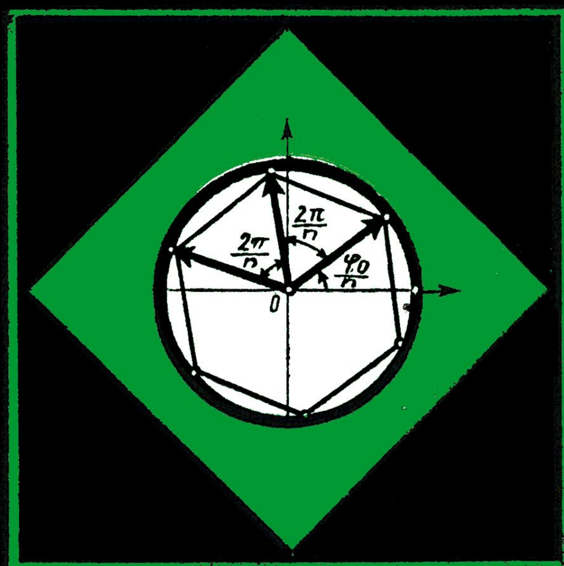
V. Boltianskis
J. Sidorovas
M. Šabuninas

Elementariosios matematikos paskaitos ir uždaviniai



V. Boltianskis
J. Sidorovas
M. Šabuninas

Elementariosios matematikos paskaitos ir uždaviniai

MOKYMO PRIEMONĖ MOKINIAMS



KAUNAS
ŠVIESA
1982

~~51(075)~~
Bo-207

В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин
ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ
Издание второе
Москва, «Наука», 1974.

Vertė *Vidmantas Pekarskas*

В $\frac{4306020400-473}{М\ 853(10)-82}$ 131—79

TURINYS

PRATARMĖ

Ši knyga skirta vidurinės mokyklos aukštesniųjų klasių mokiniams, abiturientams, stojantiems į aukštąsias mokyklas, mokytojams, pedagoginių institutų bei universitetų studentams. Joje išdėstyta kai kurių elementariosios matematikos skyrių teorija, pateikta uždavinių. Teorinė medžiaga neaprėpia viso vidurinės mokyklos matematikos kurso. Čia nagrinėjami tie skyriai, kurie nepakankamai nušviesti mokomojoje literatūroje.

Kai kurių knygos skyrių teorija, žiūrint formaliai, neįeina į vidurinės mokyklos matematikos programą. Pavyzdžiui, I skyriuje nagrinėjamos paprasčiausios matematinės logikos sąvokos. Tačiau šie klausimai iš tiesų nagrinėjami ir mokykloje (galbūt ne taip plačiai), ir, laikant stojamuosius egzaminus į aukštąsias mokyklas, juos reikia gerai mokėti. Pavyzdžiui, mokiniai turi sugebėti skirti teoremos sąlygą ir išvadą, suprasti įrodymo prieštaros metodu esmę, mokėti teisingai formuluoti atvirkštines ir priešingąsias teoremas, daryti teisingas logines išvadas. Todėl I skyrius, kuriame išsamiai nagrinėjami šie klausimai, iš esmės atitinka mokyklos programą. Knygoje teorija išdėstyta detaliai, iliustruota daugeliu pavyzdžių, todėl ją gali suprasti kiekvienas patenkinamai besimokantis aukštesniųjų klasių mokinys.

Knygoje yra daugiau negu tūkstantis uždavinių, kurių didesnė dalis buvo duota per stojamuosius egzaminus į MFTI. Kitus uždavinius sudarė knygos autoriai. Knygos pabaigoje pateikti uždavinių atsakymai, taip pat nurodymai, kaip spręsti sunkesnius uždavinius, arba net jų sprendimai.

Autoriai

I SKYRIUS

BŪTINOS IR PAKANKAMOS SĄLYGOS

§ 1. Teiginiai

Matematika nagrinėja įvairius *teiginius*. Štai keli teiginių pavyzdžiai:

$A \equiv$ {skaičius 100 dalijasi iš 4},
$B \equiv$ {skaičius 17 dalijasi iš 8},
$C \equiv$ {skaičius trys mažesnis už penkis},
$D \equiv$ {skaičius 2 yra vienintelė lygties $x^2-4=0$ šaknis}.

Iš karto aišku, kad kai kurie šių teiginių teisingi; tokius teiginius ir vadiname *teisingais*. Kiti teiginiai aiškiai neteisingi; tokius teiginius vadiname *klaidingais*. Lentelėje teisingas teiginys žymimas raide T, o klaidingas – raide K:

Teiginys	A	B	C	D
Jo teisingumas	T	K	T	K

Čia pateiktus teiginius žymėjome didžiosiomis raidėmis. Taip juos žymėsime ir toliau.

Kiekvienas teiginys yra sakinys ir gali būti išreikštas žodžiais. Tačiau matematikai teiginius žymi ne vien tik raidėmis, bet ir specialiais matematiniais ženklais. Kiekvienas ženklas pakeičia žodį (arba kelis žodžius). Yra ženklų, kuriais trumpiname užrašus. Pavyzdžiui, C teiginį, naudojantis ženklais, galima taip parašyti: $3<5$.

Jau minėjome, kad bet koks teiginys yra sakinys. Tačiau ne kiekvienas sakinys matematiniu požiūriu yra teiginys. Štai keletas sakinių, kurie nėra teiginiai:

1) skaičius 0, 00000001 yra labai mažas,
2) ar egzistuoja skaičius, kurio kvadratas lygus 2?
3) $x>2$,
4) $x+5=12$.

Pirmasis sakinys – ne teiginys, nes jo prasmė netiksli ir negalima pasakyti, ar jis teisingas, ar klaidingas. Vienas pasakys, kad šis skaičius iš tiesų labai mažas, kitas su tuo nesutiks. Antrasis sakinys apskritai nieko neteigia, o yra klausimas. Beprasmiška kalbėti, ar jis teisingas, ar klaidingas.

Trečiajame ir ketvirtajame sakinyje yra raidė x. Su vienomis x reikšmėmis teiginiai esti teisingi, su kitomis – klaidingi. Vadinasi,kol neaišku, kam lygus x, negalima pasakyti, ar šie sakiniai teisingi, ar klaidingi.

Įsidėmėtina, kad, išgirdę teiginį, ne visada galime tuoj pat atsakyti, ar jis teisingas, ar klaidingas. Čia kalbama apie tai, ar *iš principo* įmanoma atsakyti į tokį klausimą, nors, norint tai padaryti, prireiks atlikti tiek veiksmų, kad žmogus to neįstengs per visą gyvenimą. Štai du teiginiai, kurių teisingumu iš principo galima būtų įsitikinti, bet reikėtų labai daug skaičiuoti.

$E \equiv \{$skaičius $(126^{3728}+15^{15\,876})^{2387}+(111^{35\,933}-189^{1183})^{4914}+4$ yra pirminis$\}$,

$G \equiv \{$begalinės dešimtainės trupmenos 1, 41421..., išreiškiančios skaičių $\sqrt{2}$, milijoninis skaitmuo po kablelio yra lygus 7$\}$.

Sakiniai E ir G irgi teiginiai, nes iš principo galima ištirti, ar jie teisingi, ar klaidingi.

Kiekvienas teiginys yra arba teisingas, arba klaidingas (negalimo trečiojo dėsnis).

Nė vienas teiginys negali būti tuo pačiu metu teisingas ir klaidingas (prieštaravimo dėsnis).

Sakinys, kuriam netinka vienareikšmis atsakymas, teisingas jis ar klaidingas, nėra teiginys.

§ 2. Neigimas

Iš kiekvieno teiginio, jį *neigiant*, t.y. tvirtinant, kad, teiginys A negalioja, galima gauti naują teiginį. *Teiginio A neiginys* žymimas simboliu $\neg A$ (arba simboliu $\bar{A}$). Taigi užrašas $\neg A$ skaitomas „teiginio A neiginys“ arba, trumpiau, „ne A“.

Pasakę „teiginys A neteisingas“ arba „A negalioja“, gausime teiginio neiginį. Tačiau kai kuriais atvejais neiginį galima gauti dar paprasčiau. Jeigu, pavyzdžiui, teiginys A yra paprastas sakinys su vienu tariniu, tai, norint gauti jo neiginį $\neg A$, reikia prie tarinio pridėti dalelytę „ne“. Pateiksime teiginių ir jų neiginių pavyzdžių:

1) $A \equiv \{$skaičius 23 dalijasi iš 7$\}$,
$\neg A \equiv \{$skaičius 23 nesidalija iš 7$\}$;

2) $B \equiv \{3>5\}$ (t.y. skaičius trys didesnis už penkis),
$\neg B \equiv$ $\{$skaičius trys ne didesnis už penkis$\}$ (t.y. $3 \leqslant 5$);

3) $C \equiv \{5+3=8\}$,
$\neg C \equiv \{5+3 \neq 8\}$;

4) $D \equiv \{30$ – pirminis skaičius$\}$,
$\neg D \equiv \{30$ – ne pirminis skaičius$\}$.

Dabar išnagrinėsime, ar teisingi teiginiai A ir $\neg A$. Kai teiginys A yra *teisingas* (tai, ką tvirtina šis teiginys, iš tikrųjų galioja), tai teiginys $\neg A$, tvirtinantis priešingai, kad A negalioja, yra *klaidingas*. Taigi, kai A yra

teisingas, tai $\neg A$ – klaidingas. Atvirkščiai, kai A – klaidingas, tai teiginys $\neg A$, tvirtinantis, kad A negalioja, yra *teisingas*. Vadinasi, kai A yra klaidingas, tai $\neg A$ – teisingas.

Koks bebūtų teiginys A, iš dviejų teiginių A ir $\neg A$ vienas teiginys yra teisingas, o antras – klaidingas.

Pavyzdžiui, ką tik išnagrinėti teiginiai $\neg A$, $\neg B$, C, $\neg D$ yra teisingi, o teiginiai A, B, $\neg C$, D – klaidingi.

Kaip jau minėjome, neiginys paprasčiausiai sudaromas, prie tarinio pridedant dalelytę „ne". Pavyzdžiui:

$$A \equiv \{11 \text{ dalijasi iš } 3\},$$

$$\neg A = \{11 \text{ nesidalija iš } 3\}.$$

Tačiau šis paprastas būdas netinka, kai pats teiginys yra neigiantis, t.y. kai tarinys jau turi dalelytę „ne". Išnagrinėsime, pavyzdžiui, teiginį

$$B \equiv \{18 \text{ nesidalija iš } 5\}.$$

Dabar neiginiui $\neg B$ sudaryti negalėsime dar kartą paneigti tarinio (t.y. negalėsime sakyti: „18 ne nesidalija iš 5"). Todėl neiginį reikės formuluoti kitaip:

$$\neg B \equiv \{\text{teiginys „18 nesidalija iš 5" yra neteisingas}\}.$$

Bet ką reiškia šis tvirtinimas? Jis reiškia, kad 18 *dalijasi* iš 5. Todėl neiginį $\neg B$ galima paprasčiau formuluoti taip:

$$\neg B \equiv \{18 \text{ dalijasi iš } 5\}.$$

Vadinasi, *kai tam tikro teiginio B tarinys jau turi neigiamąją dalelytę „ne", jo neiginį $\neg B$ galima gauti, išmetus dalelytę „ne".*

Tarkime, kad A – bet koks teiginys. Jo neiginys $\neg A$ irgi yra teiginys. Vadinasi, galima nagrinėti ir pastarojo neiginį, t.y. teiginį $\neg\neg A$, kuris vadinamas teiginio A *dvigubu neiginiu*. Dvigubą neiginį galima apibrėžti taip: *tvirtinimas, kad teiginys A negalioja, yra klaidingas*. Tačiau pagal prasmę jis niekuo nesiskiria nuo tvirtinimo, kad teiginys A yra teisingas.

Tiksliau tariant, *dvigubas neiginys $\neg\neg A$ teisingas tada ir tik tada, kai teiginys A yra teisingas* (taigi, kai A teisingas, tai ir $\neg\neg A$ teisingas; kai A klaidingas, tai ir $\neg\neg A$ klaidingas).

Ši taisyklė vadinama *neigimo neigimo dėsniu*.

§ 3. Teiginio funkcijos

Visų natūrinių skaičių aibę žymėsime raide N. Raide x susitarsime žymėti *bet kurį* natūrinį skaičių, t.y. bet kokį aibės N elementą. Dabar išnagrinėsime tokius sakinius:

$$A(x) \equiv \{\text{skaičius } x \text{ dalijasi iš } 5\},$$
$$B(x) \equiv \{x > 10\},$$
$$C(x) \equiv \{x - \text{pirminis skaičius}\},$$
$$D(x) \equiv \{(x-5)^2 < 10\}.$$

Sakiniai $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ – ne teiginiai. Iš tikrųjų, ar teisingas sakinys, pavyzdžiui, $A(x)$, negalime pasakyti, kol nežinome x reikšmės. Tačiau, įrašę į $A(x)$ įvairias natūrines x reikšmes, gausime teiginius apie natūrinius skaičius – kartais teisingus, o kartais klaidingus. Įrašę į $A(x)$ įvairias natūrines x reikšmes, gausime, pavyzdžiui, tokius teiginius:

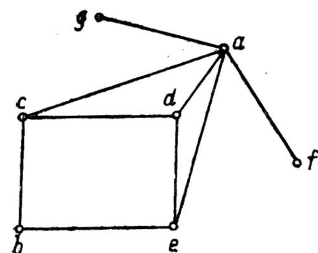
$A(5) \equiv$ {skaičius 5 dalijasi iš 5} – teisingas teiginys,

$A(13) \equiv$ {skaičius 13 dalijasi iš 5} – klaidingas teiginys

ir t.t. Galima sudaryti šių teiginių *teisingumo lentelę*:

$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$	$A(7)$	$A(8)$	$A(9)$	$A(10)$	...
K	K	K	K	T	K	K	K	K	T	...

Sakinius $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, kuriuose yra kintamasis x, galima vadinti *teiginio funkcijomis* (matematikoje jie dar vadinami predikatais). Kiekvienas toks sakinys reiškia tam tikrą natūrinio skaičiaus x *savybę*. Pavyzdžiui, sakinys $C(x)$ reiškia, kad natūrinis skaičius gali būti pirminis, $A(x)$ gali dalytis iš 5 ir t.t. Jeigu vietoj x įrašytume bet kokį natūrinį skaičių, gautume paprastą teiginį.



1 pav.

Teiginio funkciją galima apibrėžti bet kokioje aibėje, o ne tik natūrinių skaičių aibėje. Tai bus teiginys apie *tam tikrą* nagrinėjamos aibės elementą x. Su vienais elementais šie teiginiai bus teisingi, su kitais – klaidingi.

1 pavyzdys. 1 paveiksle pavaizduoti taškai, sujungti keliomis atkarpomis. Aibėje M, kurią sudaro taškai a, b, c, d, e, f, g, yra apibrėžta teiginio funkcija: $S(x) \equiv$ {taške x, priklausančiame duotajai figūrai, susikerta tik trys atkarpos}.

Štai šios teiginio funkcijos teisingumo lentelė:

$S(a)$	$S(b)$	$S(c)$	$S(d)$	$S(e)$	$S(f)$	$S(g)$
K	K	T	T	T	K	K

Dažnai tenka nagrinėti teiginio funkcijas ne su vienu, o su dviem ar daugiau kintamųjų. Išnagrinėkime, pavyzdžiui, sakinius, kuriuose x ir y gali būti bet kokie natūriniai skaičiai:

$A(x, y) \equiv \{x < y\}$,

$B(x, y) \equiv \{x + y = 10\}$,

$C(x, y) \equiv$ {x dalijasi iš y},

$D(x, y) \equiv$ {$x + y$ – pirminis skaičius}.

Kol nežinome, kokios x ir y reikšmės, negalime pasakyti, ar šie tvirtinimai teisingi, ar klaidingi. Tačiau, kai x ir y reikšmės yra tiksliai nurodytos, kiekvienas suformuluotas tvirtinimas tampa *teiginiu*, kuris vienų (x, y) porų atveju esti teisingas, o kitų – klaidingas. Štai teiginių, kurių x ir y reikšmės yra konkrečios, pavyzdžiai:

$A(1;3) \equiv \{1<3\}$ – teisingas teiginys,
$A(2;2) \equiv \{2<2\}$ – klaidingas teiginys,
$A(5;4) \equiv \{5<4\}$ – klaidingas teiginys,
$B(1;3) \equiv \{1+3=10\}$ – klaidingas teiginys,
$B(8;2) \equiv \{8+2=10\}$ – teisingas teiginys.

§ 4. Bendrumo ir egzistavimo simboliai

Neigimas yra operacija, taikoma teiginiams (arba teiginių funkcijoms). Šia operacija galima iš bet kurios teiginio funkcijos, pavyzdžiui $A(x)$, gauti naują teiginio funkciją $\neg A(x)$ – jos neiginį.

Mokiniams labai sunku teisingai formuluoti neiginį $\neg A$ tada, kai teiginyje A esti žodžių „visi“, „kiekvienas“, „bent vienas“, „yra“, egzistuoja“ ir kt.

Tarkime, kad teiginys A yra toks:

$A \equiv$ {kiekvienas pirminis skaičius yra nelyginis}.

Į klausimą, koks bus šio teiginio neiginys, daugelis atsakytų, kad neiginys bus teiginys

$B \equiv$ {kiekvienas pirminis skaičius yra lyginis}.

Nesunku įsitikinti, kad toks atsakymas klaidingas, nes nė vienas šių teiginių nėra teisingas. Teisingas bus toks atsakymas:

$\neg A \equiv$ {ne kiekvienas pirminis skaičius yra nelyginis}, kitaip tariant,
$\neg A \equiv$ {yra (egzistuoja) pirminis skaičius, kuris esti lyginis},

arba

$\neg A \equiv$ {bent vienas pirminis skaičius yra lyginis}.

Šis teiginys teisingas: egzistuoja (tik vienas!) lyginis pirminis skaičius, būtent 2.

Palyginsime du ką tik išnagrinėtus teiginius:

$A \equiv$ {*kiekvienas* pirminis skaičius yra nelyginis},
$\neg A \equiv$ {*bent vienas* pirminis skaičius yra lyginis}.

Atmetę pirmuosius formuluočių žodžius, teiginį A galėtume parašyti taip: {... pirminis skaičius yra nelyginis}, o jo neiginį $\neg A$ – taip: {... pirminis skaičius yra lyginis}, t.y. antrąją teiginio dalį tiesiog pakeičiame jo neiginiu. Tačiau labai svarbu įsidėmėti, kad tada pirmasis teiginio A žodis ,,kiekvienas“ teiginyje $\neg A$ keičiamas žodžiais ,,bent vienas“ (arba žo-

džiu „yra“, arba „egzistuoja“). Tai bendras požymis, jo suvokimas padės išvengti daugelio nemalonių klaidų. Taigi, *norint gauti neiginį* $\urcorner A$, *kai teiginys A prasideda žodžiais „visi“, „kiekvienas“, „bet koks“ ir kt., reikia prieš šiuos žodžius, nieko nekeičiant, parašyti dalelytę „ne“ arba dalelytę „ne“ parašyti po šių žodžių, būtinai pakeičiant juos žodžiais „bent vienas“, „yra“, „egzistuoja“ ir kt.* Žinoma, teisingas ir atvirkščias formulavimas: kai teiginio pradžioje yra žodžiai „bent vienas“, „yra“, „egzistuoja“, tai po šių žodžių parašius dalelytę „ne“, jie keičiami žodžiais „visi“, „kiekvienas“, „bet koks“. Dar kartą akcentuojame, kad taip daroma tada, kai žodis „ne“ rašomas po šių žodžių. Kai dalelytė „ne“ rašoma (arba nubraukiama) prieš minėtus žodžius, šie žodžiai nekeičiami.

2 pavyzdys

$A \equiv$ {kiekvienas šių skaičių a, b, c dalijasi iš 7},

$\urcorner A \equiv$ {ne kiekvienas šių skaičių a, b, c dalijasi iš 7}, arba, kitaip tariant,

$\urcorner A \equiv$ {bent vienas šių skaičių a, b, c nesidalija iš 7}.

3 pavyzdys

$A \equiv$ {nė vieno rombo negalima įbrėžti į apskritimą}.

Šį teiginį galima pasakyti kitaip:

$A \equiv$ {neegzistuoja rombas, kurį galima įbrėžti į apskritimą}.

Kadangi sakinio pradžioje yra ,,ne“, tai neiginiui sudaryti užtenka išmesti dalelytę „ne“.

$\urcorner A \equiv$ {egzistuoja rombas, kurį galima įbrėžti į apskritimą}.

4 pavyzdys

$A \equiv$ {kiekvieno trikampio trys pusiaukraštinės susikerta viename taške},

$\urcorner A \equiv$ {ne kiekvieno trikampio trys pusiaukraštinės susikerta viename taške}, arba, kitaip tariant:

$\urcorner A \equiv$ {yra trikampis, kurio trys pusiaukraštinės nesusikerta viename taške}.

Kartais vartojami specialūs simboliai $\forall$, $\exists$. Pirmasis simbolis $\forall$ vadinamas *bendrumo kvantoriumi.* Sakiniuose jis keičiamas žodžiais *bet koks, kiekvienas, visi.* Antrasis ženklas $\exists$ vadinamas *egzistavimo kvantoriumi.* Sakiniuose jis keičiamas žodžiais *egzistuoja, yra, kuris nors, bent vienas.* Pavyzdžiui, kai $P(x)$ – tam tikra teiginio funkcija, apibrėžta aibėje M, tai užrašas

$$(\forall x)\, P(x)$$

reiškia: bet koks aibės M elementas x turi savybę $P(x)$. Toks užrašas jau yra *teiginys* (o ne teiginio funkcija). Šis teiginys yra teisingas, kai kiekvienas aibės m elementas a turi savybę $P(a)$; priešingu atveju jis klaidingas.

Norint ištirti, ar teiginys $\forall(x)\ P(x)$ yra teisingas, reikia imti visus aibės M elementus $a, b, c, \ldots$ ir įsitikinti, kad visi teiginiai $P(a), P(b), P(c), \ldots$ yra teisingi (jeigu to padaryti negalima arba nenorima imti visų aibės M elementų, tai reikia įrodyti, jog su *bet kuriuo* aibės M elementu a teiginys $P(a)$ yra teisingas). Norint įsitikinti, kad teiginys $(\forall x)\ P(x)$ klaidingas, pakanka rasti tik *vieną* aibės M elementą a, su kuriuo teiginys $P(a)$ būtų klaidingas. Kitaip tariant, įsitikinimui, kad tam tikras bendras teiginys (t.y. teiginio, kuriame yra bendrumo kvantorius $\forall$) klaidingas, pakanka rasti vieną priešingą pavyzdį.

5 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio funkciją
$C(x) \equiv \{\text{skaičius } 2^{(2^x)}+1 \text{ – pirminis}\}$,
apibrėžtą visų natūrinių skaičių aibėje N.
Kai $x=1, 2, 3, 4$, gauname tokius teiginius:

$$C(1) \equiv \{\text{skaičius } 2^{(2^1)}+1=5 \text{ – pirminis}\},$$
$$C(2) \equiv \{\text{skaičius } 2^{(2^2)}+1=17 \text{ – pirminis}\},$$
$$C(3) \equiv \{\text{skaičius } 2^{(2^3)}+1=257 \text{ – pirminis}\},$$
$$C(4) \equiv \{\text{skaičius } 2^{(2^4)}+1=65537 \text{ – pirminis}\}.$$

Visi šie teiginiai yra *teisingi*. Bet ar galima iš to daryti išvadą, kad teiginys $(\forall x)\ C(x)$ yra teisingas, t.y. kad skaičius $2^{(2^n)}+1$ yra pirminis, kai n – *bet kuris* natūrinis skaičius? Žinoma, ne, nes tokia išvada nepagrįsta. Juk buvo paimti ne visi natūriniai skaičiai, o tik keli. Antra vertus, patikrinti, ar su visais natūriniais skaičiais teiginys yra teisingas, neįmanoma, nes natūrinių skaičių aibė yra begalinė. Įdomu, kad garsus prancūzų matematikas Pjeras Ferma buvo įsitikinęs, jog teiginys $(\forall x)\ C(x)$ teisingas ir bandė tai įrodyti bendru atveju. Tačiau kitas įžymus matematikas Leonardas Oileris įrodė, kad teiginys $C\ (5)$ yra klaidingas (t.y. skaičius $2^{(2^5)}+$ $+1=2^{32}+1$ nėra pirminis: jis dalijasi iš 641). Taigi teiginys $(\forall x)\ C(x)$, priešingai Ferma įsitikinimui, pasirodė esąs klaidingas. Šis pavyzdys rodo, kad teiginio $(\forall x)\ P(x)$ teisingumo patikrinimas, imant atskiras x reikšmes, negali pakeisti bendro įrodymo. Atvirkščiai, vienas prieštaraujantis pavyzdys, kurį surado Oileris, įrodo, kad teiginys klaidingas.

6 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginį $(\forall x)\ D(x)$. Čia $D(x)$ – teiginio funkcija, apibrėžta visų natūrinių skaičių aibėje N:

$$D(x) \equiv \{\text{skaičius } x^3+5x \text{ dalijasi iš } 6\}.$$

Lengva patikrinti, kad teiginiai $D(1)$, $D(2)$, $D(3)$, $D(4)$, $D(5)$ yra teisingi. Tikrindami toliau, gautume tą patį rezultatą. Bet jau buvo aptarta, jog, imant atskiras x reikšmes, negalima įrodyti, kad teiginys $(\forall x)$ $D(x)$ teisingas. Išbandžius netgi ir milijoną x reikšmių, nebus jokios garantijos, kad teiginys $D(x)$ su milijonas pirmąja x reikšme bus klaidingas. Kad teiginys $(\forall x)\ D(x)$ teisingas, galima įrodyti, pavyzdžiui, tokiu būdu. Turime

$$x^3+5x=x^3-x+6x=x(x^2-1)+6x=(x-1)\,x\,(x+1)+6x.$$

Iš trijų gretimų skaičių $x-1$, x, $x+1$ vienas skaičius būtinai dalijasi iš 3 ir vienas arba du dalijasi iš 2. Vadinasi, jų sandauga dalijasi iš 6. Taigi

ir suma $(x-1)x(x+1)+6x=x^3+5x$ su kiekviena natūrine x reikšme dalijasi iš 6. Įrodėme, kad teiginys $(\forall x)\ D(x)$ yra teisingas.

Dabar aptarsime egzistavimo kvantorių $\exists$. Kai $P(x)$ – tam tikra teiginio funkcija, tai užrašas

$$(\exists x)\, P(x)$$

reiškia: *egzistuoja* aibės M *elementas* x, *turintis savybę* $P(x)$ (arba kitaip: yra bent vienas elementas x, turintis savybę $P(x)$).

Užrašas $(\exists x)\ P(x)$ jau nėra teiginio funkcija, tai – teiginys. Šis teiginys yra teisingas, kai savybę $P(a)$ turi bent vienas aibės M elementas a. Priešingu atveju, kai aibėje M nėra nė vieno elemento a, turinčio savybę $P(a)$, teiginys $(\exists x)\ P(x)$ yra klaidingas.

7 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio funkciją

$$C(x)\equiv\{x^3-14x^2+49x-1<0\},$$

apibrėžtą visų natūrinių skaičių aibėje N.

Kai $x=1, 2, 3, 4$, gauname tokius teiginius:

$$C(1)\equiv\{1^3-14\cdot 1^2+49\cdot 1-1<0,\ (\text{t.y. } 35<0)\},$$
$$C(2)\equiv\{2^3-14\cdot 2^2+49\cdot 2-1<0,\ (\text{t.y. } 49<0)\},$$
$$C(3)\equiv\{3^3-14\cdot 3^2+49\cdot 3-1<0,\ (\text{t.y. } 47<0)\},$$
$$C(4)\equiv\{4^3-14\cdot 4^2+49\cdot 4-1<0,\ (\text{t.y. } 35<0)\}.$$

Visi šie teiginiai yra klaidingi. Tačiau ar galima iš to daryti išvadą, kad teiginys $(\exists x)\, C(x)$ klaidingas, t.y. kad iš tikrųjų nėra tokio natūrinio skaičiaus n, su kuriuo teiginys $C(n)$ būtų teisingas? Taip tvirtinti neturime jokio pagrindo. Kiek skaičių beimtume, visada galima tikėtis, kad kažkur toliau rasime tokį n, su kuriuo teiginys $C(n)$ bus teisingas.

Tęsiame bandymus toliau:

$$C(5)\equiv\{5^3-14\cdot 5^2+49\cdot 5-1<0,\ (\text{t.y. } 19<0)\},$$
$$C(6)\equiv\{6^3-14\cdot 6^2+49\cdot 6-1<0,\ (\text{t.y. } 5<0)\},$$
$$C(7)\equiv\{7^3-14\cdot 7^2+49\cdot 7-1<0,\ (\text{t.y. } -1<0)\}.$$

Matome, kad teiginiai $C(5)$ ir $C(6)$ yra klaidingi, o $C(7)$ – teisingas. Taigi radome tokį n $(n=7)$, su kuriuo teiginys $C(n)$ yra teisingas. Vadinasi, teiginys $(\exists x)\ C(x)$ yra teisingas.

Aišku, kad toks bandymų metodas toli gražu nėra geriausias teiginio $(\exists x)\, P(x)$ teisingumui patikrinti (čia $P(x)$ – tam tikra teiginio funkcija). Juk „tinkama“ n reikšmė (su kuria teiginys $P(n)$ yra teisingas) gali būti gana toli ir, bandant ją surasti, teks gerokai pavargti. Bet gali būti ir taip, kad teiginys $P(n)$ bus klaidingas su visomis n reikšmėmis. Tada bandymų metodas apskritai neduos jokių rezultatų. Todėl čia labiau tinka bendri samprotavimai. Nagrinėdami pavyzdį, galėjome samprotauti taip:

$$x^3-14x^2+49x-1=x(x^2-14x+49)-1=x(x-7)^2-1.$$

Kai $x=7$, šio daugianario reikšmė yra -1, nes dėmuo $x(x-7)^2$ lygus nuliui. Taigi teiginys $C(7)$ yra $-1<0$, t.y. jis teisingas. Todėl teisingas ir teiginys $(\exists x)\, C(x)$.

8 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio funkciją

$B(x) \equiv \{$skaičius x^2+2x+3 dalijasi iš 7$\}$,
apibrėžtą visų natūrinių skaičių aibėje N.

Su ja galima sudaryti $(\exists x)\, B(x)$, t.y. aibėje N esama tokio elemento x, su kuriuo x^2+2x+3 dalijasi iš 7. Patikrinsime, ar teisingas šis teiginys. Dėl to išnagrinėsime teiginius $B(1)$, $B(2)$, $B(3)$, $B(4)$:

$$B(1) \equiv \{\text{skaičius } 1^2+2\cdot 1+3=6 \text{ dalijasi iš } 7\},$$

$$B(2) \equiv \{\text{skaičius } 2^2+2\cdot 2+3=11 \text{ dalijasi iš } 7\},$$

$$B(3) \equiv \{\text{skaičius } 3^2+2\cdot 3+3=18 \text{ dalijasi iš } 7\},$$

$$B(4) \equiv \{\text{skaičius } 4^2+2\cdot 4+3=27 \text{ dalijasi iš } 7\}.$$

Visi šie teiginiai yra klaidingi. Lengva tokiu pat būdu patikrinti, kad klaidingi ir teiginiai $B(5)$, $B(6)$, $B(7)$, $B(8)$, $B(9)$, $B(10)$. Keliame hipotezę (prielaidą), kad teiginys $B(n)$ klaidingas su visomis n reikšmėmis, t.y. kad ir teiginys $(\exists x)\, B(x)$ taip pat klaidingas. Tačiau bandymų metodu to įrodyti neįmanoma, tai galima nustatyti tik bendrais samprotavimais. Štai kaip galima samprotauti.

Bet kurį natūrinį skaičių n galima užrašyti taip: $n=7k+q$. Čia q įgyja vieną iš reikšmių 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, o k – dalmuo, kuris gaunamas, skaičių n padalijus iš 7. Daugianaryje x^2+2x+3 įrašę n reikšmę, gausime

$$n^2+2n+3=(7k+q)^2+2(7k+q)+3=$$

$$=(49k^2+14kq+14k)+(q^2+2q+3)=$$

$$=7(7k^2+2kq+2k)+q^2+2q+3.$$

Čia jau matyti, kad skaičių n^2+2n+3 padaliję iš 7, gausime tokią pat liekaną, kokią gauname, skaičių q^2+2q+3 padalinę iš 7, nes jų skirtumas dalijasi iš 7. Vadinasi, skaičius n^2+2n+3 dalijasi iš 7 tada ir tik tada, kai iš 7 dalijasi skaičius q^2+2q+3. Čia q – liekana, gaunama n padalijus iš 7. Bet q gali turėti tik šias septynias reikšmes: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Su šiomis q reikšmėmis daugianario q^2+2q+3 reikšmės lygios 3, 6, 11, 18, 27, 38, 51. Nė vienas šių skaičių nesidalija iš 7. Vadinasi, nė su viena natūrine n reikšme skaičius n^2+2n+3 nesidalija iš 7, t.y. su visomis natūrinėmis n reikšmėmis teiginys $B(n)$ yra klaidingas. Tuo pačiu įrodyta, kad teiginys $(\exists x)\, B(x)$ yra klaidingas.

Grįžkime dar kartą prie teiginių, turinčių žodžius „visi", „kiekvienas", „yra", „egzistuoja" ir kt., neigimo. Šį klausimą jau nagrinėjome šio paragrafo pradžioje. Tai, kas buvo pasakyta, dabar galima taip formuluoti.

I. Tarkime, kad $A(x)$ yra teiginio funkcija, apibrėžta aibėje M. Sudarysime teiginį

$$(\forall x)\, A(x),$$

tvirtinantį, kad bet kuris aibės M elementas x turi savybę $A(x)$. Šio teiginio neiginį galima gauti dviem būdais:

1) neigimo ženklą parašant prieš visą teiginį:

$$\neg((\forall x) A(x));$$

tada skaitome taip: netiesa, kad kiekvienas x turi savybę $A(x)$;

2) neigimo ženklą parašant po $\forall x$, bet tada bendrumo kvantorių $\forall$ būtinai reikia pakeisti egzistavimo kvantoriumi $\exists$:

$$(\exists x)(\neg A(x));$$

skaitome: yra (bent vienas) aibės M elementas x, neturintis savybės $A(x)$.

II. Toliau nagrinėsime teiginį

$$(\exists x) A(x),$$

tvirtinantį, kad aibėje M yra elementas x, turintis savybę $A(x)$. Šio teiginio neiginį galima gauti dviem būdais:

1) neigimo ženklą parašant prieš visą teiginį:

$$\neg((\exists x) A(x));$$

2) neigimo ženklą parašant po $\exists x$, bet tada būtinai reikia pakeisti egzistavimo kvantorių $\exists$ bendrumo kvantoriumi $\forall$:

$$(\forall x)\ (\neg A(x).$$

§ 5. Būtinos ir pakankamos sąlygos

Išnagrinėsime kurią nors teoremą. Dažnai galima išskirti jos sąlygą ir išvadą. Teoremos sąlyga ir išvada yra tam tikros teiginio funkcijos.

Imkime, pavyzdžiui, Pitagoro teoremą. Nagrinėsime statųjį trikampį ABC; c – trikampio įžambinė, a ir b – jo statiniai. Teorema teigia, kad $c^2=a^2+b^2$. Teoremos sąlygą galima išreikšti štai tokia teiginio funkcija:

$$M\equiv\{\text{trikampio } ABC \text{ kampas } C \text{ yra status}\}.$$

Teoremos išvada

$$N\equiv\{c^2=a^2+b^2\}.$$

Taip pažymėjus teoremos sąlygą ir išvadą, Pitagoro teoremą galima parašyti trumpai:

$$M\Rightarrow N.$$

Šis užrašas reiškia, kad iš M išplaukia (gaunama) N. Kitaip tariant, jeigu tam tikro trikampio atžvilgiu teiginys M yra teisingas, tai teisingas ir teiginys N. Aišku, kad teiginys M gali būti ir klaidingas – ne kiekvienas trikampis yra status. Bet kai teiginys M yra teisingas (žinant, kad trikampis ABC status, o jo kraštinės pažymėtos taip, kaip nurodyta), tai ir teiginys N irgi teisingas. Tad ir sakoma, kad „iš M išplaukia N“.

Patikslinsime samprotavimus apie Pitagoro teoremos sąlygą ir išvadą. Tarkime, kad bet kurio trikampio viršūnės pažymėtos raidėmis A, B, C,

o kraštinės, esančios prieš šias viršūnes, – atitinkamai raidėmis a, b, c. Visą tokių trikampių aibę žymėsime raide T. Tada M ir N yra *teiginio funkcijos*, apibrėžtos aibėje T, t. y. bet kuriam aibės T elementui Δ (bet kuriam trikampiui ABC) teiginiai M ir N gali būti teisingi arba neteisingi:

$$M(\Delta) \equiv \left\{ \angle C = \frac{\pi}{2} \right\},$$

$$N(\Delta) \equiv \{c^2 = a^2 + b^2\}.$$

Taigi detaliai suformuluota Pitagoro teorema teigia:

$$(\forall \Delta)\ \big(M(\Delta) \Rightarrow N(\Delta)\big),$$

vadinasi, jei bet kuriam trikampiui Δ teiginys $M(\Delta)$ yra teisingas, tai kartu teisingas ir teiginys $N(\Delta)$.

Išnagrinėsime antrąjį pavyzdį – teoremą, kuri teigia, kad rombo įstrižainės yra viena kitai statmenos. Pabandysime išskirti teoremos sąlygą ir išvadą. Sąlyga: keturkampis $ABCD$ yra rombas. Išvada: jo įstrižainės yra viena kitai statmenos. Patogumo dėlei keturkampį, apie kurį kalbame, pažymėsime raide Q. Tada teoremos sąlygą ir išvadą galima parašyti taip:

Sąlyga:

$A(Q) \equiv$ {keturkampis Q – rombas, t.y. $AB = BC = CD = DA$}.

Išvada:

$B(Q) \equiv$ {keturkampio Q įstrižainės yra viena kitai statmenos, t.y. $AC \perp BD$}.

Pačią teoremą galima parašyti taip:

$$(\forall Q)\big(A(Q) \Rightarrow B(Q)\big),$$

t. y. bet kuriam keturkampiui Q iš A išplaukia B. Kitaip tariant, jeigu keturkampiui Q teisingas teiginys $A(Q)$, tai teisingas ir teiginys $B(Q)$. Aišku, kad ne visada teiginys $A(Q)$ teisingas, nes ne kiekvienas keturkampis Q yra rombas. Bet, kai teisingas $A(Q)$, žinant, kad Q – rombas, tai teisingas ir teiginys $B(Q)$.

Tačiau, formuluojant teoremą, ženklai $(\forall \Delta)$, $(\forall Q)$ ir t.t. dažnai praleidžiami, o teorema paprastai užrašoma $A \Rightarrow B$.

Tarkime, kad teisinga teorema, kurios sąlyga yra teiginys[1] A, o išvada – teiginys B. Ši teorema

kai galioja (yra teisingas) teiginys A, tai galioja (yra teisingas) ir teiginys B

trumpai išreiškiama posakiu „kai A, tai B“ arba parašoma tiesiog $A \Rightarrow B$, arba detaliau – $(\forall x)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$.

---

[1] Toliau kartais vietoj „teiginio funkcija“ sakysime tiesiog „teiginys“, o vietoj $A(x)$, $B(x)$ rašysime tiesiog A, B.

Esama ir kitokių dažnai naudojamų šios teoremos formuluočių. Būtent, teorema $A \Rightarrow B$ pasakoma bet kuria iš šių dviejų formuluočių:

A yra *pakankama sąlyga teiginiui B*,

B yra *būtina sąlyga teiginiui A*.

Stojantieji į aukštąsias mokyklas per egzaminus padaro daug klaidų, vartodami žodžius „būtina sąlyga", „pakankama sąlyga".

Pateiksime tikslius apibrėžimus. Tarkime, kad A – tam tikra teiginio funkcija (arba teiginys).

Kiekvienas teiginys, iš kurio išplaukia A, vadinamas *pakankama sąlyga* teiginiui A. Kiekvienas teiginys, kuris išplaukia iš A, vadinamas *būtina sąlyga* teiginiui A.

Nieko kito terminai „būtina sąlyga", „pakankama sąlyga" nereiškia; jokia kita prasme jie nevartojami. Posakį „A yra pakankama sąlyga teiginiui B" galima tik keisti, pavyzdžiui: kad teiginys B būtų teisingas, pakanka, jog galiotų A. Taip pakeitus, prasmė lieka tokia pat: iš A išplaukia B.

Taigi, kai teisinga teorema $A \Rightarrow B$, galima sakyti, kad A yra pakankama sąlyga teiginiui B (juk iš A išplaukia B). Taip pat galima sakyti, kad B yra būtina sąlyga teiginiui A (nes B išplaukia iš A).

Įsidėmėkite dar, kad žodžiai „būtina sąlyga" dažnai keičiami žodžiais „tik tuo atveju", „tik tada", „reikia".

Vadinasi, teoremą $A \Rightarrow B$ galima pasakyti ne tik žodžiais

B yra būtina sąlyga teiginiui A,

bet ir žodžiais

A gali būti teisingas tik tuo atveju, kai teisingas teiginys B,

arba

A galioja tik tada, kai galioja B,

arba,

kad galiotų A, reikia, jog sąlyga B būtų teisinga.

9 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginius

$A(x) \equiv \{$skaičius x dalijasi iš 4$\}$,

$B(x) \equiv \{$paskutinis skaičiaus x skaitmuo yra lyginis$\}$.

Šį kartą teisinga teorema $A \Rightarrow B$. Vadinasi, B yra būtina sąlyga teiginiui A arba detaliau:

kad skaičius x dalytųsi iš 4, būtina, kad paskutinis jo skaitmuo būtų lyginis.

Kitaip tariant,

skaičius x gali dalytis iš 4 tik tada, kai paskutinis jo skaitmuo yra lyginis,

arba,

kad skaičius dalytųsi iš 4, paskutinis jo skaitmuo turi būti lyginis.

Kad teiginys A būtų teisingas, *būtina* sąlyga B. Tačiau B negarantuoja, kad teiginys A yra teisingas, nes B nėra pakankama sąlyga teiginiui A: juk tai, kad paskutinis skaitmuo yra lyginis, dar nereiškia, jog skaičius x būtinai dalijasi iš 4.

Toliau ta pati teorema $A \Rightarrow B$ sako, kad A yra *pakankama sąlyga* teiginiui B, arba detaliau:

kad paskutinis skaičiaus x skaitmuo būtų lyginis, pakanka, jog šis skaičius dalytųsi iš 4.

Taigi šį kartą pakankama sąlyga A reikalauja daugiau, negu iš tikrųjų reikia, kad teiginys B būtų teisingas (pavyzdžiui, skaičius 26 nesidalija iš 4, bet paskutinis jo skaitmuo yra lyginis).

10 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio funkcijas:

$A(a, b) \equiv$ {kiekvienas sveikųjų skaičių a, b dalijasi iš 3},

$B(a, b) \equiv$ {suma $a+b$ dalijasi iš 3}.

Čia galima padaryti išvadą $A \Rightarrow B$, t.y. A yra pakankama sąlyga teiginiui B, o B yra būtina sąlyga teiginiui A. Kitaip tariant,

kad suma $a+b$ dalytųsi iš 3, pakanka,
jog kiekvienas dėmuo a ir b dalytųsi iš 3;

kad kiekvienas dėmuo dalytųsi iš 3,
būtina, jog suma dalytųsi iš 3.

Pabaigoje atkreipsime dėmesį į tai, kad teoremos formuluotėje $(\forall x)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big)$ užrašą $(\forall x)$ galime praleisti tik tada, kai nepamirštame šio praleisto užrašo prasmės ir svarbos. Išnagrinėsime tokį pavyzdį: *lygiagretainio įstrižainės yra statmenos*. Kiekvienas pasakys, kad ši teorema klaidinga. Bet ką tai reiškia? Suformuluotą teoremą parašysime $A \Rightarrow B$ ir išnagrinėsime tokias teiginio funkcijas:

$A(Q) \equiv$ {keturkampis Q – lygiagretainis},

$B(Q) \equiv$ keturkampio Q įstrižainės statmenos}.

Dabar suformuluotą teoremą galima taip parašyti: $A(Q) \Rightarrow B(Q)$. Iš tikrųjų tai kol kas dar jokia teorema, o tik teiginio funkcija (iš jos kartais gaunamas teisingas teiginys, o kartais – ne). Jeigu prirašytume bendrumo arba egzistavimo kvantorių, gautume teiginį ir galėtume pasakyti, ar jis teisingas, ar klaidingas. Pavyzdžiui, pridėję egzistavimo kvantorių, gauname teiginį

$$(\exists Q)\big(A(Q) \Rightarrow B(Q)\big),$$

tvirtinantį, kad yra lygiagretainis, kurio įstrižainės statmenos. Tuo niekas neabejoja – tokie lygiagretainiai yra rombai. Tačiau bendrumo ženklas rodo, kad teiginys

$$(\forall Q)\big(A(Q) \Rightarrow B(Q)\big), \tag{1}$$

yra klaidingas. Būtent šia prasme sakome, kad teorema „lygiagretainio įstrižainės statmenos“ yra klaidinga. Kitaip tariant, egzistuoja lygiagre-

tainiai, kurių įstrižainės statmenos. Tačiau suformuluotą teoremą nesąmoningai visi supranta taip: *bet kokio* lygiagretainio įstrižainės yra statmenos, vadinasi, taip, kaip parašyta (1) reiškinyje. Ši teorema iš tiesų klaidinga.

Dar pavyzdys: *suprastintos kvadratinės lygties šaknų suma lygi laisvajam nariui.* Ši teorema klaidinga. Tačiau ne ta prasme, kad taip niekada nebūna. Pavyzdžiui, lygties $x^2-8x+8=0$ šaknys turi šią savybę. Teorema klaidinga, kai teigiama, kad *bet kokios* suprastintos kvadratinės lygties šaknų suma lygi laisvajam nariui. Taigi, ar teoremos formuluotėje rašome $(\forall x)$, ar nerašome, nepamirškime, kad šis užrašas formuluotėje yra (arba jį turime galvoje).

Aišku, tai netaikoma *egzistavimo* teoremoms, t.y. toms, kuriose teigiame, jog kažkas egzistuoja. Pavyzdys gali būti toks tvirtinimas: *yra kvadratinių lygčių, neturinčių realių šaknų.* Šis teiginys, žinoma, teisingas. Bet jis jokiu būdu netvirtina, kad bet kuri kvadratinė lygtis neturi realių šaknų, todėl šios teoremos negalima užrašyti taip:

$$(\forall x)\big(A(x)\Rightarrow B(x)\big).$$

§ 6. Atvirkštinė ir priešingoji teorema

Aišku, kad ne kiekvienas teiginys $A\Rightarrow B$ $\Big($arba detaliau $(\forall x)\ \big(A(x)\Rightarrow B(x)\big)\Big)$ yra teisingas, t.y. išreiškia teisingą teoremą.

Tarkime, kad A ir B – dvi tam tikros teiginio funkcijos. Teoremos $A\Rightarrow B$ ir $B\Rightarrow A$ vadinamos viena kitai *atvirkštinėmis* teoremomis. Taigi, norint iš teoremos $A\Rightarrow B$ gauti atvirkštinę, reikia sukeisti vietomis teoremos sąlygą ir išvadą (keičiame vietomis tai, kas buvo „duota", ir tai, ką „reikia įrodyti"). Be abejo, iš dviejų viena kitai atvirkštinių teoremų $A\Rightarrow B$, $B\Rightarrow A$ bet kuri gali būti teisinga arba klaidinga.

Dažnai viena šių teoremų $A\Rightarrow B$, $B\Rightarrow A$, sakysim, teorema $A\Rightarrow B$, vadinama „tiesiogine teorema", o teorema $B\Rightarrow A$ – „atvirkštine". Tokia terminologija nepeiktina, nors reikia aiškiai suprasti, kad bet kurią iš dviejų teoremų $A\Rightarrow B$, $B\Rightarrow A$ galima laikyti „tiesiogine". Tuomet kita bus jai atvirkštinė.

11 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio funkcijas:

$A(Q)\equiv\{$keturkampis Q – rombas$\}$,

$B(Q)\equiv\{$keturkampio Q įstrižainės viena kitai statmenos$\}$.

Teorema $(\forall Q)\big(A(Q)\Rightarrow B(Q)\big)$ teigia:

jeigu keturkampis Q – rombas, tai jo įstrižainės yra viena kitai statmenos.

Ši teorema teisinga. Atvirkštinė teorema $(\forall Q)\big(B(Q)\Rightarrow A(Q)\big)$:

jeigu keturkampio Q įstrižainės viena kitai statmenos, tai šis keturkampis yra rombas,

yra klaidinga.

12 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio funkcijas:

$A(a) \equiv$ {natūrinis skaičius $a>9$ dalijasi iš 4},

$B(a) \equiv$ {dviženklis skaičius, išreikštas dviem paskutiniais skaičiaus a skaitmenimis, dalijasi iš 4}.

Teorema $(\forall a)(A(a) \Rightarrow (B(a))$ skamba taip:

> kai natūrinis skaičius $a>9$ dalijasi iš 4, tai dviženklis skaičius, išreikštas dviem paskutiniais skaičiaus a skaitmenimis, irgi dalijasi iš 4.

Ji, aišku, teisinga. Atvirkštinė teorema $(\forall a)(B(a) \Rightarrow A(a))$ šį kartą irgi teisinga:

> kai dviženklis skaičius, išreikštas dviem paskutiniais skaičiaus $a>9$ skaitmenimis, dalijasi iš 4, tai ir pats skaičius a dalijasi iš 4.

Taigi kartais iš dviejų viena kitai atvirkštinių teoremų teisinga tik viena, kaip 11 pavyzdyje, o kartais – abi, kaip 12 pavyzdyje. (Sugalvokite pavyzdį, iliustruojantį tą neįdomų atvejį, kai abi viena kitai atvirkštinės teoremos yra klaidingos.) Kai abi teoremos $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$ (t.y. „tiesioginė" ir „atvirkštinė") yra teisingos, trumpai žymime $A \rightleftarrows B$ arba $A \Leftrightarrow B$. Šioje knygoje vartojamas antrasis žymėjimas.

Tarkime, kad teiginiai A ir B yra tokie, jog iš kiekvieno jų išplaukia kitas: $A \Leftrightarrow B$. Tokiu atveju sakoma, kad kiekvienas šių teiginių A, B yra *būtina ir pakankama sąlyga* kitam teiginiui. Vartojami ir kitokie terminai. Pateikiame daugiausia vartojamas formuluotes:

1) kad teiginys A būtų teisingas, būtina ir pakankama, jog galiotų B;
2) A galioja tuo ir tik tuo atveju, kai galioja B;
3) teiginys A teisingas tada ir tik tada, kai teiginys B yra teisingas.

Visi šie posakiai išreiškia tą patį faktą: $A \Leftrightarrow B$. Kiekvienu atveju teiginius A ir B galima sukeisti vietomis. Kitaip tariant, jeigu A yra būtina ir pakankama sąlyga teiginiui B, tai ir B yra būtina ir pakankama sąlyga teiginiui A.

Būtinų ir pakankamų sąlygų pavyzdžius jau nagrinėjome. Štai vienas:

> kad skaičius $a>9$ dalytųsi iš 4, būtina ir pakankama, jog iš 4 dalytųsi dviženklis skaičius, išreikštas dviem paskutiniais skaičiaus a skaitmenimis.

Įsidėmėtina, kad terminas „sąlyga" dažnai keičiamas žodžiu „požymis". Taigi kartais vietoj „pakankama sąlyga" sakoma „pakankamas požymis" ir kt. Be to, dažnai vietoj „būtinas požymis", „pakankamas požymis", „būtinas ir pakankamas požymis" sakoma tiesiog „požymis", turint galvoje, kad ir taip aišku, apie kokį požymį kalbama. Pavyzdžiui, prieš tai suformuluotas tvirtinimas vadinamas skaičiaus dalumo iš 4 požymiu (jis yra būtina ir pakankama dalumo iš 4 sąlyga).

Trikampių lygybės požymiai – tai irgi požymiai, suprantami ta pačia prasme, be to, jie irgi yra būtini ir pakankami. Pavyzdžiui, išnagrinėsime trečiąjį požymį. Kad du trikampiai būtų lygūs, turi būti lygios ir atitinka-

mos jų kraštinės. Tai aišku iš trikampių lygybės sąvokos apibrėžimo. Minėtoji teorema kaip tik įrodo, kad ši sąlyga yra pakankama. Kitaip tariant, trečiasis požymis mokykloje įrodomas kaip pakankama trikampių lygybės sąlyga, bet šios sąlygos būtinumas irgi akivaizdus. Taigi trečiasis požymis yra būtina ir pakankama trikampių lygybės sąlyga.

Jeigu teoremos $A \Rightarrow B$ sąlygą ir išvadą pakeistume jų neiginiais, tai gautume naują teoremą $\neg A \Rightarrow \neg B$, kuri vadinama teorema, priešinga duotajai.

13 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginius:

$A \equiv$ {daugiakampis Q yra keturkampis},

$B \equiv$ {daugiakampio Q vidinių kampų suma lygi 2π}.

Teorema $A \Rightarrow B$ skamba taip: *kai daugiakampis Q yra keturkampis, jo vidinių kampų suma lygi* 2π. Priešingoji teorema $\neg A \Rightarrow \neg B$ teigia: *jeigu daugiakampis Q ne keturkampis, tai jo vidinių kampų suma nelygi* 2π. Šios abi teoremos (tiesioginė ir priešingoji) teisingos.

14 pavyzdys.

$A \equiv$ {Q – keturkampis},

$B \equiv$ {daugiakampio Q priekampių suma lygi 2π}.

Teorema $A \Rightarrow B$ teigia: *kai daugiakampis Q yra keturkampis, jo priekampių suma lygi* 2π. Priešingoji teorema $\neg A \Rightarrow \neg B$: *kai daugiakampis Q ne keturkampis, tai jo priekampių suma nelygi* 2π. Tiesioginė teorema teisinga, priešingoji – ne.

Taigi, kai teorema $A \Rightarrow B$ yra teisinga, priešingoji teorema $\neg A \Rightarrow \neg B$ gali būti ir teisinga, ir klaidinga. Įdomu tai, kad teorema $\neg B \Rightarrow \neg A$, *priešingoji atvirkštinei, yra teisinga tada ir tik tada, kai teisinga tiesioginė teorema* $A \Rightarrow B$. Šiuo faktu pagrįstas įrodymo prieštaros metodas: vietoj reikalingos teoremos $A \Rightarrow B$ įrodoma teorema $\neg B \Rightarrow \neg A$, priešinga atvirkštinei.

Įrodymo prieštaros metodu schema praktiškai realizuojama taip: norėdami įrodyti teoremą $A \Rightarrow B$, tariame, kad teiginys $\neg B$ yra teisingas, ir bandome įrodyti, kad ir teiginys $\neg A$ yra teisingas. Jeigu pavyksta (t.y. įrodėme teoremą $\neg B \Rightarrow \neg A$, priešingą atvirkštinei), tai duotoji teorema $A \Rightarrow B$ irgi laikoma įrodyta. Mokykliniuose geometrijos vadovėliuose gausu įrodymo prieštaros metodu pavyzdžių.

§ 7. Konjunkcija ir disjunkcija

Supažindinsime su dviem operacijomis, vartojamomis teiginių algebroje. Jas pritaikius, iš dviejų kurių nors teiginių galima gauti naujų teiginių. Pirmoji operacija žymima simboliu $\vee$ ir vadinama *disjunkcija* (kartais ji dar vadinama operacija „*arba*“).

Užrašas $A \vee B$ reiškia: galioja bent vienas iš teiginių A, B. Teiginys $A \vee B$ vadinamas teiginių A ir B disjunkcija. Kartais užrašas $A \vee B$ skaitomas taip: „A arba B“.

Jeigu teiginys A teisingas, tai teiginys $A \vee B$ irgi teisingas (juk galioja bent vienas teiginių A, B – šį kartą teiginys A). Lygiai taip pat, kai teiginys B teisingas, tai teisingas ir teiginys $A \vee B$. Kai abu teiginiai A ir B teisingi, tai teiginys $A \vee B$ irgi teisingas (teisingas bent vienas iš teiginių A ir B – šį kartą teisingi abu). Pagaliau, kai abu teiginiai A ir B klaidingi, tai kartu klaidingas ir teiginys $A \vee B$.

Taigi teiginys $A \vee B$ klaidingas tik tada, kai klaidingi abu teiginiai A,B. Įsidėmėtina, kad jungtis „arba“, kaip ji vadinama šnekamojoje kalboje, ne visai tiksliai atspindi operacijos $\vee$ esmę, nes jai dažniausiai suteikiamas skiriamasis atspalvis, t.y. ji vartojama prasme „arba – arba“. Išnagrinėsime, pavyzdžiui, sakinį „Aš išvažiuoju, bet paimti knygos ateis brolis arba sesuo“. Taip pasakęs žmogus tikriausiai turėjo galvoje, kad ateis arba brolis, arba sesuo, bet ne abu kartu. Taip yra šnekamojoje kalboje. Atvirkščiai, matematinėje logikoje operacija $\vee$ neturi skiriamojo atspalvio, t.y. $A \vee B$ reiškia, kad galioja arba A (bet ne B), arba B (bet ne A), arba (štai čia ir slypi tas skirtumas) A ir B galioja kartu. Kalbant operaciją $\vee$ geriau vadinti disjunkcija, bet galima sakyti „arba“, tačiau reikia prisiminti, kad „arba“ logikoje neturi skiriamojo atspalvio.

15 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio funkcijas

$$A(x) \equiv \{x \text{ – sudėtinis skaičius}\},$$

$$B(x) \equiv \{x \text{ – nelyginis skaičius}\},$$

apibrėžtas visų natūrinių skaičių aibėje N. Taikydami disjunkciją, gauname teiginio funkciją $A(x) \vee B(x)$. Kai a – lyginis skaičius, didesnis už du, tai teiginys $A(a) \vee B(a)$ teisingas (nes a – sudėtinis skaičius ir, vadinasi, teiginys $A(a)$ teisingas); kai a – nelyginis skaičius, tai teiginys $A(a) \vee B(a)$ irgi teisingas. Pagaliau teiginys $A(2) \vee B(2)$ klaidingas (skaičius 2 nei sudėtinis, nei nelyginis). Taigi teiginys $A(x) \vee B(x)$ teisingas, kai $x \neq 2$, ir klaidingas, kai $x=2$. Jis ekvivalentus teiginiui

$$C(x) \equiv \{x \neq 2\}.$$

16 pavyzdys. Nagrinėsime įvairius keturkampius Q. Jų viršūnes nuosekliai pažymėsime raidėmis A, B, C, D. Išnagrinėsime dvi teiginio funkcijas

$$M(Q) \equiv \{AB \parallel CD\},$$

$$N(Q) \equiv \{AD \parallel BC\},$$

apibrėžtas tokių keturkampių aibėje. Tada teiginys $M(Q) \vee N(Q)$ reiškia, kad yra bent viena lygiagrečių priešingų kraštinių pora. Jis ekvivalentus teiginiui

$$P(Q) \equiv \{\text{keturkampis } Q \text{ – trapecija}\}.$$

Kadangi jungtis „arba“ (t.y. $\vee$) matematinėje logikoje neturi skiriamojo atspalvio, tai teiginys $M(Q) \vee N(Q)$ yra teisingas ir tada, kai abu teiginiai $M(Q)$, $N(Q)$ teisingi kartu. Kitaip tariant, lygiagretainis traktuojamas kaip atskiras trapecijos atvejis.

17 pavyzdys. Išnagrinėsime visiems žinomą tvirtinimą: jeigu sandauga ab bus lygi nuliui, tai bent vienas iš dauginamųjų a, b, lygus nuliui. Norėdami šią teoremą parašyti loginiais simboliais, panagrinėsime teiginio funkcijas:

$$M(a) \equiv \{a=0\},$$

$$N(a, b) \equiv \{ab=0\}.$$

Dabar suformuluotą teoremą galima parašyti taip:

$$(\forall a, b)\big(N(a, b) \Rightarrow M(a) \vee M(b)\big).$$

Kitaip tariant, iš to, kad teiginys $N(a, b)$ (*t.y.* $ab=0$) yra teisingas, išplaukia, jog su bet kokiomis a ir b reikšmėmis yra teisingas bent vienas teiginių $M(a)$, $M(b)$ (bent vienas šių skaičių a, b yra lygus nuliui).

Dabar išnagrinėsime dar vieną teiginių operaciją, žymimą simboliu $\wedge$ ir vadinamą *konjunkcija* (arba operacija „ir"). Užrašas $A \wedge B$ skaitomas „A ir B". Jis reiškia, kad A ir B galioja kartu. Teiginys $A \wedge B$ teisingas, kai teisingi abu teiginiai A, B. Visais kitais atvejais jis klaidingas.

18 pavyzdys. Dar kartą panagrinėsime 16 pavyzdžio teiginio funkcijas $M(Q)$ ir $N(Q)$. Teiginys $M(Q) \wedge N(Q)$ reiškia, kad priešingos keturkampio Q kraštinės yra poromis lygiagrečios, t.y. jis ekvivalentus teiginiui

$$\mathsf{L}(Q) \equiv \{\text{keturkampis } Q - \text{lygiagretainis}\}.$$

19 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio funkcijas apie tiesių padėtį erdvėje:

$$A(l, m) = \{\text{tiesės } l, m \text{ yra vienoje plokštumoje}\},$$

$$B(l, m) = \{\text{tiesės } l, m \text{ turi bendrą tašką}\}.$$

Tada teiginys $A(l, m) \wedge \big(\neg B(l, m)\big)$ reiškia, kad tiesės l, m yra vienoje plokštumoje ir neturi bendrų taškų, t.y. jis ekvivalentus teiginiui

$$C(l, m) \equiv \{l \parallel m\}.$$

Kitaip tariant, teiginys $A \wedge (\neg B)$ yra tiesių lygiagretumo erdvėje apibrėžimas[1].

20 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio apie tiesių padėtį erdvėje funkcijas:

$$C(l, m) \equiv \{l \parallel m\},$$

$$D(l, m) \equiv \{\text{tiesės } l \text{ ir } m \text{ sutampa}\}.$$

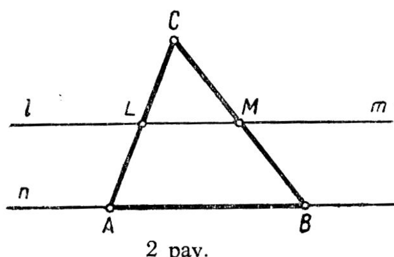
Tuomet užrašas

$$\big(C(l, n) \wedge C(m, n)\big) \Rightarrow \big(C(l, m) \vee D(l, m)\big)$$

išreiškia šią teoremą: *dvi tiesės l, m, kurių kiekviena lygiagreti trečiajai tiesei n, yra arba viena kitai lygiagrečios, arba sutampa.* Ši formuluotė yra tikslesnė, negu ta, kurią dažnai tenka išgirsti: dvi tiesės, lygiagrečios tre-

[1] Tiesių lygiagretumą apibrėžiame taip, kaip mokykloje: dvi sutampančios tiesės nėra lygiagrečios.

čiajai, yra viena kitai lygiagrečios. Iš tikrųjų trikampio ABC pagrindą AB pažymėję n, jo šoninių kraštinių vidurio taškus – L ir M, tieses, lygiagrečias n ir einančias atitinkamai per taškus L ir M – l ir m (2 pav.), gautume $l \parallel n$, $m \parallel n$, t.y. l ir m – dvi tiesės, lygiagrečios trečiajai. Bet, kaip žinome, l ir m *sutampa* (t.y. nėra lygiagrečios ta prasme, kaip apibrėžiama mokykloje).



2 pav.

§ 8. Kai kurie įrodymo būdai

Jau anksčiau aptarėme kai kurias taisykles, kurios dažnai vartojamos kaip vienų ar kitų teoremų įrodymo būdai. Štai 22 puslapyje nagrinėjome įrodymo prieštaros metodą, kurio esmę sudaro teoremų

$$(\forall x)\big(A(x) \Rightarrow B(x)\big) \text{ ir } (\forall x)\Big(\big(\neg B(x)\big) \Rightarrow \big(\neg A(x)\big)\Big)$$

ekvivalentumas.

16 puslapyje nagrinėjome kitus teiginius, kurie irgi yra ekvivalentūs:

$$\neg\big((\forall x)A(x)\big) \text{ ekvivalentus } (\exists x)\big(\neg A(x)\big),$$

$$\neg\big((\exists x)A(x)\big) \text{ ekvivalentus } (\forall x)\big(\neg A(x)\big).$$

Štai dar keli svarbūs ekvivalenčių teiginių pavyzdžiai.

Kokios bebūtų teiginio funkcijos $M(x)$ ir $N(x)$, apibrėžtos tam tikroje aibėje, teiginio funkcijos

$$\neg\big(M(x) \vee N(x)\big) \text{ ir } \big(\neg M(x)\big) \wedge \big(\neg N(x)\big) \qquad (2)$$

yra ekvivalenčios. Lygiai taip pat ekvivalentūs ir teiginiai

$$\neg\big(M(x) \wedge N(x)\big) \text{ ir } \big(\neg M(x)\big) \vee \big(\neg N(x)\big). \qquad (3)$$

21 pavyzdys. Tarkime, kad M ir N prasmė tokia pat, kaip 16 pavyzdyje. Tada teiginys $M(Q) \vee N(Q)$ reiškia, kad Q – trapecija. Todėl teiginys $\neg\big(M(Q) \vee N(Q)\big)$ reiškia, kad Q – ne trapecija. Bet kaip suprasti posakį „Q – ne trapecija"? Tai reiškia, kad nė vienas teiginių $M(Q)$, $N(Q)$ nėra teisingi, t.y. abu teiginiai $\neg M(Q)$, $\neg N(Q)$ yra teisingi. Vadinasi, teisingas ir teiginys $\big(\neg M(Q)\big) \wedge \big(\neg N(Q)\big)$. Taigi teiginiai

$$\neg\big(M(Q) \vee N(Q)\big) \text{ ir } \big(\neg M(Q)\big) \wedge \big(\neg N(Q)\big)$$

reiškia tą patį. Taip galima interpretuoti (2) teiginių ekvivalentumą. Panašiai galima interpretuoti ir (3) teiginių ekvivalentumą.

Pabaigoje nurodysime vieną gana naudingą įrodymo būdą. Jį formuluosime kaip teoremą.

Teorema. *Sakykime, kad* $A_1(x)$, $A_2(x)$, ... $A_n(x)$ *ir* $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$ – *teiginio funkcijos, apibrėžtos tam tikroje aibėje* M *ir turinčios šias tris savybes:*

a) *visada (su kiekvienu aibės M elementu x) galioja bent vienas* iš teiginių $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$;

b) *yra teisingos teoremos* $A_1(x) \Rightarrow B_1(x)$, $A_2(x) \Rightarrow B_2(x)$, ..., $A_n(x) \Rightarrow B_n(x)$;

c) *teiginiai* $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$ *prieštarauja vienas kitam, t.y. kokį beimtume elementą x, kai vienas teiginys teisingas, visi kiti būtinai klaidingi.*

Tada visos atvirkštinės teoremos $B_1(x) \Rightarrow A_1(x)$, $B_2(x) \Rightarrow A_2(x)$, ..., $B_n(x) \Rightarrow A_n(x)$ *taip pat teisingos.*

Iš tikrųjų tarkime, kad teiginys $B_1(x)$ teisingas. Tada teiginys $A_2(x)$ negali būti teisingas, nes kitaip iš b) sąlygos išplauktų, kad teiginys $B_2(x)$ teisingas, o tai prieštarauja c) sąlygai. Taip pat įrodoma, kad negali būti teisingi ir $A_3(x)$, ..., $A_n(x)$. Tačiau, jeigu visi teiginiai $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$ yra klaidingi, tai, remiantis a) sąlyga, turi būti teisingas ir teiginys $A_1(x)$. Taigi, kai teiginys $B_1(x)$ teisingas, tai kartu teisingas ir teiginys $A_1(x)$. Vadinasi, yra teorema $B_1(x) \Rightarrow A_1(x)$. Taip pat įrodoma, kad teoremos $B_2(x) \Rightarrow A_2(x)$, ..., $B_n(x) \Rightarrow A_n(x)$ irgi teisingos.

Pažymėsime dar tai, kad, galiojant teoremos sąlygoms, visada galioja bent vienas iš teiginių $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_n(x)$, o teiginiai $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_n(x)$ prieštarauja vienas kitam.

Parodysime dviem pavyzdžiais, kaip taikoma ši teorema.

22 pavyzdys. Išnagrinėsime teiginio funkcijas, apibrėžtas visų trikampių aibėje T:

$$A_1 \equiv \{\text{kampas } A - \text{smailus}\},$$
$$A_2 \equiv \{\text{kampas } A - \text{status}\},$$
$$A_3 \equiv \{\text{kampas } A - \text{bukas}\},$$
$$B_1 \equiv \{a^2 < b^2 + c^2\},$$
$$B_2 \equiv \{a^2 = b^2 + c^2\},$$
$$B_3 \equiv \{a^2 > b^2 + c^2\}.$$

Nesunku patikrinti, kad įrodytos teoremos sąlygos a), b) ir c) galioja. Vadinasi, yra teisingos ne tik teoremos $A_1 \Rightarrow B_1$, $A_2 \Rightarrow B_2$, $A_3 \Rightarrow B_3$, bet ir atvirkštinės teoremos $B_1 \Rightarrow A_1$, $B_2 \Rightarrow A_2$, $B_3 \Rightarrow A_3$. Pavyzdžiui, pirmoji šių teoremų teigia:

jeigu trikampio tam tikros kraštinės kvadratas mažesnis už kitų dviejų kraštinių kvadratų sumą, tai kampas, esantis prieš tą kraštinę, yra smailus.

23 pavyzdys. Išnagrinėsime kvadratinę lygtį

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0, \tag{4}$$

kurios koeficientai yra realieji skaičiai. Jos diskriminantas $D = b^2 - 4ac$. Dabar išnagrinėsime teiginio funkcijas, apibrėžtas (4) išraiškos kvadratinių lygčių aibėje:

$$A_1 \equiv \{D > 0\},$$
$$A_2 \equiv \{D < 0\},$$
$$A_3 \equiv \{D = 0\},$$

$B_1 \equiv$ {(4) lygties šaknys yra realios ir skirtingos},

$B_2 \equiv$ {(4) lygtis realiųjų šaknų neturi},

$B_3 \equiv$ {(4) lygties šaknys sutampa}.

Ir čia nesunku įsitikinti, kad minėtos teoremos sąlygos galioja. Vadinasi, yra teisingos ne tik tiesioginės teoremos $A_1 \Rightarrow B_1$, $A_2 \Rightarrow B_2$, $A_3 \Rightarrow B_3$, bet ir atvirkštinės $B_1 \Rightarrow A_1$, $B_2 \Rightarrow A_2$, $B_3 \Rightarrow A_3$. Pavyzdžiui, pirmoji atvirkštinė teorema teigia: kai (4) lygties šaknys realios ir skirtingos, tai $D>0$.

I skyriaus uždaviniai

1.1. Sugalvokite teisingų ir klaidingų teiginių, kuriuos galima parašyti vien tik ženklais, nevartojant žodžių.

1.2. Sugalvokite teisingų ir klaidingų teiginių, kurių negalima parašyti vien tik žinomais ženklais.

1.3. Perskaitykite ženklais parašytus teiginius:

$$5<2; \quad 11+3=18; \quad 2+4 \leqslant 10; \quad 5^3=125; \quad 6^3 \neq 216.$$

Kurie jų teisingi, o kurie klaidingi?

1.4. Suformuluokite šių teiginių neiginius:

$M \equiv$ {257 – lyginis skaičius},

$Q \equiv$ {$\sqrt{2}$ – racionalusis skaičius},

$R \equiv$ {7 – teigiamas skaičius},

$S \equiv$ {5 – neigiamas skaičius}.

1.5. Išnagrinėkite kiekvieną **1.4** uždavinio teiginį ir atsakykite, kas yra teisingas: pats teiginys ar jo neiginys.

1.6. Išnagrinėkite teiginius:

$A \equiv$ {egzistuoja lyginiai pirminiai skaičiai},

$B \equiv$ {egzistuoja nelyginiai pirminiai skaičiai}.

Nustatykite, ar jie teisingi. Ar teiginys B yra teiginio A neiginys? Sudarykite abiejų teiginių neiginius.

1.7. Sudarykite teiginių

$C \equiv$ {27 nesidalija iš 2},

$D \equiv$ {nėra lyginių pirminių skaičių},

$E \equiv$ {$5 \cdot 7 \neq 35$}

neiginius. Kurie teiginiai ir kurie jų neiginiai yra teisingi?

1.8. Duoti teiginiai:

$A \equiv$ {15 dalijasi iš 3},

$B \equiv$ {5 – teigiamas skaičius},

$C \equiv$ {$3<7$}.

Sudarykite kiekvieno teiginio neiginį, o paskui dvigubą neiginį. Įsitikinkite, kad teiginio ir jo dvigubo neiginio prasmė yra ta pati.

1.9. Aibėje M, kurią sudaro skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, yra apibrėžta teiginio funkcija

$$A(x) \equiv \{x - \text{nelyginis skaičius}\}.$$

Užpildykite teisingumo lentelę:

Teiginys	$A(1)$	$A(2)$	$A(3)$	$A(4)$	$A(5)$	$A(6)$	$A(7)$
Jo teisingumas							

1.10. Aibėje M, kurią sudaro skaičiai $1, 2, \ldots, 10$, yra apibrėžta teiginio funkcija

$$B(x) \equiv \{x \text{ yra skaičiaus 60 daliklis}\}.$$

Sudarykite teiginio funkcijų $B(x)$ ir $\urcorner B(x)$ teisingumo lenteles.

1.11. Aibėje M, kurią sudaro skaičiai 3, 4, 5, 6 7, 8, yra apibrėžtos dvi teiginio funkcijos:

$$K(x) \equiv \{x - \text{pirminis skaičius}\},$$

$$L(x) \equiv \{x - \text{nelyginis skaičius}\}.$$

Sudarykite jų teisingumo lenteles. Ar sutampa teiginio funkcijos $K(x)$ ir $L(x)$ aibėje M? Ar sutampa jos aibėje, kurią sudaro skaičiai 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

1.12. Aibėje M, kurią sudaro skaičiai 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, yra apibrėžta teiginio funkcija

$$E(x, y) \equiv \{x+y \text{ priklauso aibei } M\}.$$

Pasakykite visas aibės M elementų poras (a, b), su kuriomis teiginys $E(a, b)$ yra teisingas.

1.13. Aibėje N, kurią sudaro skaičiai $1, 2, \ldots, 10$, yra apibrėžta teiginio funkcija

$$F(x, y) \equiv \{\text{skaičius } x \text{ yra skaičiaus } y \text{ daliklis}\}.$$

Išvardykite visas aibės N elementų poras (a, b), su kuriomis teiginys $F(a, b)$ yra teisingas. Ar yra tokių porų (a, b), su kuriomis vienas iš teiginių $F(a, b)$, $F(b, a)$ būtų teisingas, o kitas – klaidingas? Ar yra tokių porų (a, b), su kuriomis abu teiginiai $F(a, b)$, $F(b, a)$ būtų teisingi, būtų klaidingi?

Sudarykite **1.14–1.18** *uždavinių teiginių neiginius ir atsakykite, kuris iš teiginių A, $\urcorner A$ yra teisingas.*

1.14. $A \equiv \{$su kiekviena $a>0$ reikšme lygtis $x^2=a$ turi realiąją šaknį$\}$.

1.15. $A \equiv \{$su kiekvienu realiuoju skaičiumi a lygtis $x^2=a$ turi realiąją šaknį$\}$.

1.16. $A \equiv \{$egzistuoja kvadratinė lygtis, kuri neturi realiųjų šaknų$\}$.

1.17. $A \equiv \{$bet kokie du trikampiai yra panašūs$\}$.

1.18. $A \equiv$ {bent vienas iš dviejų bet kokių skaičių a, b dalijasi iš 3}.

1.19. Sugalvokite teiginio funkcijas, iš kurių su bendrumo kvantoriumi $\forall$ galėtume parašyti šiuos teiginius:

1. Visi pirminiai skaičiai yra nelyginiai.
2. Su bet kuria sveikąja x reikšme egzistuoja dalmuo $\frac{1}{x}$.
3. Kiekvienas natūrinis skaičius x tinka nelygybei $x^2 > x$.
4. Kiekvieną realųjį skaičių galima išreikšti baigtine dešimtaine trupmena.

Įsitikinkite, jog visi šie teiginiai yra klaidingi ir pakeiskite juos taip, kad gautute teisingus teiginius.

1.20. Vartodami simbolius $\forall$, $\exists$, parašykite šiuos teiginius:

1. Ne kiekvieną paprastąją trupmeną galima išreikšti baigtine dešimtaine trupmena.
2. Koks bebūtų natūrinis skaičius x, visada galima parinkti tokį natūrinį skaičių y, kad $x+y$ būtų pirminis skaičius
3. Koks bebūtų natūrinis skaičius x, visada galima parinkti tokį natūrinį skaičių y, kad $x^2+y^2<100$.
4. Koks bebūtų natūrinis skaičius y, visada galima parinkti tokį natūrinį skaičių x, kad $x+y$ būtų lyginis skaičius.
5. Koks bebūtų tiesės l taškas x, visada joje galima taip pažymėti tašką y, kad atstumas tarp taškų x ir y būtų lygus trims vienetams.

1.21. Duoti teiginiai:

1. Bet koks natūrinis skaičius dalijasi iš 5.
2. Egzistuoja lyginiai pirminiai skaičiai.
3. Visi natūriniai skaičiai yra lyginiai.
4. Egzistuoja trikampis, kurio visi kampai statūs.

Parašykite šiuos teiginius simboliais. Sudarykite (dviem būdais) jų neiginius ir perskaitykite juos.

Išskirkite **1.22–1.24** *teoremų sąlygą A ir išvadą B ir parašykite taip:* $A \Rightarrow B$:

1.22. Lygiagretainio įstrižainės susikirtimo taške dalijasi pusiau.

1.23. Su visomis teigiamomis a ir b reikšmėmis yra teisinga lygybė

$$\lg(ab) = \lg a + \lg b.$$

1.24. Kiekvienas sveikasis skaičius, kuris baigiasi dviem nuliais, dalijasi iš 4.

Kiekviename šių **1.25–1.27** *pavyzdžių nurodykite, kuris iš dviejų teiginių išplaukia iš kito ir įvairiais būdais, vartodami terminus „būtina sąlyga“, „pakankama sąlyga“, suformuluokite atitinkamą teoremą.*

1.25. $A \equiv$ {skaičius x lygus nuliui},
$B \equiv$ {sandauga xy lygi nuliui}.

1.26. $A \equiv$ {tiesės l_1 ir l_2 yra vienoje plokštumoje},
$B \equiv$ {tiesės l_1 ir l_2 yra lygiagrečios}.

1.27. $A \equiv \{a^2 \neq 0\}$, $B \equiv \{a > 0\}$.

Suformuluokite kiekvieno **1.28–1.30** *pavyzdžio teoremą* $A \Rightarrow B$ *ir jai atvirkštinę teoremą, nurodykite, kokiais atvejais atvirkštinė teorema yra teisinga.*

1.28. $A \equiv$ {trikampis Δ – lygiašonis},
$B \equiv$ {dvi trikampio Δ pusiaukraštinės yra lygios}.

1.29. $A \equiv$ {keturkampis Q – rombas},
$B \equiv$ {keturkampio Q įstrižainės dalija jo kampus pusiau}.

1.30. $A \equiv$ {natūrinis skaičius a dalijasi iš 9},
$B \equiv$ {skaičiaus a skaitmenų suma dalijasi iš 3}.

1.31. Suformuluokite ir įrodykite teoremą, atvirkštinę Pitagoro teoremai.

Įsitikinkite, kad **1.32–1.34** *pavyzdžių teiginio funkcijoms galioja ekvivalentumo sąryšis* $A \Leftrightarrow B$, *ir, vartodami žodžius „būtina ir pakankama" arba „tada ir tik tada", suformuluokite atitinkamas teoremas.*

1.32. $A \equiv$ {funkcija $\frac{ax+b}{cx+d}$ savo apibrėžimo srityje yra pastovi},

$B \equiv \{ad = bc\}$.

1.33. $A \equiv$ {iš trijų atkarpų, kurių ilgis a, b, c, galima sudaryti trikampį},

$B \equiv$ {iš teigiamų skaičių a, b, c sudarytos nelygybės

$$a+b>c,\ b+c>a,\ a+c>b\}.$$

1.34. $A \equiv$ {daugianaris $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots$

$\ldots + a_{n-1} x + a_n$ dalijasi iš $x - \alpha$},

$B \equiv \{P(\alpha) = 0\}$.

1.35. Įrodykite, kad šie teiginiai yra ekvivalentūs:

$A \equiv$ {dvisieniai kampai prie piramidės pagrindo yra lygūs},
$B \equiv$ {šoninių sienų aukštinės, nuleistos į piramidės pagrindo kraštines, yra lygios, o piramidės aukštinė eina per pagrindą},
$C \equiv$ {į piramidės pagrindą galima įbrėžti apskritimą, o piramidės aukštinė eina per šio apskritimo centrą},
$D \equiv$ {kampai tarp piramidės aukštinės ir šoninių sienų yra lygūs}.

1.36. Išnagrinėkite šias funkcijas:

$A \equiv$ {visos piramidės P pagrindo kraštinės yra lygios},
$B \equiv$ {visos piramidės P šoninės briaunos yra lygios},
$C \equiv$ {piramidė P yra taisyklingoji}.

Ar teisingos teoremos:

$$A \wedge B \Rightarrow C;\quad C \Rightarrow A \wedge B?$$

Vartodami terminus „būtina sąlyga", „pakankama sąlyga" (arba „tada ir tik tada"), suformuluokite teoremą.

1.37. Atsakykite į tą patį, kaip ir **1.36** uždavinio, klausimą, kai duoti trys teiginiai:

$A \equiv$ {piramidės P šoninės sienos yra vienodai pasvirusios į pagrindo plokštumą},
$B \equiv$ {visi piramidės P pagrindo kampai yra lygūs},
$C \equiv$ {piramidė P yra taisyklingoji}.

1.38. Įrodykite, kad piramidė yra taisyklingoji tada ir tik tada, kai piramidės pagrindas yra taisyklingasis daugiakampis, o jos aukštinė eina per šio daugiakampio centrą.

1.39. Duotos šešios teoremos. Kurios teisingos? Kurios jų yra viena kitai atvirkštinės, priešingos?

1. Kai kiekvienas dėmuo dalijasi iš 11, tai ir suma dalijasi iš 11.
2. Kai nė vienas dėmuo nesidalija iš 11, tai ir suma nesidalija iš 11.
3. Kai bent vienas dėmuo dalijasi iš 11, tai ir suma dalijasi iš 11.
4. Kai suma dalijasi iš 11, tai ir kiekvienas dėmuo dalijasi iš 11.
5. Kai suma nesidalija iš 11, tai nė vienas dėmuo nesidalija iš 11.
6. Kai suma nesidalija iš 11, tai nors vienas dėmuo nesidalija iš 11.

1.40. Duotos teiginio funkcijos, apibrėžtos visų natūrinių skaičių aibėje N:

$$A(x) \equiv \{x \text{ dalijasi iš } 5\},$$

$$B(x) \equiv \{x - \text{nelyginis skaičius}\}.$$

Kokia teiginio funkcijos $\neg\big(A(x) \vee B(x)\big)$ prasmė, kai vietoj x imamas jo paskutinis skaitmuo?

1.41. Duotos teiginio funkcijos, apibrėžtos visų natūrinių skaičių aibėje N:

$$A(x) \equiv \{x \text{ dalijasi iš } 2\},$$

$$B(x) \equiv \{x \text{ dalijasi iš } 3\}.$$

Kokia teiginio funkcijos

$$\big(\neg A(x)\big) \vee \big(\neg B(x)\big)$$

prasmė?

II SKYRIUS

REALIEJI SKAIČIAI

Mokykloje realiųjų skaičių teorija bent kiek plačiau nedėstoma. Ir tai nenuostabu, nes įrodymai, kuriais operuoja ši teorija, ir netgi pats realiojo skaičiaus apibrėžimas yra sudėtingi ir daugelis jų idėjų yra tolimos mokykliniam kursui. Tačiau per matematikos pamokas neapsieinama be termino „realusis skaičius". Mokiniams kalbama apie racionaliuosius ir iracionaliuosius skaičius, nors pačios šių skaičių sąvokos tiksliai neapibrėžiamos. Todėl per stojamuosius egzaminus į aukštąsias mokyklas tenka išgirsti daug klaidingų teiginių, susijusių su realiaisiais skaičiais.

Šiame skyriuje (dažniausiai be įrodymų) išdėstytos racionaliųjų ir realiųjų skaičių savybės. Šios savybės (nors teorija neišdėstyta iki galo) tiksliai ir matematiškai teisingai apibūdina realiųjų skaičių aibę.

§ 1. Racionalieji skaičiai

Racionaliuosius skaičius gauname, nuosekliai apibendrindami skaičiaus sąvoką. Patys pirmieji skaičiai, kuriuos nagrinėjome dar pradinėse mokyklos klasėse, yra natūriniai skaičiai 1, 2, 3, ... Visų natūrinių skaičių aibė N yra begalinė. Aibėje N visada galima atlikti dvi operacijas: sudėtį ir daugybą. Bet kurių dviejų natūrinių skaičių suma ir sandauga irgi yra natūrinis skaičius. Tačiau atvirkštiniai veiksmai – atimtis ir dalyba – natūrinių skaičių aibėje ne visada galimi. Pavyzdžiui, visų natūrinių skaičių aibėje negalima apskaičiuoti skirtumo $5-9$ ir dalmens $2:3$. Kad būtų galima atlikti šias operacijas, natūrinius skaičius visada reikia papildyti naujais – trupmeniniais ir neigiamais. Šitai padarius, gaunama racionaliųjų skaičių aibė Q.

Paprastai trupmeniniai ir neigiami skaičiai įvedami ne iš karto. Mokykloje iš pradžių imami vartoti trupmeniniai skaičiai (tiksliau teigiami trupmeniniai skaičiai: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{10}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ ir t.t.). Ėmus vartoti šiuos naujus skaičius, visada bus galima vieną natūrinį skaičių *padalyti* iš kito (arba netgi vieną trupmeninį skaičių iš kito). Po to skaičiai papildomi nuliu ir neigiamais racionaliaisiais skaičiais. Taip gaunama visų racionaliųjų skaičių aibė Q. Šioje aibėje visada galima atlikti keturis aritmetikos veiksmus (be dalijimo iš nulio) Kitaip tariant, kai a ir b – racionalieji skaičiai, bus apibrėžta jų suma $a+b$, skirtumas $a-b$, sandauga ab, o kai $b \neq 0$, ir dalmuo $\frac{a}{b}$.

Racionaliųjų skaičių aibę Q galima sudaryti ir kitaip. Iš pradžių prie natūrinių skaičių 1, 2, 3, ... pridedamas nulis ir *sveiki neigiami skaičiai* $-1,\ -2,\ -3, \ldots$ Gaunama visų *sveikųjų skaičių* $\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$ aibė Z. Iš šios aibės vieno skaičiaus visada galima *atimti* kitą skaičių. Tačiau dalyba ne visada galima, pavyzdžiui, negalėsime apskaičiuoti dalmens $(-2):3$, neperžengę visų sveikųjų skaičių aibės Z ribų. Kad būtų galima atlikti dalybos operaciją, prie sveikųjų skaičių pridedami trupmeniniai (ir teigiami, ir neigiami) ir gaunama visų racionaliųjų skaičių aibė Q. Bet kuris racionalusis skaičius išreiškiamas dviejų sveikųjų skaičių santykiu $\left(\text{pavyzdžiui, } -\frac{2}{3}=(-2):3,\ \frac{3}{2}=(-6):(-4),\ 0=0:(-5)\right)$.

Šie du racionaliųjų skaičių aibės Q sudarymo būdai skiriasi tuo, kad pirmuoju atveju iš pradžių stengiamės padaryti galimą dalybos operaciją, o tik po to atimame, o antruoju atveju iš pradžių stengiamės atlikti atimties veiksmą ir tik paskui dalybos. Kiekvienas šių būdų padeda mokiniams greitai išmokti atlikti veiksmus su racionaliaisiais skaičiais. Tačiau klausimo „*Kas yra racionalusis skaičius*?“ paprastai jie nekelia. O kai juos paklausiame (pavyzdžiui, per stojamuosius egzaminus į aukštąsias mokyklas), tai dažniausiai išgirstame tokį atsakymą (tikriausiai dėl antrojo racionaliųjų skaičių aibės sudarymo būdo įtakos):

Racionaliuoju vadinamas bet koks skaičius, išreikštas tam tikrų dviejų sveikųjų skaičių a, b dalmeniu $\frac{a}{b}$ (*čia* $b \neq 0$).

Paprastai (kai nėra geresnio) toks atsakymas laikomas teisingu. Tačiau jis turi esminių trūkumų. Iš tiesų, ką reiškia „bet koks skaičius“? Tikriausiai manoma, kad žinoma, kas tai yra „skaičius“ apskritai, be to, skaičių yra daug ir šiuo apibrėžimu iš jų išskiriami tie, kurie yra racionalieji. Taip suprantant šį apibrėžimą, turbūt paprasčiausia yra manyti, jog kalbama apie racionaliųjų skaičių išskyrimą iš visos realiųjų skaičių aibės. Kitaip tariant, anksčiau nurodytą apibrėžimą reikia suprasti taip: *bet koks realusis skaičius, išreikštas tam tikrų dviejų sveikųjų skaičių a, b dalmeniu* $\frac{a}{b}$ (*čia* $b \neq 0$), *vadinamas racionaliuoju.* Šioje formuluotėje aiškiai pasakyta, kuo racionalieji skaičiai skiriasi iš visų realiųjų skaičių aibės. Tačiau šios formuluotės laikyti racionaliųjų skaičių apibrėžimu negalima. Juk iš tikrųjų realiojo skaičiaus sąvoka yra sudėtingesnė, negu racionaliojo skaičiaus sąvoka. Realieji skaičiai imami vartoti tik po to, kai jau žinomi racionalieji skaičiai. Todėl racionaliųjų skaičių apibrėžimas, remiantis realiojo skaičiaus savoka, logikos požiūriu yra nekorektiškas – gaunamas užburtas samprotavimų ratas.

Suformuluotą racionaliojo skaičiaus „apibrėžimą“ galima pabandyti traktuoti kitaip: kol kas nežinome, kas yra racionalusis (juo labiau realusis) skaičius; žinome tik sveikuosius skaičius, o racionalųjį skaičių norime apibrėžti kaip dviejų sveikųjų skaičių dalmenį. Bet ir šis požiūris nenuoseklus. Juk, jeigu žinome tik sveikuosius skaičius, tai, pavyzdžiui,

dalmuo 2 : 3 neegzistuoja (sveikųjų skaičių aibėje); argi galima šį neegzistuojantį dalmenį *vadinti* racionaliuoju skaičiumi?

Taigi, nors anksčiau suformuluotas apibrėžimas laikomas tinkamu, visgi tenka pripažinti, kad iš tikrųjų *nėra* korektiško racionaliųjų skaičių apibrėžimo.

§ 2. Racionaliųjų skaičių aibės savybės

Kaip visgi galima tiksliai matematiškai apibūdinti racionaliųjų skaičių aibę Q? Padėtis čia šiek tiek primena padėtį geometrijoje. Geometrijos kurse taip pat nėra tokių pagrindinių sąvokų, kaip, pavyzdžiui, *taškas* arba *tiesė*, tikslių apibrėžimų. Sakoma, kad šviesos spindulys sudaro tiesės vaizdinį, bet tai, žinoma, tik vaizdus apibūdinimas, o ne matematinis apibrėžimas. Taigi, tiksliai tariant, „taško" ir „tiesės" sąvokos vartojamos *be apibrėžimo*. Tačiau pagrindines šių sąvokų *savybes* apibūdina geometrijos aksiomos. Pavyzdžiui, tokios aksiomos yra šios: „Per du taškus galima nubrėžti vieną ir tik vieną tiesę", „Per tašką, esantį šalia duotosios tiesės, galima nubrėžti (plokštumoje, kurioje yra šis taškas ir tiesė) vienintelę tiesę, nesikertančią su duotąja" ir kt. Tiesa, mokykloje nenagrinėjamos visos geometrijos aksiomos, bet tai reikalo esmės nekeičia: pirminės sąvokos (taškas, tiesė ir kt.) neapibrėžiamos, užtat aksiomose išvardijamos jų savybės (tai iš esmės yra netiesioginis taškų, tiesių ir kt. apibrėžimas). Remiantis aksiomose nurodytomis savybėmis, sudaromos visos kitos geometrijos išvados (teoremos).

Maždaug taip pat elgiamės ir su racionaliaisiais (arba realiaisiais) skaičiais. Kaip jau minėjome, racionalieji skaičiai mokyklos kurse tiksliai neapibrėžiami. Tačiau yra kitas (aksiominis) racionaliųjų skaičių aibės Q sudarymo būdas. Šiuo atveju tariama, kad žinoma, kas tai yra *natūrinis* skaičius, paskui be apibrėžimo imamas vartoti „racionaliojo skaičiaus" terminas ir formuluojamos racionaliųjų skaičių savybės (t.y. aksiomos, kuriomis iš esmės „netiesiogiai apibrėžiama" racionaliųjų skaičių aibė). Toliau išvardysime pagrindines racionaliųjų skaičių aibės savybes.

Visų racionaliųjų skaičių aibė Q turi šias keturias savybių grupes.

a) Bet kokiems dviem racionaliesiems skaičiams a ir b yra apibrėžta jų *suma* $a+b$. Sumavimo operacija (sudėtis) yra komutatyvi ir asociatyvi, t.y. su bet kuriais racionaliaisiais skaičiais a, b ir c yra teisingos lygybės

$$a+b=b+a, \quad (a+b)+c=a+(b+c).$$

Yra toks skaičius 0 (*nulis*), kad

$$a+0=a,$$

kai a – bet koks racionalusis skaičius. Pagaliau, kokie bebūtų racionalieji skaičiai a ir b, visada galima rasti, ir, be to, tik vieną, racionalųjį skaičių, kuris būtų lygties

$$b+x=a$$

šaknis; šis skaičius vadinamas skaičių a ir b *skirtumu* ir žymimas $a-b$, o pats veiksmas, kuriuo jį randame, vadinamas *atimtimi*. Skirtumas $0-a$ žymimas tiesiog $-a$.

b) Visi natūriniai skaičiai priklauso racionaliųjų skaičių aibei Q. Racionalieji skaičiai, išreiškiami dviejų natūrinių skaičių skirtumu, vadinami *sveikaisiais skaičiais*. (Toliau, p. 37, bus įrodyta, kad skaičiai 0, ± 1, ± 2, ± 3, ... ir tik jie yra sveikieji.)

c) Bet kokiems dviem racionaliesiems skaičiams a ir b yra apibrėžta *jų sandauga ab*. *Daugyba* (veiksmas, kuriuo apskaičiuojame sandaugą) yra komutatyvi, asociatyvi, distributyvi:

$$ab = ba,$$

$$(ab)\,c = a\,(bc),$$

$$a\,(b+c) = ab + ac.$$

Koks bebūtų racionalusis skaičius a, visada galioja lygybė $1 \cdot a = a$. Pagaliau, kokie bebūtų du racionalieji skaičiai a ir b, kai $b \neq 0$, visada galima rasti ir tik vieną racionalųjį skaičių, kuris yra lygties $bx = a$ šaknis; šis skaičius vadinamas skaičių a ir b *dalmeniu* ir žymimas $\frac{a}{b}$, o pats veiksmas, kuriuo jis apskaičiuojamas, vadinamas *dalyba*.

d) Bet koks racionalusis skaičius yra išreiškiamas dviejų sveikųjų skaičių a ir b dalmeniu $\frac{a}{b}$ (čia $b \neq 0$).

Galima įrodyti (tai jau ne vidurinės mokyklos programos klausimas), kad *šios keturios savybių grupės visiškai apibūdina visų racionaliųjų skaičių aibę Q*. Kitaip tariant, kai galioja šios savybės, tai visų racionaliųjų skaičių aibę Q galima laikyti apibrėžta (jei natūrinių skaičių savybės yra žinomos). Iš to išplaukia, kad bet kurį teiginį apie racionaliuosius skaičius galima sudaryti iš šių keturių savybių grupių.

Taigi į klausimą, kokie skaičiai vadinami racionaliaisiais, geriausia atsakyti, kad racionaliaisiais vadinami skaičiai, turintys keturias minėtas savybių grupes.

Vadinasi, atsakymas, kurį aptarėme § 1 (p. 33), yra nepilnas: jame atsispindi tik paskutinioji iš keturių minėtų savybių grupių. Ir visgi toks trumpas atsakymas paprastai laikomas teisingu, jeigu atsakantysis tikrai supranta, kad racionaliųjų skaičių aibėje galima atlikti keturis aritmetikos veiksmus, turinčius a), b) ir c) savybes.

Dar priminsime, kad visi racionalieji skaičiai skaidosi į tris skaičių tipus: teigiamus skaičius, nulį ir neigiamus skaičius. *Teigiamu* vadinamas tas racionalusis skaičius, kurį galima išreikšti dviejų natūrinių skaičių santykiu. Skaičius 0 – ne teigiamas skaičius. Visi kiti skaičiai (nelygūs nuliui ir ne teigiami) vadinami *neigiamais*. Be šių, dažnai vartojami terminai „neneigiamas skaičius“, „neteigiamas skaičius“. Skaičius a vadinamas *neneigiamu*, kai jis arba lygus nuliui, arba yra teigiamas. Skaičius a yra *neteigiamas* tik tada, kai jis arba lygus nuliui, arba yra neigiamas.

§ 3. Racionaliųjų skaičių savybių taikymo pavyzdžiai

Pademonstruosime, kaip, taikant minėtas keturias savybių grupes, įrodomos kitos racionaliųjų skaičių savybės.

1 pavyzdys. Įrodykite, kad $0.\ a=0$, kai a – bet koks racionalusis skaičius.

Sprendimas. Pritaikę a) ir c) savybes, turime

$$a=1\cdot a=(1+0)\cdot a=1\cdot a+0\cdot a=a+0\cdot a.$$

Vadinasi, skaičius $0\cdot a$ yra lygties $a=a+x$ šaknis. Bet skaičius 0 irgi yra šios lygties šaknis. Kadangi ši lygtis turi vienintelį sprendinį (a) savybė), tai $0\cdot a=0$.

2 pavyzdys. Jei dviejų racionaliųjų skaičių sandauga lygi nuliui, tai bent vienas jų lygus nuliui. Įrodykite.

Sprendimas. Tarkime, kad $ab=0$. Kai $a\neq 0$, tai egzistuoja dalmuo $\frac{1}{a}$ $\Big($t.y. skaičius, kuris yra lygties $a\cdot x=1$ šaknis, todėl jis tenkina sąlygą $a\cdot\frac{1}{a}=1\Big)$. Kadangi $ab=0$, tai, remdamiesi 1 pavyzdžiu, turime $\frac{1}{a}(ab)=\frac{1}{a}\cdot 0=0\cdot\frac{1}{a}=0$. Bet $\frac{1}{a}(ab)=$ $=\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\cdot b=\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)b=1\cdot b=b$. Vadinasi, $b=0$.

3 pavyzdys. Įrodykite, kad $a+(-a)=0$.

Sprendimas. Kaip rodo apibrėžimas, $-a=0-a$, o tai pagal atimties apibrėžimą reiškia, kad $a+(-a)=0$.

4 pavyzdys. Įrodykite, kad $(-1)\cdot(-1)=1$.

Sprendimas. Remdamiesi 1 ir 3 pavyzdžiais, gauname $(-1)\big(1+(-1)\big)=(-1)\cdot 0=0$. Kadangi sandauga turi distributyvumo savybę, tai pastarąją lygybę galima pertvarkyti taip: $(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)=0$ arba $(-1)+(-1)\cdot(-1)=0$. O tai reiškia, kad skaičius $(-1)\cdot(-1)$ yra lygties $(-1)+x=0$ šaknis. Bet skaičius 1 irgi yra šios lygties šaknis $\big($pagal 3 pavyzdį turime $1+(-1)=0$, todėl $(-1)+1=0\big)$. Kadangi ši lygtis turi vienintelę šaknį, tai $(-1)\cdot(-1)=1$.

5 pavyzdys. Įrodykite lygybes: $-a=(-1)\cdot a$, $-(-a)=a$.

Sprendimas. Turime $\big(1+(-1)\big)\cdot a=0\cdot a=0$, todėl $1.\ a+(-1).\ a=0$, arba $a+(-1)\cdot a=0$. Tai reiškia, kad $(-1)\cdot a$ yra lygties $a+x=0$ šaknis. Antra vertus, ši lygtis turi šaknį $-a$ (3 pavyzdys). Vadinasi, $-a=(-1)\,a$.

Toliau $-(-a)=(-1)(-a)=(-1)\big((-1)a\big)=\big(-1)(-1)\big)a=1\cdot a=$a (4 pavyzdžio rezultatas).

6 pavyzdys. Įrodykite, kad $a-b=a+(-b)$.

Sprendimas. Turime

$$b+\big(a+(-b)\big)=b+\big((-b)+a\big)=\big(b+(-b)\big)+a=0+a=a,$$

t.y. skaičius $a+(-b)$ yra lygties $b+x=a$ šaknis. Bet pagal apibrėžimą skaičius $a-b$ irgi yra šios lygties šaknis. Taigi $a-b=a+(-b)$.

7 pavyzdys. Įrodykite, kad trijų (arba daugiau) racionaliųjų skaičių sumą galima apskaičiuoti, sudedant dėmenis bet kuria tvarka, pavyzdžiui:

$$(a+b)+c=b+(c+a)=a+(c+b)\ \text{ir t.t.}$$

Sprendimas. Tai išplaukia iš sudėties komutatyvumo ir asociatyvumo. Pavyzdžiui, įrodysime lygybę $(a+b)+c=b+(c+a)$. Turime

$$(a+b)+c=(b+a)+c=b+(a+c)=b+(c+a).$$

Pastaba. Įrodžius lygybę, galima nenurodant sumavimo tvarkos, rašyti tiesiog $a+b+c$, t.y. apskaičiuoti trijų (arba daugiau) racionaliųjų skaičių sumą. Toliau, atsi-

Žvelgiant į 6 pavyzdžio rezultatą, galima ir algebrinės sumos dėmenis bet kuria tvarka keisti vietomis, pavyzdžiui:

$$(a-b)+c=(a+(-b))+c=a+(-b)+c=c+a+(-b)=(c+a)+(-b)=(c+a)-b.$$

Todėl algebrinę sumą irgi galima rašyti, nenurodant sumavimo tvarkos (t.y. be skliaustų), pavyzdžiui:

$$a-b+c=c+a-b \text{ ir t.t.}$$

8 pavyzdys. Įrodykite lygybes: $-(a+b)=-a-b$, $-(a-b)=b-a$.
Sprendimas

$$-(a+b)=(-1)\ (a+b)=(-1)\ a+(-1)\ b=(-a)+(-b)=(-a)-b=-a-b.$$

$$-(a-b)=(-1)\,(a-b)=(-1)\,(a+(-b))=(-1)\,(a+(-1)\,b)=(-1)\,a+$$

$$+(-1)\ ((-1)\,b)=(-1)\,a+((-1)\cdot(-1))\ b=(-a)+1\cdot b=(-a)+b=b+(-a)=b-a.$$

Pastaba. Dabar jau galima pagrįsti daugianarių sudėties ir atimties taisykles. Pavyzdžiui,

$$(a-b+c)+(m-n+q)=(a+(-b)+c)+(m+(-n)+q)=a+(-b)+$$

$$+c+m+(-n)+q=a-b+c+m-n+q,\ (a-b+c)-(m-n+q)=$$

$$=(a-b+c)+(-(m-n+q))=(a-b+c)+(-m+n-q)=a-b+c-m+n-q.$$

Taigi sudedant ir atimant daugianarius, reikia pagal įprastą ženklų taisyklę tik atskliausti skliaustus.

9 pavyzdys. Įrodykite, kad $a\,(b-c)=ab-ac$.
Sprendimas

$$a\,(b-c)=a\,(b+(-c))=a\,(b+(-1)\,c)=ab+a\,((-1)\,c)=ab+a.$$

$$(c\,(-1))=ab+(ac)\,(-1)=ab+(-1)\,(ac)=ab+(-(ac))=ab-ac.$$

Pastaba. Tik ką įrodytoji lygybė kartu su lygybe $a\,(b+c)=ab+ac$, išreiškiančia distributyvumo dėsnį, apibrėžia vienanario dauginimo iš daugianario taisyklę. Pavyzdžiui,

$$a\,(m-n+p)=am-an+ap.$$

Du kartus pritaikę šią taisyklę, gauname įprastą daugianario dauginimo iš daugianario taisyklę. Iš pastarosios išplaukia ir visos sutrumpintos daugybos formulės.

10 pavyzdys. Įrodykite, kad bet koks sveikasis skaičius, nelygus nuliui, yra arba natūrinis skaičius n, arba jam priešingas $-n$.

Sprendimas. Tarkime, kad a – sveikasis skaičius, nelygus nuliui. Pagal apibrėžimą $a=k-l$; čia k ir l – natūriniai skaičiai (b) savybė). Be to, $k\neq l$, nes $a\neq 0$. Du skirtingi natūriniai skaičiai k ir l tenkina vieną iš dviejų sąryšių $k>l$ arba $k<l$ (natūrinių skaičių savybės žinomos). Kai $k>l$, tai $a=k-l$ yra natūrinis skaičius. Dabar tarkime, kad $k<l$. Tada skaičius $-a=-(k-l)=l-k$ yra natūrinis; jį pažymėsime n, tada $-a=n$. Taigi $a=-(-a)=-n$.

11 pavyzdys. Įrodykite trupmenų sudėties taisyklę.

Sprendimas. Sakykime, kad $p=\frac{a}{b}$ ir $q=\frac{c}{d}$ – du racionalieji skaičiai. Čia a, b, c, d – sveikieji skaičiai, be to, $b\neq 0$, $d\neq 0$. Pagal apibrėžimą iš $p=\frac{a}{b}$ išplaukia $a=bp$; lygiai taip pat $c=dq$. Vadinasi, $ad=bp\cdot d=bdp$; $bc=b\cdot dq=bdq$. Randame

$ad+bc=bdp+bdq=bd\ (p+q)$. Kadangi $bd \neq 0$ (2 pavyzdys), tai iš lygybės $ad+bc=bd\ (p+q)$ išplaukia

$$p+q=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Taigi įrodėme trupmenų sudėties taisyklę:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Analogiškai įrodomos trupmenų dauginimo ir prastinimo taisyklės.

12 pavyzdys. Įrodykite, kad dviejų teigiamų racionaliųjų skaičių suma ir sandauga yra teigiami skaičiai.

Sprendimas. Tarkime, kad p ir q – teigiami racionalieji skaičiai. Tada juos galima išreikšti trupmenomis: $p=\frac{a}{b}$, $q=\frac{c}{d}$, čia a, b, c, d – natūriniai skaičiai. Turime

$$p+q=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Aišku, kad šios trupmenos skaitiklis ir vardiklis yra natūriniai skaičiai. Todėl skaičius $p+q$, kuris lygus dviejų natūrinių skaičių dalmeniui, yra teigiamas skaičius. Panašiai įrodoma, kad pq – teigiamas skaičius.

Išnagrinėti pavyzdžiai įtikinamai įrodo, kad visos racionaliųjų skaičių savybės tikrai gali būti išvestos iš minėtų keturių savybių a), b), c), d) grupių.

§ 4. Kodėl išplečiama racionaliųjų skaičių aibė

Visų racionaliųjų skaičių aibė Q turi labai gerų savybių, ir aritmetikos tikslams šios aibės visiškai pakanka. Kadangi racionaliųjų skaičių aibėje galima atlikti keturis aritmetikos veiksmus, tai šios aibės rėmuose galima spręsti pirmojo laipsnio lygtis ir sistemas, taigi ir labai daug uždavinių. Ir visgi vien tik racionaliųjų skaičių nepakanka. Be jų dar reikia naujų skaičių, kurie vadinami *iracionaliaisiais*. Racionalieji ir iracionalieji skaičiai, paimti kartu, vadinami *realiaisiais skaičiais*.

Prieš pradėdami nagrinėti realiųjų skaičių aibę R, priminsime tas (ir algebrines, ir geometrines) priežastis, dėl kurių reikia naujų, iracionaliųjų skaičių. Algebrai prireikė naujų skaičių dėl to, kad kvadratinės ir aukštesniųjų laipsnių lygtys su racionaliaisiais (ir netgi sveikaisiais) koeficientais ne visada išsprendžiamos racionaliųjų skaičių aibėje. Norint išspręsti netgi tokias paprastas lygtis, kaip $x^2=a$, $x^3=a$ ir t.t. (a – teigiamas racionalusis skaičius), reikia naujų, iracionaliųjų skaičių, nes ne iš kiekvieno teigiamo racionaliojo skaičiaus pavyksta ištraukti šaknis (kvadratines, kubines ir kt.). Mokykliniuose algebros vadovėliuose įrodyta, kad skaičius $\sqrt{2}$, kuris yra teigiama lygties $x^2=2$ šaknis, yra iracionalusis, arba, tiksliau tariant, nėra tokio racionaliojo skaičiaus, kurio kvadratas lygus 2. Taigi, norint ištraukti šaknį (aritmetinę), kartais prireikia iracionaliųjų skaičių.

Tai, ką aptarėme, yra vienos gana paplitusios klaidos priežastis: dažnai stojantieji sako, kad „iracionaliaisiais skaičiais vadinami skaičiai, išreikšti $\sqrt{n}$; čia n – natūrinis skaičius, kuris nėra tikslus tam tikro skaičiaus kvadratas“. Kodėl toks apibrėžimas klaidingas? Jeigu natūrinis skaičius n nėra

tikslus kito skaičiaus kvadratas, tai $\sqrt{n}$ yra iracionalusis skaičius. Tačiau anaiptol **ne visi** iracionalieji skaičiai yra tokie (arba yra algebrinių lygčių su racionaliaisiais koeficientais šaknys). Norint teisingai atsakyti į šį klausimą, iš pradžių reikia apibūdinti visų realiųjų skaičių aibę R; po to iracionaliuosius skaičius galima taip apibrėžti: iracionaliaisiais vadinami tie realieji skaičiai, kurie nėra racionalieji, t.y. tie, kurie neišreiškiami dviejų sveikųjų skaičių santykiu.

Prieš apibūdindami visų realiųjų skaičių aibę R, nurodysime **geometrines** priežastis, dėl kurių prireikė iracionaliųjų skaičių. Pagrindinė geometrinė priežastis yra ta, kad racionaliųjų skaičių **nepakanka** atkarpoms matuoti. Priminsime, kad apibūdinamas atkarpos matavimo rezultatas (jos ilgis).

Tarkime, kad matavimo vienetu yra laikoma tam tikra atkarpa MN. Tada kiekvieną atkarpą AB atitinka skaičius $|AB|$ – jos ilgis. Atkarpos ilgis turi šias savybes:

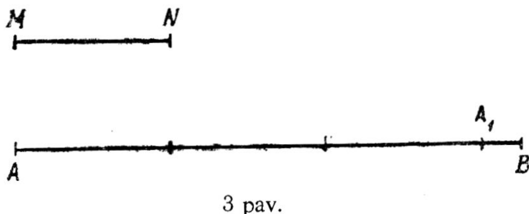
1) bet kokios atkarpos ilgis išreiškiamas teigiamu skaičiumi;

2) lygių atkarpų ilgiai vienodi;

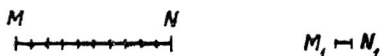
3) kai taškas C yra atkarpoje AB, tai atkarpos AB ilgis lygus atkarpų AC ir BC ilgių sumai;

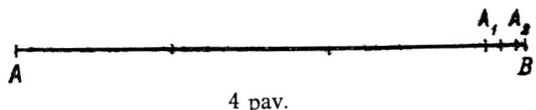
4) atkarpos MN ilgis lygus 1.

Atkarpos AB ilgį randame *matuodami*. Priminsime matavimo proceso esmę. Iš pradžių atkarpoje AB atidedame ilgio vienetą MN (3 pav.). Tarkime, kad atkarpoje AB jis tilpo tris kartus, ir dar liko liekana A_1B, mažesnė už MN. Tada imame atkarpos MN **dešimtąją** dalį M_1N_1 ir šią atkarpą atidedame atkarpoje A_1B. Tarkime, kad ši matavimo vieneto dešimtoji dalis atkarpoje A_1B tilpo du kartus, ir dar liko liekana A_2B, mažesnė už M_1N_1 (4 pav.). Šioje atkarpoje A_2B atidedame matavimo vieneto **šimtąją dalį**. Sakykime, kad ji tilpo 5 kartus, ir t.t.



3 pav.





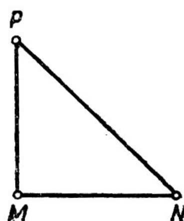
4 pav.

Dabar galima pasakyti, kad atkarpoje AB tilpo 3 sveiki matavimo vienetai ir dar 2 dešimtosios, ir dar 5 šimtosios dalys... Taigi atkarpos AB ilgis yra išreiškiamas dešimtaine trupmena 3,25... Apskritai ši dešimtainė trupmena bus begalinė, nes po kiekvieno matavimo gali likti liekana. Todėl galimas atvejis, kad matavimo proceso taip ir nebaigsime. Taigi atkarpos AB ilgis a bus išreikštas begaline dešimtaine trupmena

$$a=3{,}25\ldots$$

Prisiminsime iš aritmetikos, kad bet koks teigiamas racionalusis skaičius (t.y. dviejų natūrinių skaičių santykis) yra išreiškiamas dešimtaine trupmena – baigtine arba begaline periodine. Vadinasi, jeigu bet kurios atkarpos ilgis būtų išreiškiamas racionaliuoju skaičiumi, tai matuodami gautume tik baigtines arba begalines periodines dešimtaines trupmenas. Pavyzdžiui, kai atkarpa AB lygi matavimo vieneto MN ketvirčiui, tai jos ilgis išreiškiamas baigtine dešimtaine trupmena 0,25. Kai atkarpa AB lygi matavimo vieneto MN trečdaliui, tai jos ilgis išreiškiamas dešimtaine begaline periodine trupmena 0,3333... Tačiau lengva suvokti, kad yra tokių atkarpų, kurių ilgis neišreiškiamas baigtine arba begaline periodine dešimtaine trupmena.

Tarkime, pavyzdžiui, kad NP – stačiojo lygiašonio trikampio įžambinė, o matavimo vienetas MN – jo statinys (5 pav.). Pagal Pitagoro teoremą atkarpos NP ilgis lygus $\sqrt{2}$, ir, vadinasi, jos ilgis neišreiškiamas racionaliuoju skaičiumi. Savo ruožtu tai reiškia, kad, matuodami atkarpą NP, gausime dešimtainę trupmeną, kuri nebus nei baigtinė, nei begalinė periodinė, t.y. gausime *begalinę neperiodinę dešimtainę trupmeną*. Taigi geometrijoje yra klausimų, kuriems išspręsti nepakanka racionaliųjų skaičių. Dėl to irgi prireikė naujų, iracionaliųjų skaičių. Dar vienas gerai žinomas iracionaliojo skaičiaus pavyzdys – skaičius π (jo iracionalumo įrodymas sudėtingas, ir čia jo nenagrinėsime).



5 pav.

Visa tai, ką aptarėme, padėjo sudaryti gerai žinomą iracionaliojo skaičiaus „apibrėžimą“, kuris iš pirmo žvilgsnio atrodo paprastas ir suprantamas, bet iš tikrųjų matematiškai nėra korektiškas. Žinome, kad bet kuris racionalus skaičius yra išreiškiamas baigtine arba begaline periodine dešimtaine trupmena ir, atvirkščiai, kiekviena tokia trupmena išreiškia tam tikrą racionalųjį skaičių. Todėl skaičius bus iracionalusis tada ir tik tada, kai jis išreiškiamas begaline neperiodine dešimtaine trupmena. Šią savybę įprasta laikyti iracionaliojo skaičiaus apibrėžimu, t.y. *iracionaliuoju vadinamas skaičius, kuris išreiškiamas begaline neperiodine dešimtaine trupmena.*

Kodėl toks apibrėžimas nekorektiškas? Pirmiausia, jis yra nepilnas, nes apibūdina tik realiojo skaičiaus išraišką, bet nieko nepasako apie veiksmus su tokiais skaičiais. Juk nepakanka pasakyti, kaip užrašomi realieji skaičiai, dar reikia apibrėžti jų sudėtį ir daugybą, o pagal minėtą apibrėžimą atlikti šiuos veiksmus ne taip jau paprasta. Prisiminkite, kiek daug reikia dirbti, dauginant „stulpeliu“ du daugiaženklius skaičius, o ką jau bekalbėti apie dviejų begalinių (ir dar neperiodinių) dešimtainių trupmenų daugybą. Šiaip ar taip realiųjų skaičių sudėties ir daugybos operacijos turi būti aiškiai apibrėžtos, o to nėra minėtame apibrėžime.

Reikia pasakyti, kad iš principo realųjį skaičių galima apibrėžti kaip begalinę dešimtainę trupmeną, bet toks apibrėžimas turi apibūdinti ir *veiksmus* su begalinėmis trupmenomis. Toks realiųjų skaičių teorijos sudarymo metodas yra sudėtingas ir mokykloje detaliai nenagrinėjamas. Todėl pademonstruosime kitą būdą: realiųjų skaičių aibę apibūdinsime

pagal jos savybes (panašiai kaip padarėme, apibrėždami racionaliuosius skaičius) ir tik po to išsiaiškinsime, ką reiškia realiojo skaičiaus užrašas begaline dešimtaine trupmena.

Baigdami šį paragrafą, išnagrinėsime du pavyzdžius.

13 pavyzdys. Įrodykite, kad skaičius 0,123456789101112..., kuriame po kablelio iš eilės parašyti visi natūriniai skaičiai, nėra racionalusis (t.y ši trupmena – neperiodinė).

Sprendimas. Tarkime priešingai, kad ši trupmena yra periodinė, o jos periodas turi k ženklų, t.y., pradedant nuo tam tikros vietos, šioje trupmenoje kartojasi viena tokia pat k skaitmenų seka. Kažkur toliau būtinai bus iš eilės k nulių (nes natūrinių skaičių aibėje yra skaičiai 10^k, 10^{k+1}, 10^{k+2}, ...), todėl iš trupmenos periodiškumo išplauktų, kad jos periodas sudarytas tik iš nulių, o tai reikštų, jog ši dešimtainė trupmena yra baigtinė. Bet tai aiškiai prieštarauja šios trupmenos sudarymo būdui. Gautas prieštaravimas ir įrodo reikiamą teiginį.

14 pavyzdys. Įrodykite, kad skaičius $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ yra iracionalusis.

Sprendimas. Tarkime priešingai, kad skaičius $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$; čia $r=$ tam tikras racionalusis skaičius. Suprantama, kad skaičius r nelygus nuliui. Tada $\sqrt{3}=r-\sqrt{2}$. Pakėlę šią lygybę kvadratu, gauname $3=r^2-2r\sqrt{2}+2$, arba

$$\sqrt{2}=\frac{r^2-1}{2r}$$

(priminsime, kad $r\neq 0$). Bet skaičius, esantis lygybės dešinėje pusėje, yra racionalusis, nes r – racionalusis. Vadinasi, $\sqrt{2}$ – racionalusis skaičius. Gautas prieštaravimas įrodo reikiamą teiginį.

§ 5. Monotoninės aprėžtos sekos riba

Taigi realiųjų skaičių aibės kol kas dar neapibūdinome. Iš geometrinių samprotavimų paaiškėjo, kad reikia sugebėti skaičius, kuriuos ketiname apibrėžti (realiuosius skaičius), išreikšti begalinėmis dešimtainėmis trupmenomis. Tokia skaičių išraiška vartojama ir algebroje. Pavyzdžiui, rašoma

$$\sqrt{2}=1{,}41421\ \ldots$$

Kokia šio užrašo prasmė? Ką reiškia skaitmenų po kablelio begalinė aibė? Į šį klausimą atsako *skaičių seka*

$$a_1=1{,}4;\ a_2=1{,}41;\ a_3=1{,}414;$$
$$a_4=1{,}4142;\ a_5=1{,}41421;\ \ldots,$$

kurią gausime, kai po kablelio paliksime vieną, du ir t.t. skaitmenis. Visi šie skaičiai a_1, a_2, a_3, ... yra *racionalieji*, nes jie išreiškiami baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis ir sudaro *nemažėjančią seką*[1]:

$$a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant a_4\leqslant a_5\leqslant\ \ldots$$

[1] Nors pirmieji šios sekos nariai tenkina griežtas nelygybes $a_1<a_2<a_3<a_4\ \ldots$, bet teigti, kad seka yra didėjanti, negalima. Iš tikrųjų, jeigu k-tasis skaitmuo po kablelio bus lygus 0, tai $a_{k-1}=a_k$ (o ne $a_{k-1}<a_k$).

Be to, ši seka yra *aprėžta*, nes kiekviename skaičiuje a_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ prieš kablelį yra skaitmuo 1, todėl

$$1<a_n<2 \text{ (su bet kuriuo } n=1, 2, 3, \ldots).$$

Galiausiai šios sekos skaičiai, kai n didėja, vis labiau artėja prie skaičiaus $\sqrt{2}$. Tai reiškia, kad, pradedant tam tikru n, kiekvienas iš skaičių a_n nuo $\sqrt{2}$ tesiskiria dydžiu, mažesniu už $\frac{1}{1000}$ (lengva suvokti, kad taip bus, kai $n>3$). Imdami sekos narius su didesniais numeriais, rasime tokį n, kuriuo pradedant, visi a_n nuo $\sqrt{2}$ tesiskirs dydžiu, mažesniu už $\frac{1}{10\,000\,000}$, ir t.t. Apskritai kokį teigiamą skaičių ε beimtume $\left(\frac{1}{1000}, \frac{1}{10\,000\,000}\right.$ arba bet kurį kitą), rastume tokį sekos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ skaičių a_{n_0}, kuriuo pradedant, kiekvienas a_n skirtųsi nuo $\sqrt{2}$ dydžiu, mažesniu už ε:

$$-\varepsilon<\sqrt{2}-a_n<\varepsilon,$$

kai $n>n_0$ (šiuo atveju galima parašyti netgi nelygybę $0<\sqrt{2}-a_n<\varepsilon$). Tai užrašoma taip:

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\sqrt{2}.$$

Sakoma, kad $\sqrt{2}$ yra sekos $\{a_n\}$ *riba*.

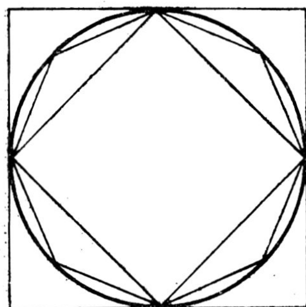
Kitas didėjančios ir aprėžtos sekos pavyzdys žinomas iš geometrijos. Išnagrinėsime apskritimą, kurio spindulys lygus 1 (6 pav.). Įbrėžtinio kvadrato perimetrą pažymėsime p_2, įbrėžtinio taisyklingojo aštuoniakampio perimetrą $-p_3, \ldots$, įbrėžtinio taisyklingojo 2^n-kampio perimetrą $-p_n, \ldots$ Taigi gausime seką $p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$, kuri yra didėjanti ir aprėžta:

$$p_2<p_3< \ldots <p_n< \ldots,$$

$$0<p_n<8$$

(pastaroji nelygybė yra teisinga, nes bet kurio įbrėžtinio daugiakampio perimetras ne didesnis už apibrėžtinio kvadrato perimetrą, 6 pav.). Ši didėjanti ir aprėžta seka $\{p_n\}$ irgi turi ribą: jos riba lygi apskritimo ilgiui, t.y.

$$\lim_{n\to\infty} p_n=2\pi.$$



6 pav.

Galima sudaryti ir nedidėjančių aprėžtų sekų pavyzdžių. Pavyzdžiui, išnagrinėsime skaičiaus $\sqrt{2}$ artinius su *pertekliumi*: $b_1=1{,}5$; $b_2=1{,}42$; $b_3=1{,}415$; $b_4=1{,}4143$; $b_5=1{,}41422$; ...

Seka $\{b_n\}$ yra nedidėjanti ir aprėžta:

$$b_1\geqslant b_2\geqslant b_3\geqslant b_4\geqslant b_5\geqslant \ldots,$$

$$1<b_n<2.$$

Jos riba yra skaičius $\sqrt{2}$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2}.$$

Paskutinis pavyzdys – skaičių seka

$$c_1 = 1{,}1;\ c_2 = 1{,}01;\ c_3 = 1{,}001;\ c_4 = 1{,}0001;\ \ldots;$$

$$c_n = 1 + \frac{1}{10^n};\ \ldots$$

Aišku, kad ši seka yra mažėjanti, o jos riba lygi 1:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 1.$$

Išnagrinėtų keturių pavyzdžių sekų nariai buvo racionalieji skaičiai (jie išreiškiami baigtinėmis dešimtainėmis trupmenomis). Bet pirmųjų trijų pavyzdžių sekų *riba* buvo iracionalieji skaičiai, o paskutinio – racionalusis.

Ką galėtume pasakyti apie šias sekas, jeigu apsiribotume tik racionaliaisiais skaičiais (nežinodami arba nenorėdami žinoti, kad yra iracionalieji skaičiai)? Turėtume pasakyti, kad pirmosios trys sekos *ribos neturi*, o ketvirtoji seka turi ribą, lygią 1. Iš tikrųjų *racionaliojo* skaičiaus, prie kurio artėtų skaičiai $a_1, a_2, a_3, \ldots$, nėra (jie artėja prie $\sqrt{2}$, bet šis skaičius nėra racionalusis). Vadinasi, pirmoji seka vien tik racionaliųjų skaičių aibėje ribos neturi.

Taigi racionaliųjų skaičių aibėje ne kiekviena monotoninė (t.y. nedidėjanti arba nemažėjanti) aprėžta seka turi ribą. Norint, kad *kiekviena* monotoninė aprėžta seka turėtų ribą, reikia prie racionaliųjų skaičių prijungti naujus, iracionaliuosius.

Šie samprotavimai ir yra paskutinioji grandis, kurios trūko realiųjų skaičių aibės visoms pagrindinėms savybėms apibūdinti.

Norėdami išvengti nesusipratimų, pabrėšime, kad šiame paragrafe paaiškinta tik tai, ko reikės tolesniam nagrinėjimui. Visi samprotavimai yra įvadiniai ir jokiu būdu jų negalima laikyti įrodymu, kad bet kuri monotoninė aprėžta seka realiųjų skaičių aibėje turi ribą.

§ 6. Realiųjų skaičių aibės savybės

Dabar turime viską, kas būtina realiųjų skaičių aibei detaliai apibūdinti. Kaip ir racionaliųjų skaičių atveju, išvardiję pagrindines realiųjų skaičių aibės savybes (aksiomas), „netiesiogiai“ apibrėšime šią aibę. Kalbant apytiksliai, realiųjų skaičių aibė R algebriniu požiūriu sudaryta taip pat, kaip ir racionaliųjų skaičių aibė Q. Tačiau realiųjų skaičių yra daugiau – tiek daugiau, kad kiekviena monotoninė aprėžta seka aibėje R turi ribą. Tiksliau tariant, visai realiųjų skaičių aibei R būdingos šios penkios savybių grupės.

A) Aibei R priklauso visi racionalieji skaičiai (vadinasi, ir visi sveikieji skaičiai, būtent, ir skaičiai 0 bei 1).

B) Bet kuriems dviem realiesiems skaičiams a, b yra apibrėžta jų suma $a+b$. Sumavimo operacija (sudėtis) komutatyvi ir asociatyvi, t.y. su bet kuriais realiaisiais skaičiais a, b, c teisingos lygybės

$$a+b=b+a,$$

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

Toliau $a+0=a$, kai a – bet koks realusis skaičius. Galiausiai, kokie bebūtų du realieji skaičiai a ir b, visada galima rasti (ir tik vieną) realųjį skaičių, kuris yra lygties $b+x=a$ šaknis; šis skaičius vadinamas skaičių a ir b *skirtumu* ir žymimas $a-b$, o pats veiksmas, kuriuo jį randame, vadinamas *atimtimi*. Skirtumas $0-a$ žymimas tiesiog $-a$.

C) Bet kokiems dviem realiesiems skaičiams a, b yra apibrėžta jų *sandauga* ab. *Daugyba* (veiksmas, kuriuo apskaičiuojame sandaugą) komutatyvi, asociatyvi, distributyvi:

$$ab=ba,$$

$$(ab)\,c=a\,(bc),$$

$$a\,(b+c)=ab+ac.$$

Koks bebūtų realusis skaičius a, visada $1\cdot a=a$. Pagaliau, kokie bebūtų du realieji skaičiai a, b, kai $b\neq 0$, visada galima rasti (ir tik vieną) realųjį skaičių, kuris yra lygties $bx=a$ šaknis; šis skaičius vadinamas skaičių a ir b *dalmeniu* ir žymimas $\frac{a}{b}$, o pats veiksmas, kuriuo jį apskaičiuojame, vadinamas *dalyba*.

D) Kaip ir racionalieji skaičiai, visi nelygūs nuliui realieji skaičiai skirstomi į *teigiamuosius* ir *neigiamuosius*. Be to, teigiamųjų skaičių suma ir sandauga vėl yra teigiamas skaičius. Dėl to aibėje R galima apibrėžti nelygybės sąvoką: pagal apibrėžimą $a>b$ (arba $b<a$), jeigu skaičius $a-b$ yra teigiamas. Toliau, kai a – neigiamas, tai $-a$ – teigiamas. Pagaliau, koks bebūtų teigiamas realusis skaičius a, visada galima rasti tokį teigiamą racionalųjį skaičių r, kad $r<a$.

E) Kiekviena aibėje R aprėžta monotoninė seka turi ribą[1].

Tuo ir baigiama apibūdinti realiųjų skaičių aibės savybes. Kitaip tariant, savybių A), B), C), E) galiojimą galima laikyti visų realiųjų skaičių aibės R apibrėžimu. Bet kurį teiginį apie realiuosius skaičius galima gauti iš šių penkių savybių grupių.

Pavyzdžiui, iš B) ir C) savybių išplaukia (kaip ir racionaliųjų skaičių atveju, žr. 1–9 pavyzdžius, p. 36, 37) įprastos veiksmų su realiaisiais skaičiais taisyklės: algebrinės sumos dėmenų galėjimas bet kaip keisti vietomis, daugianarių sudėties, atimties, daugybos taisyklės, sutrumpintos daugybos

[1] Dar kartą akcentuojame, kad čia išvardytos tik realiųjų skaičių aibės savybės. Pasirinkus tokį aksiominį realiųjų skaičių aibės apibūdinimą, negalima reikalauti šių savybių „įrodymo" (pavyzdžiui, savybės E), teigiančios, kad aprėžta monotoninė seka turi ribą). Teisingiau kelti klausimą: ar egzistuoja realiųjų skaičių aibė, t.y. skaičių aibė, turinti visas minėtas savybes? Matematika teigiamai atsako į šį klausimą, bet tai toli peržengia vidurinės mokyklos matematikos ribas.

formulės bei kitos tapačiųjų pertvarkymų taisyklės. Visos šios taisyklės išplaukia tik iš B) ir C) savybių.

Matematikoje *skaičių lauku* vadinama bet kokia skaičių aibė, turinti B) ir C) savybes. Taigi visų realiųjų skaičių aibė R yra laukas. Jis taip ir vadinamas: *realiųjų skaičių laukas*. Kitas lauko pavyzdys gali būti visų racionaliųjų skaičių aibė (žr. a) ir c) savybes, p. 34 ,35). Todėl ši aibė vadinama *racionaliųjų skaičių lauku*. Dar vienas lauko pavyzdys – *kompleksinių skaičių laukas* – nagrinėjamas ketvirtajame skyriuje. Bet kokiame lauke tapatieji pertvarkymai atliekami pagal įprastas taisykles (šių taisyklių tinkamumas išplaukia iš aksiomų, tokių, kaip B) ir C), kurios pagal apibrėžimą galioja bet kokiame lauke).

Dabar grįšime prie realiųjų skaičių išreiškimo begalinėmis dešimtainėmis trupmenomis. Imkime kokią nors begalinę dešimtainę trupmeną

$$0{,}123456789101112\ldots$$

(13 pavyzdys, p. 41). Pabandykime suprasti, ar ši trupmena reiškia kokį nors realųjį skaičių ir kokį būtent. Dėl to išnagrinėsime racionaliųjų skaičių seką

$$q_1=0{,}1;\ q_2=0{,}12;\ q_3=0{,}123;\ \ldots;\ q_{13}=0{,}1234567891011;\ \ldots,$$

kurios narius gauname, parašytoje begalinėje trupmenoje palikdami po kablelio 1, 2 ir t.t. skaitmenis. Šie skaičiai sudaro, be abejo, aprėžtą nemažėjančią seką. Pagal E) savybę egzistuoja šios sekos riba, kurią pažymėsime α:

$$\alpha=\lim_{n\to\infty} q_n.$$

Sakoma, kad skaičius α yra *išreiškiamas* minėtąja begaline dešimtaine trupmena.

Taip pat samprotaudami, galėtume parodyti, kad *bet kokia begalinė dešimtainė trupmena išreiškia tam tikrą realųjį skaičių*. (Be to, bet koks realusis skaičius gali būti išreikštas begaline dešimtaine trupmena.)

Dabar aišku, kad atkarpoms matuoti tikrai pakanka realiųjų skaičių. Kaip jau buvo aiškinta 39 puslapyje, matuodami atkarpą, gauname begalinę dešimtainę trupmeną, o kiekviena tokia trupmena išreiškia tam tikrą realųjį skaičių.

15 pavyzdys. Apskaičiuokite begalinės dešimtainės trupmenos, išreiškiančios skaičių $\sqrt[3]{3}$, keletą dešimtainių ženklų.

Sprendimas. Kadangi $1^3<3$, o $2^3>3$, tai $1<\sqrt[3]{3}<2$, t. y. $\sqrt[3]{3}=$ $=1,\ \ldots$ Dabar panagrinėsime skaičius

$$1{,}0;\ 1{,}1;\ 1{,}2;\ \ldots;\ 1{,}9;\ 2{,}0.$$

Pakėlę šiuos skaičius kubu, bandymais nustatome, kad

$$1{,}4^3=2{,}744<3,\ 1{,}5^3=3{,}375>3.$$

Vadinasi, $\sqrt[3]{3}=1{,}4\ \ldots$ Dabar bandome skaičius

$$1{,}40;\ 1{,}41;\ 1{,}42;\ \ldots;\ 1{,}49;\ 1{,}50.$$

Pakėlę kubu, gauname

$$1{,}44^3=2{,}985984<3, 1{,}45^3=3{,}048625>3.$$

Vadinasi, $\sqrt[3]{3}=1{,}44\ldots$ Panašiai galima rasti ir kitus ženklus. (Beje, yra gerokai tobulesnių šaknų skaičiavimo metodų.)

16 pavyzdys. Įrodykite, kad tarp bet kokių dviejų skirtingų realiųjų skaičių yra racionalusis skaičius.

Sprendimas. Sakykime, kad α ir β – du realieji skaičiai, $\alpha\neq\beta$. Apibrėžtumo dėlei tarsime, kad skaičiai α ir β teigiami, be to, $\alpha<\beta$ (kiti atvejai nagrinėjami analogiškai), t.y. $\alpha>0$, $\beta-\alpha>0$. Kadangi skaičius $\frac{1}{\alpha}$ teigiamas, tai, remiantis D) savybe, galima rasti tokį teigiamą racionalųjį skaičių r', kad $r'<\frac{1}{\alpha}$. Taip pat galėtume rasti teigiamą racionalųjį skaičių r'' tenkinantį nelygybę $r''<\beta-\alpha$. Galima parašyti $r'=\frac{m}{n}$, $r''=\frac{p}{q}$; čia m, n, p, q – natūriniai skaičiai. Tada $\frac{1}{n}\leqslant r'$, todėl $\frac{1}{n}<\frac{1}{\alpha}$, t.y. $\alpha<n$ (čia pritaikėme įprastas nelygybių savybes; detaliai nelygybės nagrinėjamos trečiajame skyriuje). Lygiai taip pat $\frac{1}{q}\leqslant r''$, ir todėl $\frac{1}{q}<\beta-\alpha$. Dabar išnagrinėsime skaičius $0, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{nq}{q}=n$. Pirmasis skaičius mažesnis už α, o paskutinis didesnis už α (t.y. $0<\alpha, n>\alpha$). Vadinasi, galima rasti tokį natūrinį skaičių k, kad $\frac{k-1}{q}\leqslant\alpha<\frac{k}{q}$. Iš to išplaukia, jog $\frac{k}{q}-\alpha\leqslant\frac{k}{q}-\frac{k-1}{q}=\frac{1}{q}<\beta-\alpha$, todėl $\frac{k}{q}<\beta$. Taigi $\alpha<\frac{k}{q}<\beta$, t.y. $\frac{k}{q}$ – ieškomasis racionalusis skaičius, kuris yra tarp α ir β.

§ 7. Absoliutinis didumas

Apibrėžimas. *Realiojo skaičiaus a absoliutiniu didumu (moduliu) $|a|$ vadinamas skaičius a, kai a yra teigiamas arba nulis, ir skaičius $-a$, kai a yra neigiamas.*

Kitaip tariant,

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{kai } a\geqslant 0,\\ -a, & \text{kai } a<0.\end{cases}$$

Kai skaičius a yra teigiamas, tai pagal D) savybę skaičius $-a$ yra neigiamas, t.y. $-a<0<a$. Taigi $-a<a$. Šiuo atveju $|a|=a$, t.y. $|a|$ sutampa su didesniu iš dviejų skaičių a ir $-a$. Nesunku patikrinti, kad ir tuo atveju, kai a yra neigiamas, skaičius $|a|$ sutampa su didesniuoju iš skaičių a, $-a$. Vadinasi, absoliutinį didumą galima ir kitaip apibrėžti.

Realiojo skaičiaus $a\neq 0$ absoliutiniu didumu vadinamas didesnis iš dviejų skaičių a, $-a$.

Iš antrojo apibrėžimo tiesiogiai išplaukia, kad $|-a|=|a|$. Analogiškai iš šio apibrėžimo išplaukia, kad kiekvienas realusis skaičius a tenkina nelygybes

$$a \leqslant |a|, \quad -a \leqslant |a|.$$

Padauginę antrąją nelygybę iš -1 (tada nelygybės ženklas keičiamas priešingu), gauname tokias dvi nelygybes:

$$a \leqslant |a|, \quad a \geqslant -|a|,$$

teisingas su kiekviena realiąja a reikšme. Sujungę šias nelygybes į vieną „grandinėlę", gauname

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|.$$

Yra dar trečias absoliutinio didumo apibrėžimas (aišku, ekvivalentus ankstesniems), kurį kartais patogu naudoti. Absoliutinį didumą galima apibrėžti formule

$$|a|=\sqrt{a^2}.$$

Šios lygybės dešinėje pusėje imama aritmetinė šaknis (t.y. teigiamoji šaknies reikšmė).

17 pavyzdys. Įrodykite, kad nelygybė $|a| \leqslant b$ ekvivalenti nelygybei $-b \leqslant a \leqslant b$.

Sprendimas. Tarkime, kad nelygybė $|a| \leqslant b$ yra teisinga, t. y. $|a|$ ne didesnis už b. Kadangi $|a|$ – didžiausias iš dviejų skaičių a ir $-a$, tai kiekvienas jų ne didesnis už b, t.y.

$$a \leqslant b, \quad -a \leqslant b.$$

Padauginę antrąją nelygybę iš -1, gauname $-b \leqslant a$. Gautąsias nelygybes $-b \leqslant a$, $a \leqslant b$ sujungę į „grandinėlę", turime $-b \leqslant a \leqslant b$.

Atvirkščiai, tarkime, kad nelygybė $-b \leqslant a \leqslant b$ yra teisinga, t.y. $-b \leqslant a$ ir $a \leqslant b$. Padauginę pirmąją nelygybę iš -1, gauname tokias nelygybes $-a \leqslant b$, $a \leqslant b$. Vadinasi, kiekvienas iš skaičių a, $-a$ ne didesnis už b, todėl ir didžiausias iš jų ne didesnis už b, t.y. $|a| \leqslant b$.

18 pavyzdys. Įrodykite, kad bet kokiems dviem realiesiems skaičiams a ir b galioja nelygybė

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

Sprendimas. Skaičiams a ir b parašome nelygybes

$$-|a| \leqslant a \leqslant |a|, \quad -|b| \leqslant b \leqslant |b|.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname

$$-|a|-|b| \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|,$$

arba

$$-(|a|+|b|) \leqslant a+b \leqslant |a|+|b|.$$

Taigi skaičius $c=|a|+|b|$ tenkina nelygybes $-c \leqslant a+b \leqslant c$, todėl, remiantis ankstesniu pavyzdžiu, $|a+b| \leqslant c$, t.y. $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, o tai ir reikėjo įrodyti.

19 pavyzdys. Išspręskite lygtį $|x-1|=|x+3|$.

Sprendimas. Pritaikę trečiąjį absoliutinio didumo apibrėžimą, lygtį parašome taip:

$$\sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{(x+3)^2}. \qquad (1)$$

Pakėlę abi lygties puses kvadratu, gauname

$$(x-1)^2=(x+3)^2. \qquad (2)$$

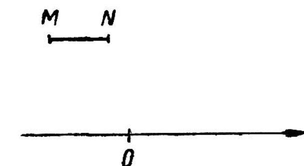
Atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius, turime lygtį $8x+8=0$, iš kurios randame $x=-1$.

Patariame įsidėmėti, kad (2) lygtį gavome iš (1), pakėlę pastarosios abi puses kvadratu. Taip pertvarkę lygtį, niekada neprarasime šaknų, užtat gali atsirasti pašalinių šaknų. Todėl reikia patikrinti, ar surasta reikšmė $x=-1$ yra duotosios lygties šaknis. Patikrinę, įsitikiname, kad $x=-1$ tinka duotajai lygčiai.

Vadinasi, duotoji lygtis turi vienintelę šaknį $x=-1$.

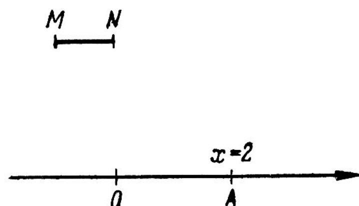
§ 8. Skaičių ašis ir koordinatės

Tarkime, kad l — tam tikra tiesė. Joje pažymėsime tašką O, kurį vadinsime *atskaitos pradžia* (arba tiesiog *pradžia*). Taškas O suskaido tiesę l į du spindulius. Vieną tų spindulių sutarsime laikyti *teigiamu*, o kitą — *neigiamu*. Teigiamąjį spindulį brėžinyje įprasta žymėti rodykle (7 pav.). Be to, dar tarsime, kad duota atkarpa MN, kurią laikysime ilgio matavimo vienetu.

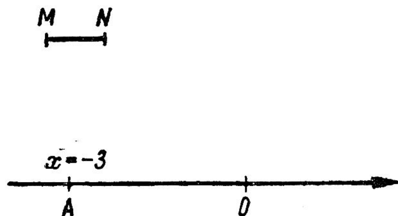


7 pav.

Taigi tiesėje l pažymėta atskaitos pradžia O ir nurodyta, kuris iš spindulių laikomas teigiamuoju; be to, parinktas matavimo vienetas MN. Tada kiekvienam tiesės l taškui A yra priskiriamas tam tikras realusis skaičius x, vadinamas taško A *koordinate*. Daroma tai tokiu būdu: kai taškas A priklauso teigiamajam spinduliui, koordinate x laikomas atkarpos OA ilgis (8 pav.); kai taškas A priklauso neigiamajam spinduliui, koordinate x laikomas neigiamas skaičius, kurio absoliutus didumas lygus



8 pav.



9. pav.

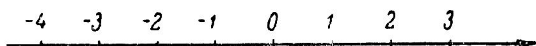
atkarpos OA ilgiui (9 pav.). Pagaliau, kai taškas A sutampa su O, laikome, kad $x=0$. Trumpiau

$$x=\begin{cases} |OA|, \text{ kai } A \text{ priklauso teigiamajam spinduliui;} \\ -|OA|, \text{ kai } A \text{ priklauso neigiamajam spinduliui;} \\ 0, \text{ kai } A \text{ sutampa su } O. \end{cases}$$

Taigi kiekvienam tiesės l taškui yra priskiriamas realusis skaičius – šio taško koordinatė. Ypač svarbu, kad kiekvienas realusis skaičius yra tam tikro (ir tik vieno) tiesės l taško koordinatė.

Šį faktą (mokykliniame algebros kurse jis neįrodomas) galima apibūdinti taip: *tarp visų tiesės l taškų ir visų realiųjų skaičių yra nustatyta abipus vienareikšmė atitiktis.* Vietoj posakio „tiesės l taškas A turi koordinatę x“ taip pat vartojamas posakis „skaičius x vaizduojamas tašku A“. Trumpumo dėlei vietoj „taškas, vaizduojantis skaičių x“, sakoma tiesiog „taškas x“. Kitaip tariant, dažnai neskiriame skaičiaus ir jį vaizduojančio taško.

Tiesė l, kurioje tokiu būdu vaizduojami realieji skaičiai, vadinama *skaičių ašimi.* Kad būtų vaizdu, skaičių ašyje žymimi taškai, kurių koordinatės yra sveikieji skaičiai: ... −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ..., o patys skaičiai rašomi prie atitinkamų taškų (10 pav.). Brėžinyje išskirti matavimo viene-



10 pav.

tą MN nebūtina (pavyzdžiui, atkarpa, kurios galai sutampa su taškais 0 ir 1, lygi matavimo vienetui). Kartais skaičių ašyje parodomos ir smulkesnės padalos, pavyzdžiui, kiekviena dešimtoji matavimo vieneto dalis.

Skaičių ašį įprasta brėžti horizontaliai; teigiamuoju spinduliu laikomas dešinysis spindulys, o neigiamuoju – kairysis (kaip 10 pav.). Tuomet labai paprasta geometriškai interpretuoti nelygybes. Iš tikrųjų nelygybė $x_1 > x_2$ reiškia, kad taškas x_1 yra dešiniau, negu taškas x_2. Nesunku geometriškai interpretuoti ir teiginį, įrodytą 16 pavyzdyje (p. 46): *tarp bet kurių dviejų skaičių ašies taškų yra racionalusis taškas.* Trumpiau šį teiginį galima taip suformuluoti: racionaliųjų skaičių aibė yra tiršta skaičių ašyje.

Baigdami šį paragrafą, priminsime teoremą, pagal kurią dažnai sprendžiami uždaviniai.

Teorema. *Tarkime, kad A_1 ir A_2 – bet kurie skaičių ašies taškai, x_1, x_2 – jų koordinatės. Tuomet atstumas tarp taškų A_1 ir A_2 (t.y. atkarpos A_1A_2 ilgis) lygus $|x_1-x_2|$.*

Norint įrodyti teoremą, reikia išnagrinėti įvairius taškų A_1 ir A_2 padėties skaičių ašyje atvejus.

Pavyzdžiui, kai taškas A_1 yra teigiamajame spindulyje, o taškas A_2 – neigiamajame (11 pav.), tai $x_1 = |OA_1|$, $x_2 = -|OA_2|$, todėl

$$|A_1A_2| = |A_1O| + |OA_2| = x_1 - x_2.$$

Kadangi skaičius $x_1 - x_2$ šiuo atveju yra teigiamas (nes $x_1 > 0$, $x_2 < 0$), tai $|x_1 - x_2| = x_1 - x_2$. Taigi $|A_1A_2| = |x_1 - x_2|$, t.y. teoremos tvirtinimas šiuo atveju yra teisingas.

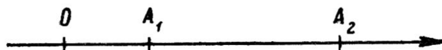


11 pav.

Kai abu taškai A_1, A_2 yra teigiamajame spindulyje, be to, taškas A_1 – tarp taškų O ir A_2 (12 pav.), tai $x_1 = |OA_1|$, $x_2 = |OA_2|$, todėl

$$|A_1A_2| = |OA_2| - |OA_1| = x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2).$$

Kadangi dabar skaičius $x_1 - x_2$ yra neigiamas (nes $x_1 < x_2$), tai $|x_1 - x_2| = -(x_1 + x_2)$. Vadinasi, ir šiuo atveju $|A_1 A_2| = |x_1 - x_2|$.



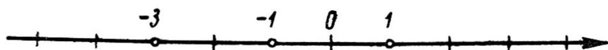
12 pav.

Panašiai galėtume išnagrinėti ir kitus galimus taškų A_1 ir A_2 padėties skaičių ašyje atvejus.

Ketindami pailiustruoti, kaip taikoma ši teorema, geometriškai išspręsime 19 pavyzdžio lygtį.

20 pavyzdys. Išspręskite lygtį $|x-1| = |x+3|$.

Sprendimas. Skaičius $|x-1|$ pagal suformuluotą teoremą yra atstumas tarp taškų x ir 1, o skaičius $|x+3|$ – atstumas tarp taškų x ir -3. Taigi duotąją lygtį geometriškai galima taip traktuoti: taškas x yra vienodai nutolęs nuo taškų 1 ir -3. Kitaip tariant, x – atkarpos, kurios galai yra taškai 1 ir -3, vidurio taškas. Todėl $x = -1$ (13 pav.).



13 pav.

Taigi duotoji lygtis turi vieną šaknį $x = -1$.

§ 9. Kai kurios skaičių aibės

Matematikoje labai reikšmingos yra įvairios *aibės*. Pavyzdžiui, galima kalbėti apie figūrų, panašių į duotąją, aibę, visų racionaliųjų skaičių aibę ir t.t. Čia nagrinėsime tik aibes, sudarytas iš skaičių (jos vadinamos *skaičių aibėmis*). Tokių aibių pavyzdžiai gali būti visų sveikųjų skaičių aibė, visų racionaliųjų skaičių aibė, duotosios lygties šaknų aibė ir kt.

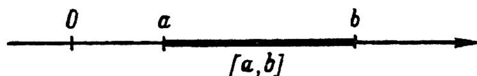
Norėdami parodyti, kad skaičius x priklauso aibei M (arba, kaip sakoma, *yra* aibės *M elementas*), rašysime $x \in M$. Užrašas $x \notin M$ reiškia, kad skaičius x nepriklauso aibei M. Pavyzdžiui, kai Q yra visų racionaliųjų skaičių aibė, galima parašyti

$$2 \in Q, \quad -\frac{7}{2} \in Q, \quad \sqrt{2} \notin Q, \quad \pi \notin Q.$$

Aibę, sudarytą iš realiųjų skaičių x, tenkinančių nelygybes

$$a \leqslant x \leqslant b$$

(čia a, b – realieji skaičiai, be to, $a<b$),vadiname *skaičių atkarpa*, arba tiesiog atkarpa. Ši aibė žymima simboliu $[a;\ b]$. Pavadinimą „atkarpa" galima paaiškinti tuo, kad ši aibė skaičių tiesėje iš tikrųjų vaizduojama tam tikra atkarpa (stora linija 14 pav.). Skaičiai a ir b (arba juos vaizduojantys



14 pav.

taškai) vadinami *atkarpos* $[a;\ b]$ *galais*; kiti taškai, priklausantys šiai atkarpai, vadinami jos *vidiniais taškais*. Pavyzdžiui, 2 – vidinis atkarpos $[1;\ 6]$ taškas.

Aibė, sudaryta iš realiųjų skaičių x, tenkinančių nelygybes

$$a<x<b$$

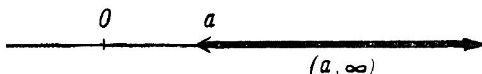
(čia $a<b$), skaičių ašyje irgi vaizduojama atkarpa, kuriai vis dėlto galai nepriskiriami. Ši aibė vadinama *intervalu* (arba atviru intervalu) ir žymima simboliu $]a;\ b[$.

Simboliu $[a;\ b[$ žymima aibė visų realiųjų skaičių x, tenkinančių nelygybes $a \leqslant x<b$, o simboliu $]a;\ b]$ – aibė skaičių, tenkinančių nelygybes $a<x \leqslant b$. Šios dvi aibės vadinamos *pusiau atvirais intervalais*. Juos galima gauti, prijungus prie atviro intervalo tik vieną galinį tašką.

Aibė, sudaryta iš realiųjų skaičių x, tenkinančių nelygybę

$$x>a,$$

žymima simboliu $]a;\ \infty[$. Ženklu ∞ („begalybė") žymimas ne skaičius, tai tik reliatyvus simbolis (jis tartum simbolizuoja, kad šios aibės taškų



15 pav.

yra kiek norima toli į d e š i n ę, 15 pav.). Kartais vietoj nelygybės $a<x$, apibrėžiančios aibę $]a;\ \infty[$, rašoma

$$a<x<\infty.$$

Šis užrašas irgi reliatyvus; jis reiškia tą patį, kaip ir užrašas $a<x$.

Simboliais $[a;\ \infty[$, $]-\infty;\ a[$, $]-\infty;\ a]$ žymimos aibės, kurias atitinkamai apibrėžia nelygybės

$$x \geqslant a,\ x < a,\ x \leqslant a.$$

Kartais šios nelygybės (apibrėžiančios nurodytas aibes) rašomos taip:

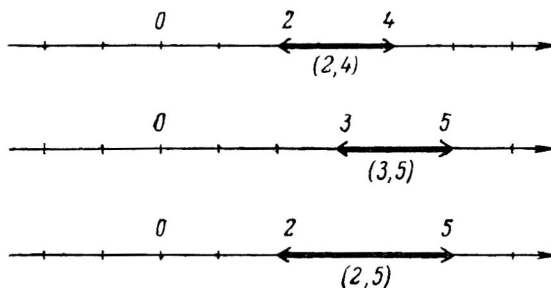
$$a \leqslant x < \infty,\quad -\infty < x < a,\quad -\infty < x \leqslant a.$$

Visų realiųjų skaičių aibė R taip pat žymima simboliu $]-\infty;\ \infty[$. Pagal išnagrinėtų atvejų analogiją kartais sakoma, kad šią aibę apibrėžia „nelygybės“ $-\infty < x < \infty$.

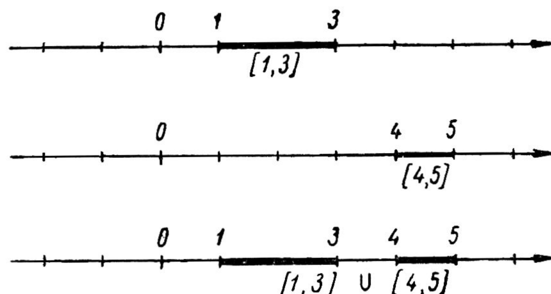
Baigdami paaiškinsime aibių *sąjungos* (*junginio*) ir *sankirtos* sąvokas. Tarkime, kad M ir N – dvi tam tikros (skaičių) aibės. Šių aibių sąjunga vadiname aibę, sudarytą iš visų taškų, priklausančių bent vienai iš aibių M ir N. Aibių M ir N sąjungą žymime simboliu $\cup$. Pavyzdžiui

$$]2;\ 4[\ \cup\ ]3;\ 5[\ =\ ]2;\ 5[$$

(16 pav.). Toliau, aibę $[1;3] \cup [4;5]$ „sudaro“ dvi atskiros atkarpos (17 pav.), o aibė $[1;\ 3[\ \cup\ ]3;5]$ yra atkarpa $[1;\ 5]$, iš kurios pašalintas („išdurtas“)



16 pav.



17 pav.

taškas 3. Aibių sąjungos apibrėžimą, pritaikę ekvivalentumo simbolį $\Leftrightarrow$ bei disjunkcijos simbolį $\vee$ (p. 22), galėsime parašyti taip:

$$(x \in M \cup N) \Leftrightarrow (x \in M) \vee (x \in N).$$

Dviejų aibių M ir N *sankirta* vadinama aibė, sudaryta iš visų taškų, kurie priklauso abiem aibėms M ir N. Aibių M ir N sankirta žymima simboliu $M \cap N$. Pavyzdžiui,

$$]1;3] \cap [1;3[=]1;3[,$$

$$]0;\infty[\cap]-1;3] =]0;3].$$

Aibių sankirtos apibrėžimą, pritaikius konjunkcijos simbolį $\wedge$, galima parašyti taip:

$$(x \in M \cap N) \Leftrightarrow (x \in M) \wedge (x \in N).$$

Taip pat galima nagrinėti trijų ir didesnio skaičiaus aibių sąjungą (arba sankirtą). Pavyzdžiui, sąjungą $M \cup N \cup P$ sudaro visi taškai, kurie priklauso bent vienai iš aibių M, N, P.

21 pavyzdys. Raskite funkcijos

$$y = \frac{2x+5}{(x+1)(x-3)}$$

apibrėžimo sritį.

Sprendimas. Ši funkcija apibrėžta visuose taškuose, kurie nėra vardiklio šaknys. Kitaip tariant, šios funkcijos apibrėžimo sritis yra visų realiųjų skaičių aibė, išskyrus taškus $x=-1$ ir $x=3$. Taigi apibrėžimo sritį galima parašyti taip:

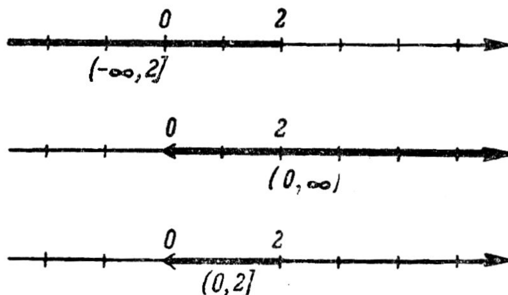
$$]-\infty; -1[\cup]-1; 3[\cup]3; \infty[.$$

22 pavyzdys. Raskite funkcijos

$$y = \sqrt{2-x} + \lg x$$

apibrėžimo sritį.

Sprendimas. Pirmasis dešiniosios pusės dėmuo yra funkcija, apibrėžta, kai $2-x \geqslant 0$, t.y. $x \leqslant 2$. Kitaip tariant, funkcijos $\sqrt{2-x}$ apibrėžimo sritis yra aibė $]-\infty; 2]$. Antrasis dėmuo apibrėžtas, kai $x>0$, t.y. funkcijos $\lg x$ apibrėžimo sritis yra aibė $]0; \infty[$. Galiausiai funkcija $y=\sqrt{2-x}+\lg x$ apibrėžta su visomis tomis x reikšmėmis, su kuriomis apibrėžti ir pirmasis, ir antrasis dėmenys, t.y. su tomis x reikšmėmis, kurios priklauso ir



18 pav.

funkcijos $\sqrt{2-x}$, ir funkcijos $\lg x$ apibrėžimo sritims. Kitaip tariant, duotosios funkcijos apibrėžimo sritis yra funkcijų $\sqrt{2-x}$ ir $\lg x$ apibrėžimo sričių sankirta. Taigi nagrinėjamos funkcijos apibrėžimo sritis yra aibė $]-\infty; 2] \cap]0; \infty[=]0; 2]$ (18 pav.).

II skyriaus uždaviniai

2.1. Prisiminę periodinių dešimtainių trupmenų išreiškimo paprastosiomis trupmenomis taisyklę, trupmeną 1,333... = 1, (3) pakeiskite paprastąja.

2.2. Įrodykite, kad $\sqrt{3}$ yra iracionalusis skaičius.

2.3. Įrodykite, kad $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ yra iracionalusis skaičius.

2.4. Ar turi atimtis ir dalyba komutatyvumo ir asociatyvumo savybes?

2.5. Ar gali racionaliojo ir iracionaliojo skaičių suma būti racionalusis skaičius?

2.6. Ar gali dviejų iracionaliųjų skaičių suma būti racionalusis skaičius?

2.7. Ar gali dviejų racionaliųjų skaičių sandauga būti racionalusis skaičius?

2.8. Įrodykite begalinės dešimtainės trupmenos išreiškimo paprastąja trupmena taisyklę.

2.9. Įrodykite, kad kiekvieną racionalųjį skaičių galima išreikšti begaline periodine dešimtaine trupmena.

2.10. Įrodykite, kad iracionaliųjų skaičių aibė tiršta skaičių ašyje, t.y tarp bet kurių dviejų skirtingų realiųjų skaičių yra iracionalusis skaičius.

2.11. Įrodykite, kad skaičius 0,101001000100001..., kuriame po kablelio parašyti iš eilės skaičiai 10, 100, 1000, ..., yra iracionalusis.

. 12. Įrodykite, kad skaičius 0,1101000100000001 ..., kuriame vienetai parašyti 1-oje, 2-oje, 4-oje, 8-oje, 2^n-oje, ... vietose, yra iracionalusis.

2.13. Tarkime, kad n – bet koks sveikasis skaičius, tenkinantis nelygybes $0<n<73$. Racionalųjį skaičių $\frac{n}{73}$ išreiškiame begaline dešimtaine trupmena:

$$\frac{n}{73}=0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ \ldots$$

Įrodykite, kad ši dešimtainė trupmena neturi dviejų greta esančių vienodų skaitmenų.

Apskaičiuokite (be lentelių) šių iracionaliųjų skaičių (**2.14–2.17**) *artinius* 0,1 *tikslumu:*

2.14. $\frac{1}{4-\sqrt{15}}$. **2.15.** $\sqrt{246}$. **2.16.** $\sqrt[3]{5}$. **2.17.** $\sqrt[5]{7}$.

2.18. Išreiškę skaičių

$$\frac{0{,}1234\ \ldots\ 31}{0{,}3130\ \ldots\ 21}$$

dešimtaine trupmena, raskite pirmuosius šios trupmenos tris skaitmenis (skaitiklyje po kablelio iš eilės parašyti skaičiai 1, 2, 3, ..., 31, o vardiklyje skaičiai 31, 30, ..., 2,1).

2.19. Išreiškę skaičių

$$\frac{1}{\underbrace{1{,}00\ \ldots\ 01}_{99\ \text{skaitmenys}}}$$

dešimtaine trupmena, raskite šios trupmenos 200 ženklų (po kablelio).

2.20. Išreiškę skaičių

$$\sqrt{\underbrace{0{,}99\ \ldots\ 9}_{100\ \text{skaitmenų}}}$$

dešimtaine trupmena, raskite šios trupmenos 100 ženklų (po kablelio).

2.21. Skaičiuje 0,1234567891011 ... 30 po kablelio išbraukite 47 skaitmenis taip, kad gautute mažiausią skaičių.

2.22. Įrodykite, kad nelygybė $|a|<b$ ekvivalenti nelygybėms $-b<a<b$.

2.23. Įrodykite, kad bet kokiems realiesiems a ir b teisinga nelygybė

$$|a+b| \geqslant ||a| - |b||.$$

2.24. Su kokiomis realiomis x reikšmėmis teisinga formulė

$$\lg x^2=2 \lg x?$$

2.25. Su kokiomis realiomis x reikšmėmis teisinga formulė

$$\lg x^2=2 \lg |x| ?$$

Suprastinkite šiuos reiškinius (**2.26**–**2.29**):

2.26. $\sqrt{(1-\cos\alpha\cos\beta)^2-\sin^2\alpha\sin^2\beta}$.

2.27. $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$, kai $a\geqslant 1$.

2.28. $\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}\right)^2$, kai $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2ab}}$ ir $ab>0$.

2.29. $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, kai $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$ ir $ab>0$.

Išspręskite šias lygtis (**2.30**–**2.33**):

2.30. $|x|=x$. **2.31.** $|2x-1|=3$.
2.32. $||x|+3|=3$. **2.33.** $|x+3|=|x-5|$.

Išspręskite šias nelygybes (**2.34**–**2.37**):

2.34. $|x-1|>|x+3|$. **2.35.** $|x|<1$.
2.36. $|x-3|\leqslant 2$. **2.37.** $|x-1|\geqslant 3$.

III SKYRIUS

NELYGYBĖS

§ 1. Apibrėžimai

Visi realieji skaičiai skirstomi į teigiamuosius, neigiamuosius ir nulį. Norėdami parodyti, kad skaičius a yra teigiamas, rašome $a>0$.

Priminsime (D) savybę, p. 44), kad teigiamųjų skaičių suma ir sandauga taip pat yra teigiamieji skaičiai. Toliau, kai skaičius a neigiamas, tai skaičius $-a$ teigiamas (ir atvirkščiai). Pagaliau, koks bebūtų teigiamas skaičius a, visada galima rasti teigiamą racionalųjį skaičių r, tenkinantį sąlygą $r<a$. Šie faktai ir yra nelygybių teorijos pagrindas.

Pagal apibrėžimą nelygybė $a>b$ (*arba* $b<a$) *galioja tada ir tik tada, kai* $a-b>0$, *t.y. kai skaičius* $a-b$ *yra teigiamas.*

Panagrinėkime, pavyzdžiui, nelygybę $a<0$. Kokia jos prasmė? Pagal ką tik suformuluotą apibrėžimą ji reiškia, kad $0-a>0$, t.y. $-a>0$, arba, kitaip tariant, skaičius $-a$ yra teigiamas. Bet taip esti tada ir tik tada, kai skaičius a yra neigiamas. Taigi *nelygybė* $a<0$ *reiškia, kad skaičius* a *yra neigiamas.*

Dažnai rašoma $a\geqslant b$ (parašę $b\leqslant a$, turėsime tą patį). *Užrašas* $a\geqslant b$ *pagal apibrėžimą reiškia, kad arba* $a>b$, *arba* $a=b$. Jeigu užrašą $a\geqslant b$ nagrinėtume kaip teiginį, tai vartodami I skyriaus simboliką (p. 22), turėtume

$$(a\geqslant b)\Leftrightarrow\big((a>b)\vee(a=b)\big).$$

Vartodami ženklą $\geqslant$, mokiniai kartais klysta, nors ženklą paaiškina teisingai. Bet paklausti „Ar teisingos nelygybės $5\geqslant0$, $0\geqslant0$?“, kartais atsako: „Ne, šios nelygybės parašytos neteisingai, o teisingi bus sąryšiai $5>0$, $0=0$". Dar kartą akcentuojame, kad toks atsakymas klaidingas. Nelygybė $a\geqslant0$ pagal apibrėžimą reiškia, kad arba $a>0$ (t.y. a — teigiamas skaičius), arba $a=0$. Pavyzdžiui, $5\geqslant0$ reiškia, kad galioja vienas iš dviejų teiginių: arba $5>0$, arba $5=0$. Šiuo atveju galioja pirmasis ($5>0$), todėl nelygybė $5\geqslant0$ yra teisinga. Analogiškai galima paaiškinti užrašą $0\geqslant0$.

Nelygybes $a>b$, $a<b$ vadinsime *griežtomis*, o nelygybes $a\geqslant b$, $a\leqslant b$ — *negriežtomis*. Nelygybes $a>b$ ir $c>d$ (arba $a<b$ ir $c<d$) vadinsime *vienodos prasmės* nelygybėmis, o nelygybes $a<b$ ir $c>d$ — *priešingos prasmės* nelygybėmis. Pažymėsime, kad šiais dviem terminais (vienodos prasmės ir priešingos prasmės nelygybės) apibūdiname tik nelygybių užrašymo formą, o ne teiginius, kuriuos išreiškia šios nelygybės. Pavyzdžiui, nelygybės $a<b$ ir $c<d$ yra vienodos prasmės. Bet jeigu pastarąją nelygybę parašytume $d>c$ (ji reikštų tą patį), tai jau turėtume priešingos prasmės nelygybes.

Greta nelygybių $a>b$, $a \geqslant b$ vartojame dvigubas nelygybes, t.y. nelygybes $a<c<b$, $a \leqslant c<b$, $a<c \leqslant b$, $a \leqslant c \leqslant b$. Pagal apibrėžimą užrašas

$$a<c<b \tag{1}$$

reiškia, kad teisingos abi nelygybės

$$a<c \text{ ir } c<b.$$

Nelygybių $a \leqslant c \leqslant b$, $a \leqslant c<b$, $a<c \leqslant b$ prasmė analogiška.

Dvigubą nelygybę ((1) nelygybę), vartodami I skyriaus simboliką, galėtume parašyti taip:

$$(a<c<b) \Leftrightarrow (a<c) \wedge (c<b),$$

o dvigubą nelygybę $a \leqslant c \leqslant b$ – taip:

$$(a \leqslant c \leqslant b) \Leftrightarrow \big((a<c) \vee (a=c)\big) \wedge \big((c<b) \vee (c=b)\big).$$

Dabar išnagrinėsime pagrindines nelygybių savybes ir veiksmų su jomis taisykles.

§ 2. Pagrindinės nelygybių savybės

Šiame paragrafe raidėmis a, b, c visur žymimi realieji skaičiai, o raide n – natūriniai skaičiai.

1) *Kai $a>b$ ir $b>c$, tai $a>c$* (tranzityvumo savybė).

Įrodymas. Kadangi $a>b$ ir $b>c$, tai skaičiai $a-b$ ir $b-c$ yra teigiami, taigi ir skaičius $a-c=(a-b)+(b-c)$ kaip teigiamų skaičių suma irgi teigiamas. Todėl pagal apibrėžimą $a>c$.

2) *Kai $a>b$, tai su bet kuria c reikšme $a+c>b+c$.*

Įrodymas. Kadangi $a>b$, tai skaičius $a-b$ yra teigiamas. Vadinasi, skaičius $(a+c)-(b+c)=a-b$ irgi teigiamas, t.y. $a+c>b+c$.

3) *Kai $a+b>c$, tai $a>c-b$, t.y. bet kurį dėmenį, pakeitus jo ženklą priešingu, galima perkelti iš vienos nelygybės pusės į kitą.*

Įrodymas grindžiamas 2) savybe (prie abiejų nelygybės $a+b>c$ pusių pakanka pridėti $-b$).

4) *Kai $a>b$ ir $c>d$, tai $a+c>b+d$, t.y. sudėję dvi vienos prasmės nelygybes, gauname tos pačios prasmės nelygybę.*

Įrodymas. Norint įrodyti šią savybę, užtenka įrodyti, kad skirtumas $(a+c)-(b+d)$ yra teigiamas. Šį skirtumą galima parašyti taip:

$$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d).$$

Kadangi pagal sąlygą skaičiai $a-b$ ir $c-d$ yra teigiami, tai $(a+c)-(b+d)$ irgi teigiamas skaičius.

Išvada. Iš 2) ir 4) savybių išplaukia tokia nelygybių atimties taisyklė: *kai $a>b$, $c>d$, tai $a-d>b-c$* (norint ją įrodyti, užtenka prie abiejų nelygybės $a+c>b+d$ pusių pridėti skaičių $-c-d$).

5) *Tarkime, kad $a>b$. Kai $c>0$, tai $ac>bc$; kai $c<0$, tai $ac<bc$.*

Kitaip tariant, nelygybės abi puses padauginus iš teigiamojo skaičiaus, nelygybės ženklas nepasikeičia (t.y. gaunama tos pačios prasmės nelygybė),

o padauginus iš neigiamojo skaičiaus, nelygybės ženklas pasikeičia priešingu (t.y. gaunama priešingos prasmės nelygybė).

Įrodymas. Kadangi $a>b$, tai $a-b$ yra teigiamas skaičius. Vadinasi, skirtumo $ac-bc=c(a-b)$ ženklas sutampa su skaičiaus c ženklu: kai c – teigiamas skaičius, tai ir skirtumas $ac-bc$ teigiamas, todėl $ac>bc$, o kai $c<0$, tai šis skirtumas neigiamas, todėl $bc-ac$ teigiamas, t.y. $bc>ac$.

6) *Kai $a>b>0$ ir $c>d>0$, tai $ac>bd$, t.y. panariui sudauginus dvi vienos prasmės nelygybes, kurių visi nariai teigiami, gaunama tos pačios prasmės nelygybė.*

Įrodymas. Turime $ac-bd=ac-bc+bc-bd=c(a-b)+b(c-d)$. Kadangi $c>0$, $b>0$, $a-b>0$, $c-d>0$, tai $ac-bd>0$, t.y. $ac>bd$.

Pastaba. Iš įrodymo matyti, kad 6) savybės formuluotėje sąlyga $d>0$ nebūtina: visiškai pakanka sąlygų $a>b>0$, $c>d$, $c>0$. Jeigu teisingų nelygybių $a>b$, $c>d$ bent vienas iš skaičių a, b, c bus neigiamas, tai nelygybė $ac>bd$ gali būti klaidinga. Pavyzdžiui, kai $a=2$, $b=1$, $c=-2$, $d=-3$, nelygybė $ac>bd$ (t.y. $-4>-3$) klaidinga, nors $a>b$, $c>d$. Vadinasi, formuluojant 6) savybę, būtinai reikia, kad skaičiai a, b, c būtų teigiami.

7) *Kai $a\geqslant b>0$ ir $c>d>0$, tai $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$ (nelygybių dalyba).*

Įrodymas. Turime

$$\frac{a}{d}-\frac{b}{c}=\frac{ac-bd}{cd}.$$

Trupmenos, esančios dešinėje pusėje, skaitiklis yra teigiamas (žr. 5) ir 6) savybes), vardiklis taip pat teigiamas. Vadinasi, $\frac{a}{d}-\frac{b}{c}>0$. Taigi 7) savybė įrodyta.

Pastaba. Išskirsime svarbų atskirą 7) taisyklės atvejį, kai $a=b=1$: jeigu $c>d>0$, tai $\frac{1}{c}<\frac{1}{d}$. Vadinasi, kai nelygybės nariai yra teigiami, tai, pakeitus šiuos narius atvirkštiniais dydžiais, gaunama priešingos prasmės nelygybė. Siūlome skaitytojams patikrinti, kad ši taisyklė yra teisinga ir tada, kai $c<0$, $d<0$. Taigi, kai $c>d$ ir $cd>0$, tai $\frac{1}{c}<\frac{1}{d}$. Kai $c>d$, bet $cd<0$ (t.y. $c>0$, $d<0$), tai $\frac{1}{c}>\frac{1}{d}$.

Įrodėme nelygybių, parašytų su ženklu > (daugiau), kelias savybes. Tačiau visas šias savybes būtų galima formuluoti ir su ženklu < (mažiau), nes nelygybės $b<a$ ir $a>b$ pagal apibrėžimą reiškia tą patį. Be to, tai nesunku patikrinti, įrodytas savybes turi ir negriežtos nelygybės. Pavyzdžiui, negriežtų nelygybių 1) savybė atrodo taip: kai $a\geqslant b$ ir $b\geqslant c$, tai $a\geqslant c$.

Aišku, kad išnagrinėtos savybės neišsemia nelygybių bendrųjų savybių. Yra dar daug bendros išraiškos nelygybių, kurios susijusios su laipsninėmis, rodiklinėmis, logaritminėmis ir trigonometrinėmis funkcijomis. Tokias nelygybes galima parašyti, remiantis tokiais bendro pobūdžio samprotavimais. *Jeigu tam tikra funkcija $y=f(x)$ monotoniškai didėja atkarpoje $[a;\ b]$, tai $f(x_1)>f(x_2)$, kai $x_1>x_2$ (čia x_1, x_2 – šios atkarpos taškai).* Analogiškai, *jeigu funkcija $y=f(x)$ monotoniškai mažėja atkarpoje $[a;\ b]$, tai $f(x_1)<f(x_2)$, kai $x_1>x_2$ (čia x_1, x_2 – šios atkarpos taškai).* Aišku,

kad taip suformuluota taisyklė nesiskiria nuo monotoniškumo apibrėžimo, bet nelygybėms įsiminti ir užrašyti toks būdas yra labai patogus.

Pavyzdžiui, su bet kokia natūrine n reikšme funkcija $y=x^n$ yra monotoniškai didėjanti spindulyje $[0;\ \infty[$. Todėl galima suformuluoti tokią bendrą nelygybių savybę:

8) *Kai* $a>b\geqslant 0$, *tai* $a^n>b^n$ (*čia* n – *natūrinis skaičius*).

Toliau funkcija $y=x^{2n+1}$, kai n – bet koks natūrinis skaičius, yra didėjanti visoje skaičių tiesėje. Iš to išplaukia tokia savybė:

9) *Kai* $a>b$, *tai* $a^{2n+1}>b^{2n+1}$ (*čia* n – *natūrinis skaičius*).

Išskirsime vieną šios savybės atskirą atvejį, kuris dažnai taikomas, įrodant nelygybes (jis gaunamas, kai $n=1$): *jeigu* $a>b$, *tai* $a^3>b^3$.

Pagaliau, kai tam tikra funkcija yra didėjanti, tai ir jai atvirkštinė funkcija irgi yra didėjanti (detaliau žr. p. 160). Todėl funkcija $y=\sqrt[n]{x}$ didėja spindulyje $[0;\ \infty[$, o funkcija $y=\sqrt[2n+1]{x}$ didėja visoje skaičių tiesėje. Remiantis tuo, galima suformuluoti šias nelygybių savybes:

10) *Kai* $a>b\geqslant 0$, *tai* $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ (*čia* n – *natūrinis skaičius*).

11) *Kai* $a>b$, *tai* $\sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[2n+1]{b}$ (*čia* n – *natūrinis skaičius*).

Išvada. *Nelygybė* $a^2>b^2$ *teisinga tada ir tik tada, kai* $|a|>|b|$.

Iš tiesų, kai $a^2>b^2$, tai galima parašyti $a^2>b^2\geqslant 0$. Vadinasi, pagal 10) savybę turime $\sqrt{a^2}>\sqrt{b^2}$, t.y. $|a|>|b|$. Atvirkščiai, kai $|a|>|b|$, t.y. $\sqrt{a^2}>\sqrt{b^2}$, tai galima parašyti $\sqrt{a^2}>\sqrt{b^2}\geqslant 0$. Todėl, remdamiesi 8) savybe, gauname $(\sqrt{a^2})^2>(\sqrt{b^2})^2$, t.y. $a^2>b^2$.

Dar kartą pabrėžiame, kad samprotavimai apie funkcijų monotoniškumą, padėję suformuluoti nelygybių 8)–11) savybes, nėra šių savybių įrodymai. Atvirkščiai, tik po to, kai įrodysime 8) savybę, galėsime kalbėti apie funkcijos $y=x^n$ monotoniškumą spindulyje $[0,\ \infty[$ (tą patį galima pasakyti ir apie 9) savybę). 8) – 11) savybės bus įrodomos VIII skyriuje, kai nagrinėsime laipsninės funkcijos savybes.

Panašiai galima parašyti ir daugelį kitų nelygybių. Pavyzdžiui, kai $c>1$, funkcija $y=c^x$ didėja visoje skaičių tiesėje, ir todėl, kai $c>1$, $a>b$, *teisinga nelygybė* $c^a>c^b$. Kai $0<c<1$ ir $a>b$, teisinga nelygybė $c^a<c^b$ (t.y. funkcija $y=c^x$ yra mažėjanti, kai $0<c<1$). Šias nelygybes taip pat nagrinėsime VIII skyriuje.

Dar vienas pavyzdys. Funkcija $y=\sin x$ atkarpoje $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ yra monotoniškai didėjanti. *Vadinasi, kai* $a>b$ (*čia* a *ir* b *priklauso atkarpai* $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$), teisinga nelygybė $\sin a>\sin b$.

Spręsdami šio skyriaus uždavinius, apsieisime be rodiklinių, logaritminių ir trigonometrinių nelygybių, o taikysime tik 1)–11) savybes. Patogumo dėlei pateikiame šių savybių santrauką (jungtis „ir“ pakeista ženklu $\wedge$, o žodis „išplaukia“ – ženklu $\Rightarrow$, žr. p. 24 ir 16):

1) $((a>b)\wedge(b>c))\Rightarrow(a>c)$;

2) $(a>b)\Rightarrow(a+c>b+c)$;

3) $(a+b>c)\Rightarrow(a>c-b)$;
4) $\big((a>b)\wedge(c>d)\big)\Rightarrow(a+c>b+d)$;
5) $\big((a>b)\wedge(c>0)\big)\Rightarrow(ac>bc)$,
$\big((a>b)\wedge(c<0)\big)\Rightarrow(ac<bc)$;
6) $\big((a>b>0)\wedge(c>d>0)\big)\Rightarrow(ac>bd)$;
7) $\big((a\geqslant b>0)\wedge(c>d>0)\big)\Rightarrow\left(\frac{a}{d}>\frac{b}{c}\right)$;
8) $(a>b\geqslant 0)\Rightarrow(a^n>b^n)$;
9) $(a>b)\Rightarrow(a^{2n+1}>b^{2n+1})$;
10) $(a>b\geqslant 0)\Rightarrow(\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b})$;
11) $(a>b)\Rightarrow(\sqrt[2n+1]{a}>\sqrt[2n+1]{b})$.

§ 3. Kai kurios dažnai pasitaikančios nelygybės

1) *Su bet kuriomis realiomis a ir b reikšmėmis yra teisinga nelygybė*

$$a^2+b^2\geqslant 2ab. \tag{2}$$

Įrodymas. Pagal nelygybės apibrėžimą pakanka parodyti, kad (2) nelygybės kairiosios ir dešiniosios pusių skirtumas yra neneigiamas skaičius. Šis skirtumas lygus

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Kadangi kiekvieno realiojo skaičiaus kvadratas yra neneigiamas skaičius, tai $(a-b)^2\geqslant 0$. Taigi (2) nelygybė įrodyta. Iš įrodymo matyti, kad (2) nelygybė tampa lygybe tada ir tik tada, kai $a=b$.

Pastaba. Teisinga ir bendresnė nelygybė

$$a^2+b^2\geqslant 2\,|ab|. \tag{3}$$

(3) nelygybė išplaukia iš nelygybės

$$(|a|-|b|)^2\geqslant 0.$$

2) *Kai a ir b — realieji vienodo ženklo skaičiai* (*t.y.* $ab>0$), *tai*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2. \tag{4}$$

Įrodymas. Padauginę abi (2) nelygybės puses iš teigiamo skaičiaus $\frac{1}{ab}$ ir pritaikę 5 savybę, gauname (4) nelygybę. Kaip ir pirmesniame pavyzdyje, (4) sąryšyje lygybės ženklas galimas tada ir tik tada, kai $a=b$.

3) *Kai* $a\geqslant 0$ *ir* $b\geqslant 0$, *tai*

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}, \tag{5}$$

t.y. dviejų neneigiamų skaičių aritmetinis vidurkis ne mažesnis už jų geometrinį vidurkį.

Įrodymas. *Pirmasis būdas* (algebrinis). (5) nelygybė (pagal dauginimo iš teigiamojo skaičiaus taisyklę (5) savybę) yra teisinga tada ir tik tada, kai

$$a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0,$$

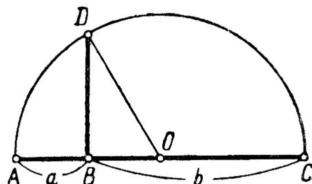
arba

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0. \qquad (6)$$

Kadangi (6) nelygybės kairiojoje pusėje yra realiojo skaičiaus kvadratas, tai (6) nelygybė yra teisinga. Taigi teisinga ir (5) nelygybė.

Pastaba. Iš įrodymo matyti, kad (5) nelygybėje galimas lygybės ženklas tada ir tik tada, kai jis galimas (6) nelygybėje, t.y., kai $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=$ $=0$, o taip bus, kai $a=b$.

Antrasis būdas (geometrinis). Kai bent vienas iš skaičių a, b lygus nuliui, tai (5) nelygybė savaime aiški. Todėl tarsime, kad $a>0$, $b>0$. Sakykime, kad AB ir BC – gretimos tiesės atkarpos, kurių ilgiai atitinkamai lygūs a ir b (19 pav.). Laikydami atkarpą AC (jos ilgis $a+b$) skersmeniu, nubrėžiame apskritimą; jo centrą pažymime raide O. Kai D – taškas, kuriame susikerta apskritimas su statmeniu, nubrėžtu tiesei AC per tašką B, tai (iš žinomos planimetrijos teoremos) $BD=\sqrt{ab}$. Toliau $OD=$ $=\frac{a+b}{2}$ ir, vadinasi, $BD\leqslant OD$, t.y. $\sqrt{ab}\leqslant$ $\leqslant\frac{a+b}{2}$. Iš šio įrodymo matyti, kad lygybė galima tik tada, kai $a=b$.



19 pav.

4) *Nelygybė*

$$|a|<b \qquad (7)$$

yra teisinga tada ir tik tada, kai teisinga dviguba nelygybė:

$$-b<a<b. \qquad (8)$$

Šį teiginį įrodėme 47 puslapyje. Čia pateiksime kitą įrodymą. Tarkime, kad yra teisinga (7) nelygybė. Kai $a\geqslant 0$, tai $|a|=a$. Tada (7) nelygybę galima parašyti taip: $0\leqslant a<b$. Kadangi $b>0$, $a\geqslant 0$, tai $-b<0\leqslant a$. Vadinasi, $-b<a<b$, t.y. galioja (8) dviguba nelygybė.

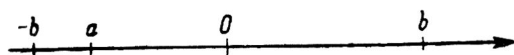
Analogiškai nagrinėjamas atvejis $a<0$.

Atvirkščiai, tarkime, kad yra teisinga (8) dviguba nelygybė. Kai $a\leqslant 0$, tai $|a|=-a$. Tada (7) nelygybę, kurią reikia įrodyti, galima parašyti $-a<b$. Bet iš (8) nelygybės turime, kad $-b<a$. Iš pastarosios nelygybės išplaukia reikiama nelygybė $-a<b$.

Atvejis $a>0$ nagrinėjamas analogiškai.

Pastaba. Gautą rezultatą nesunku interpretuoti geometriškai. Tarkime, kad teisinga (8) dviguba nelygybė. Tada $-b<b$, t.y. $b>0$. Skaičių ašyje pažymėsime taškus b, $-b$ ir a (20 pav.). Kadangi $b>0$, tai taškas b yra teigiamajame spindulyje, o taškas $-b$ – neigiamajame spindulyje. Dviguba

nelygybė $-b<a<b$ reiškia, kad taškas a skaičių ašyje yra tarp taškų $-b$ ir b. Taigi atstumas nuo taško a iki taško 0 (šis atstumas, kaip žinome, lygus $|a|$) yra mažesnis už b, t.y. $|a|<b$. Vadinasi, iš (8) dvigubos nelygybės išplaukia (7) nelygybė. Analogiškai iš geometrijos pozicijų galima parodyti, kad iš (7) nelygybės išplaukia (8) nelygybė.



20 pav.

5) *Su bet kuriomis realiomis a ir b reikšmėmis yra teisingos nelygybės:*

a)
$$|a+b|\leqslant|a|+|b|, \tag{9}$$

t.y. dviejų realiųjų skaičių sumos absoliutinis didumas yra ne didesnis už šių skaičių absoliutinių didumų sumą;

b)
$$|a-b|\geqslant||a|-|b||. \tag{10}$$

Įrodymas. (9) nelygybė jau įrodyta (p. 47).

Įrodysime (10) nelygybę. Turime

$$|a|=|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|$$

(pagal (9) nelygybę). Iš čia

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|. \tag{11}$$

Analogiškai iš nelygybės

$$|b|=|(b-a)+a|\leqslant|b-a|+|a|=|a-b|+|a|$$

gauname

$$|a-b|\geqslant|b|-|a|. \tag{12}$$

Iš (11) ir (12) nelygybių išplaukia

$$-|a-b|\leqslant|\mathrm{a}|-|b|\leqslant|a-b|.$$

Iš pastarosios nelygybės išplaukia (10) nelygybė.

Pastaba. Matematinės indukcijos metodu galima įrodyti (9) nelygybę ir tada, kai dėmenų skaičius yra bet koks:

$$|a_1+a_2+\ \dots\ +a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ \dots\ +|a_n|.$$

§ 4. Pavyzdžiai

Šiame paragrafe išnagrinėsime kelis tipinius nelygybių įrodymo uždavinius. Įsidėmėtina, kad bendro nelygybių įrodymo metodo nėra. Kartais nelygybę galima įrodyti, remiantis apibrėžimu, t.y. išnagrinėjus kairiosios ir dešiniosios nelygybės pusės skirtumą; kartais tikslinga pritaikyti jau žinomą nelygybę arba įvertinti ir kairiąją, ir dešiniąją nelygybės pusę.

Atkreipiame dėmesį į gana paplitusią klaidą, kurią padaro mokiniai (ir stojantieji į aukštąsias mokyklas), spręsdami nelygybių įrodymo uždavinius. Mokinys parašo nelygybę, kurią reikia įrodyti, įvairiais būdais ją pertvarko ir galiausiai gauna aiškiai žinomą nelygybę (sakykime, kad $-1<0$ arba $a^2 \geqslant 0$); po to mokinys daro išvadą: „Duota nelygybė įrodyta". Tai didelė loginė klaida.

Štai, pavyzdžiui, kaip kai kurie mokiniai „įrodo", kad nelygybė

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab} \qquad (5)$$

yra teisinga su neneigiamais skaičiais a ir b. „Abi (5) nelygybės puses pakeliame kvadratu. Gauname $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$. Padauginę abi šios nelygybės puses iš 4, turime $(a+b)^2 \geqslant 4\,ab$. Dabar, perkėlę visus narius į kairiąją nelygybės pusę, gauname $(a-b)^2 \geqslant 0$. Kadangi nelygybė $(a-b)^2 \geqslant 0$ teisinga, tai teisinga ir (5) nelygybė".

Tokius mokinio samprotavimus reikia traktuoti tik kaip įrodymo *ieškojimą*, kaip bandymą surasti įrodymo būdą. Jeigu teiginio funkciją, apibrėžtą (5) nelygybe, pažymėtume A, o nelygybes $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant ab$, $(a+b)^2 \geqslant 4ab$, $(a-b)^2 \geqslant 0$, laikydami jas teiginiais, pažymėtume B, C, D, tai išnagrinėtus mokinio samprotavimus galėtume išreikšti taip:

$$A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow D.$$

Šių išvadų teisingumas išplaukia iš 8), 5) ir 3) nelygybių savybių (žr. p. 60). Taigi, taip samprotaudami, įrodėme, kad $A \Rightarrow D$, t. y. kad iš (5) nelygybės išplaukia nelygybė $(a-b)^2 \geqslant 0$.

Norint įrodyti (5) nelygybės teisingumą, reikia samprotauti atvirkščia tvarka, t.y. įrodyti, kad teisingos šios išvados:

$$D \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow A.$$

Šių išvadų teisingumą nesunku pagrįsti 3), 5) ir 10) nelygybių savybėmis.

Taigi, pakeitus įrodomą nelygybę kai kuria žinoma nelygybe, po to būtinai reikia patikrinti, ar įmanomi visi samprotavimai atvirkščia tvarka. Tačiau, jeigu po *kiekvieno* nelygybės pertvarkymo įsitikindavome, kad naujai gauta nelygybė yra ekvivalenti ankstesnei, t.y. ji galioja tada ir tik tada, kai galioja ankstesnioji, tai samprotauti atvirkščia tvarka nereikia. Tai būdinga išnagrinėtam pavyzdžiui, t.y.

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D.$$

Iš čia išplaukia, kad (5) nelygybė su neneigiamais skaičiais a ir b yra teisinga tada ir tik tada, kai teisinga nelygybė $(a-b)^2 \geqslant 0$. Kadangi $(a-b)^2 \geqslant 0$ – teisinga nelygybė, tai (5) nelygybė įrodyta.

Taigi, jeigu nelygybę, kurią reikia įrodyti, nuosekliai keičiame kitomis nelygybėmis, tai arba po kiekvieno žingsnio reikia tikrinti, kad gauta nelygybė yra ekvivalenti ankstesnei (t. y. ji galioja tada ir tik tada, kai galioja ankstesnioji), arba, kai taip nedarome, reikia būtinai patikrinti, ar įmanoma, samprotaujant atvirkščia tvarka, gauti duotąją nelygybę.

1 pavyzdys. Įrodykite, kad su bet kokiomis realiomis a ir b reikšmėmis yra teisinga nelygybė $a^4+b^4 \geqslant a^3b+ab^3$.

Sprendimas. Nelygybės kairiosios ir dešiniosios pusės skirtumas lygus

$$a^4+b^4-(a^3b+ab^3)=a^3(a-b)-b^3(a-b)=$$
$$=(a-b)(a^3-b^3)=(a-b)^2(a^2+ab+b^2).$$

Šis skirtumas neneigiamas, nes

$$(a-b)^2 \geqslant 0, \quad a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2 \geqslant 0.$$

2 pavyzdys. Įrodykite, kad su kiekviena sveikąja $n>1$ reikšme yra teisinga nelygybė $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<2$.

Sprendimas. Šiame pavyzdyje užtenka gana apytiksliai įvertinti kairiąją nelygybės pusę. Pastebėsime, kad kairiosios nelygybės pusės dviejų paskutiniųjų dėmenų suma ne didesnė už $\frac{1}{n}$, nes

$$\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}.$$

Kiekvienas kitas kairiosios nelygybės pusės dėmuo yra mažesnis už $\frac{1}{n}$, o šių dėmenų skaičius lygus $2n-1$. Taigi

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}<(2n-1)\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=2.$$

3 pavyzdys. Įrodykite, kad su bet kokiomis realiomis a, b ir c reikšmėmis yra teisinga nelygybė

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ac.$$

Sprendimas. Pritaikę (2) nelygybę (p. 60), galime parašyti tokias nelygybes

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$
$$b^2+c^2 \geqslant 2bc,$$
$$c^2+a^2 \geqslant 2ac.$$

Sudėję šias nelygybes ir padaliję abi gautosios nelygybės puses iš 2, turime nelygybę, kurią reikia įrodyti.

4 pavyzdys. Įrodykite, kad

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c} \geqslant a+b+c,$$

kai a, b, c — teigiamieji skaičiai.

Sprendimas. Pritaikę anksčiau įrodytą nelygybę, siejančią dviejų teigiamųjų skaičių aritmetinį ir geometrinį vidurkį ((5) nelygybė, p. 63), galime parašyti

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\right)\geqslant\sqrt{\frac{bc}{a}\cdot\frac{ac}{b}}=c.$$

Analogiškai

$$\frac{1}{2}\left(\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geqslant a,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\right)\geqslant b.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c.$$

5 pavyzdys. Įrodykite, kad

$$(a+b)(b+c)(a+c)\geqslant 8\ abc,$$

kai $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$.

Sprendimas. Vėl pritaikysime nelygybę, siejančią dviejų skaičių aritmetinį ir geometrinį vidurkį:

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},$$

$$b+c\geqslant 2\sqrt{bc},$$

$$a+c\geqslant 2\sqrt{ac}.$$

Sudauginę šias nelygybes (5) ir (6) savybės), gausime nelygybę, kurią reikia įrodyti.

6 pavyzdys. Įrodykite, kad

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc,$$

kai a, b, c – neneigiami skaičiai.

Sprendimas. Pritaikę tapatybę

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\ (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$$

ir 3-čiojo pavyzdžio nelygybę, gauname nelygybę, kurią reikia įrodyti.

7 pavyzdys. Įrodykite, kad

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}\geqslant\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4},$$

kai a_1, a_2, a_3, a_4 – bet kokie neneigiami skaičiai.

Sprendimas. Vėl pasinaudosime (5) nelygybe (p. 60). Turime

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2}\geqslant$$

$$\geqslant\sqrt{\sqrt{a_1a_2}\cdot\sqrt{a_3a_4}}=\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.$$

§ 5. Dvi įdomiosios nelygybės

Nelygybė, siejanti n neneigiamų skaičių aritmetinį ir geometrinį vidurkį (Koši nelygybė). *Kai* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *– bet kokie neneigiami skaičiai, tai*

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}. \tag{13}$$

Lygybė galima tik tada, kai $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Įrodymas. Kai $n=2$, (13) nelygybė yra teisinga (žr. (5) nelygybę, p. 60). Tarkime, kad (13) nelygybė yra teisinga, kai $n=m$; tada ji bus teisinga, kai $n=2m$. Iš tikrųjų

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{2m}}{2m} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\ldots+\frac{a_{2m-1}+a_{2m}}{2}}{m} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[m]{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot\frac{a_3+a_4}{2}\ldots\frac{a_{2m-1}+a_{2m}}{2}} \geqslant \sqrt[2m]{a_1 a_2 \ldots a_{2m}}.$$

(Pritaikėme (5) nelygybę.) Kadangi (13) nelygybė yra teisinga, kai $n=2$, tai ji bus teisinga, kai $n=4$, 8 ir t.t., t.y. ji bus teisinga, kai $n=2^p$ $(p=1, 2, \ldots)$.

Dabar sakykime, kad n – bet koks natūrinis skaičius. Kai $n\neq 2^p$, tai galima rasti tokį natūrinį skaičių s, kad $n+s=2^p$. Tada bet kokiems neneigiamiems skaičiams $a_1, a_2, \ldots, a_{n+s}$ pagal ką tik įrodytą nelygybę galioja nelygybė

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{n+s}}{n+s} \geqslant \sqrt[n+s]{a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_{n+s}}.$$

Laikydami, kad

$$a_{n+1}=a_{n+2}=\ldots=a_{n+s}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

gauname

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,s}{n}}{n+s} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n+s]{a_1 a_2 \ldots a_n \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^s}.$$

Pažymėję $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=A_n$, randame

$$A_n \geqslant \sqrt[n+s]{a_1 a_2 \ldots a_n A_n^s}.$$

Pakėlę abi šios nelygybės puses laipsniu $n+s$ (8) savybė), turime

$$(A_n)^{n+s} \geqslant a_1 a_2 \ldots a_n (A_n)^s.$$

Padauginę pastarosios nelygybės abi puses iš $(A_n)^{-s}$ (5) savybė), gauname

$$(A_n)^n \geqslant a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Pagaliau, ištraukę n-tojo laipsnio šaknį (10) savybė), randame

$$A_n \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n},$$

arba

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Taigi (13) nelygybė įrodyta, kai n reikšmė bet kokia.

Įrodysime, kad (13) nelygybė tampa lygybe tada ir tik tada, kai $a_1=a_2=\dots=a_n$. Kai $a_1=a_2=\dots=a_n$, tai aišku, kad (13) sąryšis tampa lygybe. Įrodysime, kad (13) sąryšio kairioji ir dešinioji pusės yra nelygios viena kitai, kai bent du iš skaičių $a_1, a_2, \dots, a_n$ yra nelygūs vienas kitam. Tarkime, kad $a_1 \neq a_2$. Tada

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+\dots+a_n}{n} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3 \dots a_n}.$$

Kadangi $a_1 \neq a_2$, tai $\frac{a_1+a_2}{2} > \sqrt{a_1 a_2}$ (žr. pastabą apie (5) nelygybę, p. 61). Vadinasi, kai visi skaičiai $a_3, \dots, a_n$ yra teigiami, tai

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 a_3 \dots a_n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

ir todėl

$$\frac{a_1+a_2+\dots a_n}{n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (14)$$

Kai bent vienas iš skaičių $a_3, \dots, a_n$ yra lygus nuliui, tai (14) nelygybė, aišku, taip pat teisinga.

Koši – Buniakovskio nelygybė. *Bet kokiems realiesiems skaičiams $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ yra teisinga nelygybė*

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2). \quad (15)$$

(15) lygybė galima tada ir *tik tada, kai skaičiai a_k ir b_k yra proporcingi, t.y. kai egzistuoja du skaičiai α ir β, be to, tokie, kad $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$ ir lygybė*

$$\alpha a_k + \beta b_k = 0$$

yra teisinga su visais $k=1, 2, \dots, n$.

Įrodymas. Kai $a_1=a_2=\dots=a_n=0$, tai (15) sąryšis tampa lygybe. Sakykime, kad bent vienas iš skaičių $a_1, a_2, \dots, a_n$ nelygus nuliui, t.y. $a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2>0$. Išnagrinėsime reiškinį $(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\dots+(a_nx+b_n)^2$, kurį galima parašyti taip:

$$(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\dots+(a_nx+b_n)^2=ax^2+2bx+c; \quad (16)$$

čia

$$a=a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2, \quad b=a_1 b_1+a_2 b_2+\dots+a_n b_n,$$

$$c=b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2. \quad (17)$$

Kairioji (16) lygybės pusė su bet kokia realiąja x reikšme yra **neneigiama**, nes ji lygi realiųjų skaičių kvadratų sumai (skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ pagal sąlygą yra realieji). Vadinasi, ir dešinioji (16) lygybės pusė su bet kokiomis realiomis x reikšmėmis yra neneigiama, t.y. kvadratinis trinaris $ax^2+2bx+c$ su bet kokiu x įgyja neneigiamą reikšmę. Iš to išplaukia, kad kvadratinio trinario $ax^2+2bx+c$ diskriminantas yra neteigiamas: $4b^2-4ac\leqslant 0$. Taigi

$$b^2\leqslant ac. \tag{18}$$

Įrašę į (18) nelygybę a, b ir c išraiškas, apibrėžtas (17) lygybėmis, gauname

$$(a_1 b_1+a_2 b_2+\ldots+a_n b_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2).$$

(15) nelygybė įrodyta.

Dabar išaiškinsime, kada (15) sąryšyje galimas lygybės ženklas. Tarkime, kad (18) nelygybė tapo lygybe, t.y.

$$b^2=ac. \tag{19}$$

Kai $a=0$, t.y. $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$, tai parinkę $\alpha=1$, $\beta=0$ (parinkome taip, kad būtų $\alpha^2+\beta^2>0$), gausime $\alpha a_k+\beta b_k=0$, kai $k=1, 2, \ldots, n$. Dabar sakykime, kad $a\neq 0$. Tada kvadratinio trinario $ax^2+2bx+c$ diskriminantas lygus nuliui. Vadinasi, šis trinaris turi dvi sutampančias realias šaknis: $x_1=x_2$. Todėl

$$(a_1x_1+b_1)^2+(a_2x_1+b_2)^2+\ldots+(a_nx_1+b_n)^2=ax_1^2+2bx_1+c=0.$$

Bet taip gali būti tik tada, kai visi kairiosios pusės reiškiniai, esantys skliaustuose, bus lygūs nuliui:

$$a_kx_1+b_k=0 \ (k=1, 2, \ldots, n).$$

Pažymėję $\alpha=x_1$, $\beta=1$, šias lygybes galime parašyti taip:

$$\alpha a_k+\beta b_k=0 \ (k=1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Čia $\beta\neq 0$, todėl $\alpha^2+\beta^2>0$.

Taigi, kai (15) sąryšyje galimas lygybės ženklas, tai egzistuoja skaičiai α ir β, kurių bent vienas nelygus nuliui ir tokie, kad yra teisingos (20) lygybės. Nesunku, samprotaujant atvirkščia tvarka, patikrinti, kad, galiojant (20) lygybėms, (15) sąryšis tampa lygybe.

III skyriaus uždaviniai

3.1. Įrodykite šiuos teiginius:

1. $((a\geqslant b)\wedge(b>c))\Rightarrow(a>c)$.
2. $((a\geqslant b)\wedge(b\geqslant c))\Rightarrow(a\geqslant c)$.
3. $(a\geqslant b)\Rightarrow(a+c\geqslant b+c)$.
4. $((a\geqslant b)\wedge(c\geqslant d))\Rightarrow(a+c\geqslant b+d)$.
5. $((a\geqslant b)\wedge(c>d))\Rightarrow(a+c>b+d)$.
6. $((a\geqslant b)\wedge(c\geqslant 0))\Rightarrow(ac\geqslant bc)$.
7. $((a\geqslant b)\wedge(c\leqslant 0))\Rightarrow(ac\leqslant bc)$.
8. $((a\geqslant b\geqslant 0)\wedge(c\geqslant d\geqslant 0))\Rightarrow(ac\geqslant bd)$.
9. $((a\geqslant b>0)\wedge(c>d\geqslant 0))\Rightarrow(ac>bd)$.
10. $(a\geqslant b\geqslant 0)\Rightarrow(a^n\geqslant b^n)$.
11. $(a\geqslant b)\Rightarrow(a^{2n+1}\geqslant b^{2n+1})$.

3.2. Įrodykite, kad dvigubą nelygybę $a \leqslant c < b$ galima parašyti taip:

$$(a \leqslant c < b) \Leftrightarrow \big((a < c) \vee (a = c)\big) \wedge (c < b).$$

3.3. Įrodykite nelygybę $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geqslant 2$ (čia a – bet koks realusis skaičius).

3.4. Įrodykite, kad su bet kokiais realiaisiais skaičiais a, b ir c yra teisingos nelygybės.

1. $a^2+b^2+1 \geqslant ab+a+b$.
2. $5a^2-6ab+5b^2 \geqslant 0$.
3. $(a^2+b^2)(a^4+b^4) \geqslant (a^3+b^3)^2$.

3.5. Įrodykite, kad $bc \geqslant ad$, kai $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ ir $b+c=a+d$.

3.6. Įrodykite, kad su bet kokiomis realiomis a ir b reikšmėmis nelygybė

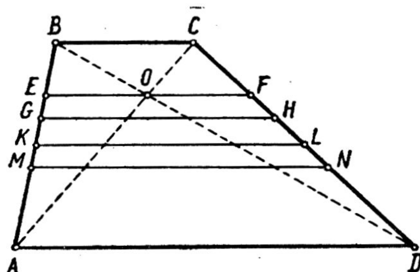
$$a^2+\alpha\, ab+b^2 \geqslant 0$$

yra teisinga, kai $-2 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

3.7. Tarkime, kad a ir b – bet kokie teigiamieji skaičiai. Šių skaičių harmoningu vidurkiu vadinamas skaičius $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, o kvadratiniu vidurkiu – skaičius $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Įrodykite šias vidurkių nelygybes:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Parodykite, kad šias nelygybes galima geometriškai taip interpretuoti (21 pav.). Tarkime, kad $ABCD$ – trapecija, kurios pagrindai $AD=a$, $BC=b$; O – įstrižainių susikirtimo taškas. Tada:



21 pav.

a) Dviejų skaičių a ir b aritmetinis vidurkis $\frac{a+b}{2}$ lygus trapecijos vidurinei linijai KL.

b) Šių skaičių geometrinis vidurkis $\sqrt{ab}$ lygus ilgiui atkarpos GH, kuri yra lygiagreti trapecijos pagrindams ir duotąją trapeciją dalija į dvi panašias trapecijas $BCHG$ bei $GHDA$.

c) Harmoningas vidurkis $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ lygus ilgiui atkarpos EF, kuri lygiagreti pagrindams ir eina per tašką O.

d) Kvadratinis vidurkis lygus ilgiui atkarpos MN, kuri yra lygiagreti pagrindams ir trapeciją $ABCD$ dalija į dvi lygiaplotes trapecijas.

3. 8. Įrodykite, kad bet kokiems teigiamiems skaičiams a ir b yra teisinga nelygybė

$$\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

3.9. Įrodykite, kad bet kokiems neneigiamiems skaičiams a ir b yra teisingos nelygybės:

1. $a^n+b^n \leqslant (a+b)^n$, čia n – natūrinis skaičius.
2. $\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.
3. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8 \geqslant 64ab\,(a+b)^2$.

3.10. Tarkime, kad a ir b – bet kokie neneigiami skaičiai, n, k – natūriniai skaičiai, be to, $k \leqslant n$. Įrodykite nelygybę

$$a^n+b^n \geqslant a^k\,b^{n-k}+b^k\,a^{n-k}.$$

3.11. Įrodykite, kad

$$(a+b)^n \leqslant 2^{n-1}\,(a^n+b^n),$$

kai a, b – neneigiami skaičiai, n – natūrinis skaičius.

3.12. Įrodykite, kad su bet kuriais realiaisiais skaičiais a, b, c yra teisinga nelygybė

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leqslant |a|+|b|+|c|.$$

3.13. Įrodykite, kad bet kokiems realiesiems skaičiams a ir b yra teisingos nelygybės:

1. $|a-b| \leqslant |a|+|b|$.
2. $|a+b| \geqslant ||a|-|b||$.

3.14. Tarkime, kad x, y, z – bet kokie realieji skaičiai. Įrodykite, kad skaičiai $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy+xz+yz$, $\sigma_3=xyz$ tenkina nelygybes:

1. $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$.
2. $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3$.

Toliau įrodykite, kad su teigiamomis x, y, z reikšmėmis yra teisingos nelygybės:

3. $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$.
4. $\sigma_1^3 \geqslant 27\sigma_3$.
5. $\sigma_2^3 \geqslant 27\sigma_3^2$.
6. $\sigma_1^3 \geqslant 3\sigma_1\sigma_2$.

Parodykite, kad 1, 3–6 sąryšiuose lygybės ženklas galimas tik tada, kai $x=y=z$.

3.15. Įrodykite, kad bet kokiems realiesiems skaičiams a, b ir c yra teisingos nelygybės:

1. $(a+b+c)^2 \leqslant 3(a_2+b^2+c^2)$.
2. $(a+b-c)^2+(b+c-a)^2+(a+c-b)^2 \geqslant ab+bc+ac$.

3.16. Įrodykite, kad bet kokiems neneigiamiems skaičiams x, y, z galioja nelygybė

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}.$$

3.17. Įrodykite, kad bet kokiems neneigiamiems skaičiams a, b, c, x, y, z galioja nelygybės:

1. $ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)\geqslant 0$.
2. $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geqslant 6\,abc$.
3. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)\geqslant 2(a+b)(b+c)(c+a)$.
4. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\geqslant 9abc$.
5. $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)\leqslant xyz$.
6. $\sigma_1^3-4\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3\geqslant 0$, kai $\sigma_1=x+y+z$, $\sigma_2=xy+xz+yz$, $\sigma_3=xyz$.

3.18. Įrodykite, kad bet kokiems teigiamiems skaičiams a, b, c, x, y, z yra teisingos nelygybės:

1. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$.
2. $\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\geqslant\frac{x+y+z}{3}$.
3. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9$.
4. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$.
5. $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$.
6. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

3.19. Įrodykite, kad bet kokiems neneigiamiems skaičiams a, b, c yra teisingos nelygybės:

1. $2(a^3+b^3+c^3)\geqslant ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)$.
2. $2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)$.
3. $3(a^3+b^3+c^3)\geqslant(a+b+c)(ab+ac+bc)$.
4. $8(a^3+b^3+c^3)\geqslant 3(a+b)(b+c)(c+a)$.
5. $(a+b+c)^3\leqslant 9(a^3+b^3+c^3)$.
6. $a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c)$.

3.20. Įrodykite, kad su bet kokiomis neneigiamomis a, b, c, d reikšmėmis yra teisinga nelygybė

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geqslant\sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

3.21. Įrodykite, kad su bet kokiais realiaisiais skaičiais a, b, c, d yra teisinga nelygybė

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 4abcd.$$

3.22. Įrodykite, kad

$$|a+b|<|1+ab|,$$

kai $|a|<1$, $|b|<1$.

3. 23. Įrodykite, kad

$$\left|\frac{1}{a-b}\right|<\frac{2}{|a|},$$

kai $|b|<\frac{|a|}{2}$.

3.24. Įrodykite, kad

$$ab+bc+ca\leqslant 0,$$

kai a, b, c – bet kokie realieji skaičiai, tenkinantys sąlygą $a+b+c=0$.

3.25. Įrodykite, kad

$$|a+b|\leqslant\sqrt{2},$$

kai realieji skaičiai a ir b tenkina sąlygą $a^2+b^2=1$.

3.26. Įrodykite, kad

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 12,$$

kai realieji skaičiai a, b, c tenkina sąlygą $a+b+c=6$.

3.27. Įrodykite, kad

$$\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}<4, \text{ kai } a\geqslant -\frac{1}{2},\quad b\geqslant -\frac{1}{2},$$

$$c\geqslant -\frac{1}{2} \text{ ir } a+b+c=1.$$

3.28. Įrodykite, kad su realiomis a, b, c reikšmėmis, tenkinančiomis sąlygas $a+b\geqslant c$, $c\geqslant 0$, yra teisingos nelygybės:

1. $a^2+b^2\geqslant\frac{c^2}{2}$. 2. $a^4+b^4\geqslant\frac{c^4}{8}$. 3. $a^8+b^8\geqslant\frac{c^8}{128}$.

3.29. Įrodykite, kad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n},$$

kai n – bet koks natūrinis skaičius.

3.30. Įrodykite nelygybę

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{99}{100}<\frac{1}{10}.$$

3.31. Įrodykite nelygybę

$$S_n=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}<\frac{1}{4}.$$

3.32. Įrodykite, kad su natūrinėmis skaičiaus $n>1$ reikšmėmis yra teisingos nelygybės:

1. $(1+a)^n>1+an$, kai $a>-1$;
2. $(1+a)^n>1+C_n^k\cdot a^k$, kai $a>0$ $(k=1, 2, \ldots, n)$.

3.33. Įrodykite, kad su kiekvienu natūriniu $n \geqslant 1$ yra teisinga nelygybė

$$\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2.$$

3.34. Įrodykite, kad su kiekvienu natūriniu $n>2$ yra teisinga nelygybė

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3.$$

3.35. Tarkime, kad teigiamieji skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad

$$\sqrt{a_1 a_n} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_n}{2}.$$

Iš pastarosios nelygybės gaukite nelygybę $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$, kuri yra teisinga su kiekvienu natūriniu $n>2$.

3.36. Įrodykite, kad su kiekvienu natūriniu $n>2$ yra teisinga nelygybė

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

3.37. Įrodykite, kad su kiekvienu natūriniu $n>2$ yra teisingos nelygybės

$$1<\sqrt[n]{n}<1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

3.38. Įrodykite, kad su kiekvienu sveikuoju skaičiumi $n \geqslant 2$ yra teisingos nelygybės

$$\sqrt{n}<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}.$$

3.39. Sakykime, kad m ir n – sveikieji skaičiai, be to, $0 \leqslant n \leqslant m$, $a>0$. Įrodykite nelygybę

$$a^m+\frac{1}{a^m} \geqslant a^n+\frac{1}{a^n}.$$

3.40. Tarkime, kad $a>0$, n – natūrinis skaičius. Įrodykite, kad

$$n(1+a^{2n})-a^n \geqslant a^{2n-1}+a^{2n-2}+\ldots+a^2+a.$$

3.41. Įrodykite, kad

$$A \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \leqslant B;$$

čia A – mažiausias, B – didžiausias iš skaičių

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,\ |a_n|.$$

3.42. Tarkime, kad $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – teigiamieji skaičiai, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – bet kokie realieji skaičiai. Didžiausią iš trupmenų $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ pažymėsime raide M, o mažiausią – m. Įrodykite, kad

$$m \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} \leqslant M.$$

3.43. Įrodykite, kad bet kokiems realiesiems skaičiams $a_1, a_2, \ldots, a_n$ yra teisinga nelygybė

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2 \leqslant n(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2).$$

3.44. Įrodykite nelygybes

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}},$$

siejančias teigiamųjų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_n$ harmoningąjį, geometrinį, aritmetinį ir kvadratinį vidurkius.

3.45. Tarkime, kad realieji skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tenkina sąlygą a_1+ $+a_2+\ldots+a_n=0$. Įrodykite, kad

$$s=a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n \leqslant 0.$$

(sumą s sudaro visi galimi dėmenys a_ia_j, $i \neq j$).

3.46. Įrodykite, kad su bet kokiais realiaisiais skaičiais $a_1, a_2, \ldots, a_n$; $b_1, b_2, \ldots, b_n$ yra teisingos nelygybės:

1. $$\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2} \geqslant$$ $$\geqslant \sqrt{(a_1+b_1)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2}.$$

2. $$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2}\right| \leqslant$$ $$\leqslant |a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|.$$

3. 47. Sakykime, kad

$$m_k=\frac{1^k}{2}+\frac{2^k}{3}+\frac{3^k}{4}+\ldots+\frac{100^k}{101}$$

(čia $k=1, 2, 3, \ldots$). Įrodykite, kad $m_k^2 \leqslant m_{k+1}\, m_{k-1}$.

IV SKYRIUS

KOMPLEKSINIAI SKAIČIAI

§ 1. Įvadas

Antrajame skyriuje nagrinėjome realiuosius skaičius. Realiųjų skaičių aibėje galima spręsti tiesines lygtis, kvadratines lygtis, kurių diskriminantas neneigiamas, lygtis $x^n=a$, kai $a\geqslant 0$, ir kitokias. Tačiau yra tokių algebrinių lygčių (ir netgi su sveikaisiais koeficientais), kurios neturi realiųjų šaknų. Tokios lygtys, pavyzdžiui, yra kvadratinės, kurių diskriminantas neigiamas. Paprasčiausioji iš jų – lygtis $x^2+1=0$. Natūralu, kad, prijungdami naujus skaičius, norime taip išplėsti realiųjų skaičių aibę, jog šioje išplėstoje skaičių aibėje kvadratinės lygtys, kurių diskriminantas neigiamas, kaip tik ir lygtis $x^2+1=0$, turėtų šaknis. Su tokiu būdu jau susipažinome antrajame skyriuje: teigiamųjų skaičių aibėje kai kurių lygčių $x+b=a$ negalėjome išspręsti, todėl įvedėme neigiamuosius skaičius; kadangi negalėjome išspręsti su sveikaisiais skaičiais kai kurių lygčių $bx=a$, įvedėme trupmeninius skaičius ir t.t.

Įvesime naują skaičių i, kurį laikysime lygties $x^2+1=0$ šaknimi, t.y. tarsime, kad skaičius i tenkina sąlygą $i^2+1=0$. Toliau realiųjų skaičių aibę išplėsime taip, kad naujai skaičių aibei priklausytų visi realieji skaičiai bei skaičius i ir kad šioje aibėje būtų galimos sudėties ir daugybos operacijos. Todėl pirmiausia reikia susitarti, ką vadinsime naujų skaičių suma, sandauga bei lygybe. Aišku, kad šiai aibei turi priklausyti sandauga bi ir suma $a+bi$, apibrėžtos bet kokiems realiesiems skaičiams a ir b. Reiškinius $a+bi$ susitarsime vadinti *kompleksiniais skaičiais.*

Įsidėmėtina, kad kompleksinių skaičių dar neapibrėžėme, o tik aptarėme, kaip jie galėtų atrodyti. Šie samprotavimai kol kas netikslūs ir jų negalima laikyti kompleksinių skaičių aibės apibrėžimu. Tačiau čia mokiniai dažnai klysta. Jie sako, kad iš lygybės $i^2+1=0$ išplaukia $i=\sqrt{-1}$, ir į klausimą „Kas yra kompleksinis skaičius?“ dažnai atsako: „Kompleksinis skaičius – tai reiškinys $a+bi$, kuriame $i=\sqrt{-1}$“. Toks atsakymas yra klaidingas. Realiųjų skaičių aibėje simboliu $\sqrt{\ }$ žymima aritmetinė šaknis iš *teigiamojo* skaičiaus, todėl reiškinys $\sqrt{-1}$ neturi prasmės. Ženklas „+“, kuris vartojamas realiųjų skaičių sudėčiai žymėti, reiškinyje $a+bi$ irgi neturi ankstesnės prasmės, nes skaičius bi – nerealusis.

Šį klaidingą apibrėžimą galima pabandyti „ištaisyti“ tokiu būdu: „Kompleksiniai skaičiai – tai formalūs reiškiniai $a+bi$; čia a ir b – realieji skaičiai, o i – tam tikras simbolis“. Toks kompleksinio skaičiaus apibrėži-

mas yra nepilnas. Iš jo negalima gauti veiksmų su kompleksiniais skaičiais taisyklių ir tų veiksmų savybių.

Norėdami išsamiai atsakyti į iškeltą klausimą, pratęskime negriežtus samprotavimus, susijusius su naujų skaičių įvedimu. Kaip pageidautina apibrėžti veiksmus su šiais skaičiais? Kompleksinių skaičių sudėtį pabandysime apibrėžti taip, kad jiems galiotų visos tos veiksmų taisyklės, kurias nagrinėjome II skyriuje. Tada skaičius $a+bi$ ir $c+di$ turėsime sudėti taip:

$$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)\,i.$$

Analogiškai pagal šią taisyklę atimti turėsime taip:

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)\,i.$$

Dauginti pabandysime taip, kad išliktų tie patys veiksmų dėsniai, kurie galioja realiesiems skaičiams. Tada gausime

$$(a+bi)\,(c+di)=ac+(ad+bc)\,i+bdi^2.$$

Prisiminę, kad $i^2+1=0$, t.y. $i^2=-1$ (juk norime, kad galiotų visos veiksmų savybės, taigi ir lygybių pertvarkymo taisyklės), gauname, kad kompleksinių skaičių daugybą reikia apibrėžti taip:

$$(a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i.$$

Pagaliau susitariame, kokius kompleksinius skaičius reikia laikyti lygiais. Pradėsime nuo kompleksinio skaičiaus lygybės nuliui. Iš lygybės $a+bi=0$ turi išplaukti, kad $b=0$, nes priešingu atveju būtų $\frac{a}{b}+i=0$, $i=-\frac{a}{b}$, t.y. i būtų realusis skaičius. O tai neįmanoma, nes joks realusis skaičius nėra lygties $x^2+1=0$ šaknis. Taigi, kai $a+bi=0$, tai $b=0$. Tada $bi=0$, ir todėl $a=0$. Vadinasi, skaičių $a+bi$ reikia laikyti lygiu nuliui tik tada, kai $a=b=0$. Toliau, jeigu skaičiai $a+bi$ ir $c+di$ yra lygūs vienas kitam, tai $(a+bi)-(c+di)=0$, t.y. $(a-c)+(b-d)\,i=0$. Bet tada $a-c=0$ ir $b-d=0$, t.y. $a=c$ ir $b=d$. Taigi kompleksinių skaičių lygybę reikia apibrėžti taip: $a+bi=c+di$, kai $a=c$ ir $b=d$.

Apibrėždami kompleksinius skaičius, turime kartu susitarti ir dėl veiksmų su jais. Išsiaiškinome, kaip galima tai padaryti, kad išliktų tos pačios veiksmų taisyklės, kurios galioja realiųjų skaičių aibėje. Dar kartą akcentuojame, kad šie samprotavimai nėra veiksmų su kompleksiniais skaičiais taisyklių „įrodymai“. Jų tikslas – padėti suvokti, kaip būtų galima natūraliau įvesti kompleksinio skaičiaus sąvoką.

Dabar tiksliai apibrėšime kompleksio skaičių.

§ 2. Kompleksinio skaičiaus apibrėžimas

Apibrėžimas. *Kompleksiniais skaičiais* vadinami reiškiniai $a+bi$ (čia a ir b – realieji skaičiai, o i – tam tikras simbolis), kai šiems reiškiniams lygybės sąvoka ir sudėties bei daugybos operacijos yra apibrėžtos taip:

1. Du kompleksiniai skaičiai $a+bi$ ir $c+di$ yra *lygūs* tada ir tik tada, kai $a=c$ ir $b=d$.

2. Dviejų kompleksinių skaičių $a+bi$ ir $c+di$ *suma* vadinamas kompleksinis skaičius $(a+c)+(b+d)\,i$.

3. Dviejų kompleksinių skaičių $a+bi$ ir $c+di$ *sandauga* vadinamas kompleksinis skaičius $(ac-bd)+(ad+bc)\,i$.

Štai toks yra kompleksinio skaičiaus apibrėžimas.

Kompleksinį skaičių įprasta žymėti viena raide (dažniausiai raide z). Lygybė $z=a+bi$ reiškia, kad kompleksinis skaičius $a+bi$ yra pažymėtas raide z. Veiksmai su kompleksiniais skaičiais žymimi tais pačiais ženklais, kuriais žymimi veiksmai realiųjų skaičių aibėje: dviejų kompleksinių skaičių z' ir z'' lygybė žymima $z'=z''$; toliau skaičių z_1 ir z_2 suma žymima z_1+z_2, o jų sandauga $z_1 \cdot z_2$, arba z_1z_2. Taigi dviejų kompleksinių skaičių $a+bi$ ir $c+di$ sudėties ir daugybos apibrėžimus galima parašyti taip:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)\,i,$$

$$(a+bi)\,(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)\,i.$$

Realusis skaičius a vadinamas kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ *realiąja komponente* ir žymimas simboliu $\operatorname{Re} z$. Vadinasi, kompleksiniam skaičiui $z=a+bi$ galima parašyti $\operatorname{Re} z=a$ arba $\operatorname{Re}(a+bi)=a$. Skaičius b vadinamas kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ *menamąja komponente* ir žymimas simboliu $\operatorname{Im} z$. Taigi $\operatorname{Im}(a+bi)=b$. Simbolis i vadinamas *menamuoju vienetu.*

Atkreipiame dėmesį į tai, kad ženklas „+“ reiškinyje $a+bi$ kol kas nereiškia sudėties veiksmo, o užrašas bi irgi dar formalus. Tačiau užrašas $a+bi$ neatsitiktinis. Jis išplaukia iš tokių prielaidų.

Išnagrinėsime kompleksinius skaičius, kurių išraiška $a+0\cdot i$. Tokios išraiškos skaičių sudėties ir daugybos formules pagal kompleksinių skaičių sudėties ir daugybos apibrėžimą galima parašyti taip:

$$(a_1+0 \cdot i)+(a_2+0 \cdot i)=(a_1+a_2)+0 \cdot i,$$

$$(a_1+0 \cdot i) \cdot (a_2+0 \cdot i)=(a_1a_2)+0 \cdot i.$$

Taigi, sudėję ir sudauginę skaičius, kurių išraiška $a+0 \cdot i$, gauname tos pačios išraiškos skaičius. Jeigu sutartume rašyti $a+0 \cdot i=a$ (t.y. sutartume skaičių $a+0 \cdot i$ sutapatinti su realiuoju skaičiumi a), tai matytume, kad operacijos su skaičiais, kurių išraiška $a+0 \cdot i$, atliekamos taip pat, kaip ir realiųjų skaičių aibėje. Tada galima laikyti, jog kiekvienas realusis skaičius a priklauso kompleksinių skaičių aibei, iš tikrųjų $a=a+0 \cdot i$. Būtent skaičių $0=0+0 \cdot i$ vadinsime paprastai *nuliu,* o skaičių $1=1+0\cdot i$ – *vienetu.*

Skaičiai, kurių išraiška $0+bi$, vadinami *menamaisiais skaičiais* (arba *grynai menamaisiais*) ir žymimi taip: $0+bi=bi$. Būtent, skaičių $0+1 \cdot i$ žymime $0+1\cdot i=i$. Įsidėmėtina, kad pagal šį apibrėžimą skaičių $0=0+0\cdot i$ irgi reikia laikyti grynai menamuoju. Skaičius 0 – vienintelis kompleksnis skaičius, kuris yra ir realusis, ir grynai menamasis.

Taip žymėdami, kiekvieną kompleksinį skaičių galime parašyti taip: $a+bi=(a+0 \cdot i)+(b+0 \cdot i) \cdot (0+1 \cdot i)$. Vadinasi, galima laikyti, kad

ženklas „+“ kompleksinio skaičiaus $a+bi$ apibrėžime reiškia skaičių a ir bi sudėtį, o užrašas bi yra skaičių b ir i sandauga.

Skaičių i^2 apskaičiuosime tiesiogiai, remdamiesi kompleksinių skaičių daugybos apibrėžimu:

$$i^2=i\cdot i=(0+1\cdot i)(0+1\cdot i)=-1+0\cdot i=-1.$$

Taigi po bet kurio tarpinio veiksmo arba galutiniame rezultate skaičių i^2 galima pakeisti skaičiumi -1. Būtent, lygybė $i^2=-1$ yra priežastis, kad mokiniai kartais rašo $i=\sqrt{-1}$. Jau prieš tai minėjome, kad šis užrašas yra nekorektiškas, nes simboliu $\sqrt{\ }$ žymima aritmetinė šaknis iš teigiamojo skaičiaus.

§ 3. Veiksmų savybės

Dabar, tiksliai apibrėžę kompleksinius skaičius, jau galėsime nagrinėti veiksmų su šiais skaičiais savybes. Natūralu tikėtis, kad kompleksinių skaičių sudėties ir daugybos veiksmai turės tokias pat savybes, kokias turi realiųjų skaičių sudėtis ir daugyba, – juk būtent taip „parinkome“ kompleksinių skaičių apibrėžimą. Be to, ir atvirkštinių operacijų (atimties ir dalybos) savybės, atrodo, tinka taip pat, kaip ir realiesiems skaičiams. Tiksliau tariant, yra teisingos šios 1 ir 2 teoremos.

1 teorema. *Sudėtis kompleksinių skaičių aibėje turi tokias savybes:*

1. *Bet kokiems kompleksiniams skaičiams* z_1 *ir* z_2 *galioja* sudėties komutatyvumo dėsnis: $z_1+z_2=z_2+z_1$.

2. *Bet kokiems kompleksiniams skaičiams* z_1, z_2, z_3 *galioja* sudėties asociatyvumo dėsnis: $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

3. *Bet kokiam kompleksiniam skaičiui* z *galioja* lygybė $z+0=z$.

4. *Kokie bebūtų du kompleksiniai skaičiai* z_1 *ir* z_2, *visada egzistuoja, ir, be to, tik vienas, skaičius* z, *tenkinantis lygtį* $z+z_2=z_1$.

Įrodymas. Įrodysime 1 savybę. Tarkime, kad

$$z_1=a_1+b_1i,\quad z_2=a_2+b_2i.$$

Pagal kompleksinių skaičių sudėties apibrėžimą galima parašyti

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\,i,$$

$$z_2+z_1=(a_2+a_1)+(b_2+b_1)\,i.$$

Iš realiųjų skaičių savybių išplaukia, kad

$$a_1+a_2=a_2+a_1,\ b_1+b_2=b_2+b_1,$$

t.y. skaičių z_1+z_2 ir z_2+z_1 realiosios ir menamosios dalys yra lygios. Taigi iš kompleksinių skaičių lygybės apibrėžimo išplaukia $z_1+z_2=z_2+z_1$, o tai ir reikėjo įrodyti.

2 ir 3 savybės įrodomos analogiškai. Jas siūlome įrodyti patiems. Įsidėmėtina, kad reiškiniai $z_1+z_2+z_3$, $z_1+z_2+z_3+z_4$ ir kt. turi prasmę tik po to, kai įrodyta 2 savybė.

Įrodysime 4 savybę. Tarkime, kad $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, $z=x+yi$; čia realieji skaičiai x ir y yra nežinomi. Pagal sudėties apibrėžimą

$$z+z_2=(x+a_2)+(y+b_2)\,i.$$

Lygybė $z+z_2=z_1$ pagal kompleksinių skaičių lygybės apibrėžimą galima tada ir tik tada, kai

$$x+a_2=a_1 \text{ ir } y+b_2=b_1.$$

Remdamiesi veiksmų realiųjų skaičių aibėje taisyklėmis, randame

$$x=a_1-a_2,\ y=b_1-b_2.$$

Vadinasi, įrodėme, kad lygybė $z+z_2=z_1$ galima tada ir tik tada, kai

$$z=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\,i.$$

Tuo baigiasi 1 teoremos įrodymas.

Panagrinėsime kompleksinių skaičių atimtį. *Atimtis* apibrėžiama kaip veiksmas, atvirkščias sudėčiai. Tai reiškia, kad dviejų kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 *skirtumu* vadinamas toks skaičius z, kuris tenkina lygtį $z+z_2=z_1$; kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 skirtumas žymimas z_1-z_2. Kitaip tariant, užrašas $z=z_1-z_2$ pagal apibrėžimą reiškia tą patį, kaip ir užrašas $z+z_2=z_1$. Iš 1 teoremos 2 savybės išplaukia, kad kompleksinių skaičių skirtumas vienareikšmiškai apibrėžiamas formule

$$(a_1+b_1i)-(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\,i.$$

Pastebėsime, kad skirtumas $0-z$ (z – bet koks kompleksinis skaičius), kaip ir realiesiems skaičiams, žymimas $-z$, t.y. $0-z=-z$. Iš čia išplaukia, kad skirtumą z_1-z_2 galima parašyti taip: $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$.

2 teorema. *Daugyba kompleksinių skaičių aibėje turi tokias savybes:*

1. *Bet kokiems kompleksiniams skaičiams z_1 ir z_2 galioja* daugybos komutatyvumo dėsnis: $z_1z_2=z_2z_1$.

2. *Bet kokiems kompleksiniams skaičiams z_1, z_2, z_3 galioja* daugybos asociatyvumo dėsnis: $(z_1z_2)\,z_3=z_1\,(z_2z_3)$.

3. *Bet kokiems kompleksiniams skaičiams z_1, z_2, z_3 galioja* distributyvumo dėsnis: $z_1\,(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

4. *Bet kokiam kompleksiniam skaičiui z galioja* lygybė $1\cdot z=z$.

5. *Kokie bebūtų du kompleksiniai skaičiai z_1 ir z_2* ($z_2\neq 0$), *visada egzistuoja, ir, be to, tik vienas, skaičius z, tenkinantis lygtį $zz_2=z_1$.*

Įrodymas. Įrodysime 5 savybę. Tarkime, kad

$$z_1=a_1+b_1i,\ z_2=a_2+b_2i,\ z=x+yi;$$

čia realieji skaičiai x ir y yra nežinomi. Pagal daugybos apibrėžimą

$$zz_2=(xa_2-yb_2)+(xb_2+ya_2)\,i.$$

Lygybė $zz_2=z_1$ pagal kompleksinių skaičių lygybės apibrėžimą galima tada ir tik tada, kai

$$xa_2-yb_2=a_1 \text{ ir } xb_2+ya_2=b_1.$$

Gavome kintamųjų x ir y atžvilgiu tiesinę sistemą, kurios determinantas $a_2^2+b_2^2\neq 0$, nes $z_2\neq 0$. Vadinasi, ši sistema turi vienintelį sprendinį:

$$x=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\quad y=\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

Taigi įrodėme, kad su bet kokiais kompleksiniais skaičiais $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$, kai $z_2\neq 0$, lygtis $zz_2=z_1$ yra išsprendžiama vienareikšmiškai ir ji turi tokį sprendinį:

$$z=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i. \qquad (1)$$

5 savybė įrodyta.

2 teoremos 1–4 savybės įrodomos taip pat, kaip ir 1 teoremos 1–3 savybės. Siūlome jas įrodyti patiems.

Atkreipiame dėmesį, kad reiškiniai $z_1z_2z_3$, $z^3=zzz$ ir kt. turi prasmę tik po to, kai įrodyta 2 teoremos 2 savybė.

Panagrinėsime kompleksinių skaičių dalybą. *Dalyba* vadinamas veiksmas, atvirkščias daugybai. Tai reiškia, kad dviejų kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 *dalmeniu*, kai $z_2\neq 0$, vadinamas toks skaičius z, kuris tenkina lygtį $zz_2=z_1$; dviejų kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 dalmuo žymimas $z_1 : z_2$ arba $\frac{z_1}{z_2}$. Kitaip tariant, užrašas $z=\frac{z_1}{z_2}$ pagal apibrėžimą reiškia tą patį, kaip ir užrašas $zz_2=z_1$. Iš 2 teoremos 5 savybės išplaukia, kad bet kurių kompleksinių skaičių $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ ($z_2\neq 0$) dalmuo yra vienareikšmiškai apibrėžtas ir turi tokią išraišką:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i.$$

Kompleksinių skaičių aibėje, kaip ir realiųjų skaičių aibėje, dalyba iš nulio neturi prasmės, t.y. dalmuo $\frac{z}{0}$, koks bebūtų z, yra neapibrėžtas.

Pastaba. Iš kompleksinio skaičiaus apibrėžimo išplaukia, kad kompleksinių skaičių sudėties ir daugybos formulės, žiūrint formaliai, yra tokios pat, kaip ir algebrinių reiškinių $a+bi$ sudėties ir daugybos formulės. Be to, po kiekvieno tarpinio veiksmo arba galutiniame rezultate skaičių i^2 galima pakeisti skaičiumi -1. 1 ir 2 teoremoje įrodyta, kad kompleksinių skaičių sudėties ir daugybos savybės, taip pat atvirkščiųjų operacijų (atimties ir dalybos) savybės yra tokios pat, kaip realiųjų skaičių.

1 pavyzdys. Kompleksinių skaičių $\frac{3-2i}{1+i}$ išreikškite algebrine forma, t.y. suteikite jam išraišką $a+bi$.

Sprendimas. Pritaikę kompleksinių skaičių dalybos formulę, turime

$$\frac{3-2i}{1+i}=\frac{3\cdot 1+(-2)\cdot 1}{1^2+1^2}+\frac{1\cdot(-2)-3\cdot 1}{1^2+1^2}i=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i.$$

Atkreipiame dėmesį, kad § 4 bus išnagrinėtas kitas kompleksinių skaičių dalybos būdas.

2 pavyzdys. Raskite kompleksinio skaičiaus $(2+i)^3$ realiąją ir menamąją komponentes.

Sprendimas. Pritaikę dviejų skaičių sumos kubo formulę, gauname

$$(2+i)^3=8+3\cdot 2^2\cdot i+3\cdot 2\cdot i^2+i^3.$$

Pakeitę i^2 skaičiumi -1, turime

$$(2+i)^3=8+12i-6-i=2+11i.$$

Vadinasi, $\operatorname{Re}(2+i)^3=2$, $\operatorname{Im}(2+i)^3=11$.

§ 4. Kompleksinio skaičiaus modulis. Jungtiniai kompleksiniai skaičiai

Apibrėžimas. Kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ *moduliu* $|z|$ vadinamas skaičius $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Reikia įsidėmėti, kad $|z|$ visada yra realusis neneigiamas skaičius: $|z|\geqslant 0$, be to, $|z|=0$ tada ir tik tada, kai $z=0$.

Kai z – realusis skaičius, tai $|z|$ yra jo absoliutinis didumas; todėl modulis ir absoliutinis didumas žymimi vienodai.

Iš kompleksinio skaičiaus modulio apibrėžimo nesunku gauti, kad bet kokiems kompleksiniams skaičiams z, z_1, z_2 yra teisingos lygybės:

1. $|z_1 z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$.
2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$, kai $z_2\neq 0$.
3. $|z^n|=|z|^n$, kai n – bet koks sveikasis skaičius (be to, kai $n<0$, tai tariame, kad $z\neq 0$).

Siūlome skaitytojams patiems įrodyti 1–3 lygybes.

Apibrėžimas. Kompleksiniai skaičiai $a-bi$ ir $z=a+bi$ vadinami *vienas kitam jungtiniais*. Vienas kitam jungtinis skaičius z žymimas $\bar{z}$:

$$\bar{z}=\overline{a+bi}=a-bi.$$

Iš šio apibrėžimo lengva gauti, kad bet kokiems kompleksiniams skaičiams z, z_1, z_2 galioja lygybės:

1. $\overline{(z_1\pm z_2)}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$.
2. $\overline{(z_1 z_2)}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$.
3. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, kai $z_2\neq 0$.
4. $\overline{(\bar{z})}=z$.
5. $z\bar{z}=|z|^2$.
6. $|z|=|\bar{z}|$.
7. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$, kai $z_2\neq 0$.

Siūlome skaitytojams patiems įrodyti 1–7 lygybes.

Pastaba. 7 formulę galima įrodyti tokiu būdu. Padauginę trupmenos $\frac{z_1}{z_2}$ skaitiklį ir vardiklį iš skaičiaus $\bar{z}_2$, gauname $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}$. Kadangi $z_2\bar{z}_2=|z_2|^2$, tai

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}. \qquad (2)$$

Pagal (2) formulę patogu dalyti kompleksinius skaičius. Išspręskite tokiu būdu 1 pavyzdį (p. 80). Padauginę trupmenos $\frac{3-2i}{1+i}$ skaitiklį ir vardiklį iš skaičiaus $\overline{1+i}=1-i$, gauname

$$\frac{3-2i}{1+i}=\frac{(3-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{3-3i-2i+2i^2}{|1+i|^2}=\frac{3-5i-2}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i.$$

(2) formulė tuo patogi, kad, skaičiuojant dviejų kompleksinių skaičių dalmenį, nereikia atsiminti kompleksinių skaičių dalybos formulės (1) (p. 80).

3 pavyzdys. Įrodykite, kad su bet kokiais kompleksiniais skaičiais z_1 ir z_2 yra teisinga lygybė

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2.$$

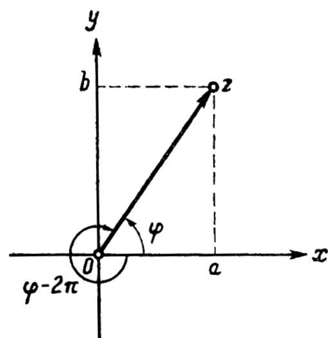
Sprendimas. Pritaikę jungtinių kompleksinių skaičių 5 ir 1 savybes, gauname

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=$$
$$=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=2z_1\bar{z}_1+2z_2\bar{z}_2=2|z_1|^2+2|^2z_2|^2,$$

o tai ir reikėjo įrodyti.

§ 5. Geometrinė kompleksinio skaičiaus interpretacija

Nagrinėsime stačiakampę koordinačių sistemą plokštumoje. Kompleksinį skaičių $a+bi$ sutarsime vaizduoti plokštumos tašku, kurio koordinatės (a, b) (22 pav.). Kitaip tariant, abscisių ašyje atidėsime kompleksinių skaičių realiąsias komponentes, o ordinačių ašyje – menamąsias. Taip sutarus, realieji skaičiai bus vaizduojami abscisių ašies taškais, o grynai menamieji skaičiai – ordinačių ašies taškais, todėl abscisių ašis dar vadinama *realiąja ašimi*, o ordinačių – *menamąja ašimi*. Atvirkščiai, kiekvieną plokštumos tašką su koordinatėmis (a, b) atitinka kompleksinis skaičius $a+bi$. Vadinasi, visų kompleksinių skaičių aibės ir visų plokštumos taškų atitiktis yra abipus vienareikšmė. Todėl ateityje kompleksinio skaičiaus ir plokštumos taško sąvokų neskirsime ir sakysime tiesiog, pavyzdžiui, „taškas $z=1-i$“, „trikampis, kurio viršūnės yra taškuose z_1, z_2, z_3“ ir t. t.

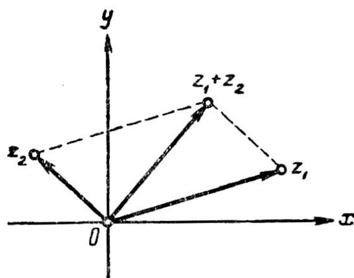


22 pav.

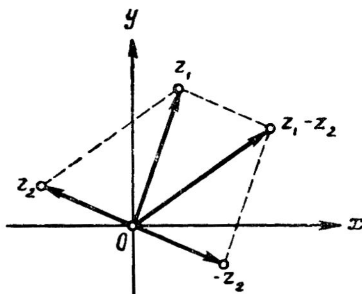
Įsidėmėtina, kad kiekvieną plokštumos tašką (a, b) atitinka vienas ir tik vienas vektorius, kurio pradžia yra taške $(0, 0)$ (koordinačių pradžioje) ir galas taške (a, b). Todėl kompleksinį skaičių $a+bi$ sutarsime dar vaizduoti vektoriumi, kurio pradžia taške $z=0$ ir galas taške $z=a+bi$ (22 pav.).

Iš kompleksinio skaičiaus geometrinės interpretacijos išplaukia tokios savybės:

1. Vektoriaus z ilgis lygus $|z|$.
2. Taškai z ir $\bar{z}$ yra simetriški realiosios ašies atžvilgiu.
3. Taškai z ir $-z$ yra simetriški taško $z=0$ atžvilgiu.
4. Skaičius z_1+z_2 geometriškai vaizduojamas vektoriumi, nubrėžtu pagal vektorių z_1 ir z_2 sudėties taisyklę (23 pav.).
5. Atstumas tarp taškų z_1 ir z_2 lygus $|z_1-z_2|$.



23 pav.



24 pav.

Siūlome skaitytojams patiems įrodyti 1—4 savybes.

Įrodysime 5 savybę. Nubrėžiame vektorių z_1-z_2 kaip vektorių z_1 ir $-z_2$ sumą (24 pav.). Iš trikampių, kurių viršūnės yra taškuose 0, z_1, z_2 ir 0, z_1, z_1-z_2, lygybės išplaukia, kad vektoriaus z_1-z_2 ilgis lygus atstumui tarp taškų z_1 ir z_2, o tai ir reikėjo įrodyti.

4 pavyzdys. Taškų z, tenkinančių sąlygą $|z-z_0|=R$, aibė yra apskritimas, kurio centras taške z_0 ir spindulys R, nes sąlyga $|z-z_0|=R$ reiškia, kad atstumas nuo kiekvieno taško z iki taško z_0 yra lygus R.

5 pavyzdys. Taškų z, tenkinančių sąlygą $|z-z_1|=|z-z_2|$, aibė yra tiesė, statmena atkarpai, jungiančiai taškus z_1 bei z_2, ir einanti per šios atkarpos vidurio tašką. Iš tikrųjų lygtį $|z-z_1|=|z-z_2|$ tenkina visi taškai z, vienodai nutolę nuo taškų z_1 ir z_2 (ir tik šie taškai).

6 pavyzdys. Taškų z, tenkinančių sąlygą $\operatorname{Im} z>0$, aibė yra viršutinė pusplokštumė (t.y. aibė taškų, kurie yra virš realiosios ašies). Tai išplaukia iš to, kad nelygybę $\operatorname{Im} z>0$, kai $z=x+yi$, galima pakeisti nelygybe $y>0$.

§ 6. Kompleksinio skaičiaus argumentas

Apibrėžimas. Kompleksinio skaičiaus $z\neq0$ *argumentu* vadinamas kampas tarp realiosios ašies ir vektoriaus z, atskaitomas nuo realiosios ašies teigiamos krypties. Be to, kaip įprasta, kampo didumas laikomas teigiamu, jeigu atskaitoma prieš laikrodžio rodyklę, ir neigiamu, jeigu atskaitoma pagal laikrodžio rodyklę.

Kompleksinio skaičiaus $z=a+bi$ argumentas φ žymimas $\varphi=\arg z$ arba $\varphi=\arg(a+bi)$.

Skaičiaus $z=0$ argumentas neapibrėžiamas. Todėl, toliau nagrinėdami klausimus, susijusius su argumento sąvoka, laikysime, kad $z\neq 0$.

Įsidėmėtina, kad fiksuoto skaičiaus $z\neq 0$ argumentas apibrėžiamas nevienareikšmiškai: kai φ – tam tikras skaičiaus z argumentas, tai kampai $\varphi+2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) taip pat yra skaičiaus z argumentai (žr. 22 pav.). Taigi kiekvieną skaičių z atitinka begalinė aibė jo argumentų, kurie vienas nuo kito skiriasi skaičiumi, kartotiniu skaičiui 2π.

Kai $\varphi=\arg(a+bi)$, tai iš trigonometrinių funkcijų apibrėžimo išplaukia (22 pav.), kad

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{3}$$

Teisingas ir atvirkščias tvirtinimas: kai galioja abi (3) lygybės, tai $\varphi=\arg(a+bi)$. Vadinasi, kartu išsprendę (3) lygtis, galėsime rasti visas argumentų reikšmes. Be to, norint rasti tą ketvirtį, kuriame yra taškas $z=a+bi$, pravartu remtis kompleksinio skaičiaus geometrine interpretacija. Akcentuojame: norint nustatyti tą ketvirtį, kuriame yra taškas $z=a+bi$, reikia taikyti abi (3) lygybes (arba remtis kompleksinio skaičiaus geometrine interpretacija) ir tik po to argumentui rasti galima pasinaudoti viena (bet kuria) (3) lygtimi.

7 pavyzdys. Raskite skaičiaus $z=1-i$ argumentą.

Sprendimas. Kadangi $\operatorname{Re} z=1$, $\operatorname{Im} z=-1$, tai taškas $z=1-i$ yra IV ketvirtyje. Todėl pakanka rasti vienos iš (3) lygčių tokį sprendinį, kuris būtų IV ketvirčio kampas. Randame

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \varphi=\frac{7\pi}{4}+2k\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Jeigu $\varphi=\arg(a+bi)$, $a\neq 0$, tai iš (3) išplaukia, kad $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$. Bet atvirkščias teiginys yra klaidingas: iš to, kad $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$, negalima daryti išvados, jog $\varphi=\arg(a+bi)$. Pavyzdžiui, kai $z=-1-i$, lygtis $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=1$ turi sprendinį $\varphi=\frac{\pi}{4}$, kuris nėra šio skaičiaus argumentas.

Bet jeigu iš pradžių, pritaikę geometrinę interpretaciją, nustatytume ketvirtį, kuriame yra taškas $a+bi$, o po to rastume lygties $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$ tokį sprendinį, kuris būtų to ketvirčio kampas, tai gautume skaičiaus $a+bi$ argumentą.

8 pavyzdys. Raskite skaičiaus $-1-i$ argumentą.

Sprendimas. Taškas $-1-i$ priklauso III ketvirčiui. Todėl reikia rasti tokį lygties $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$ sprendinį, kuris būtų III ketvirčio kampas. Randame

$$\operatorname{tg}\varphi=1, \quad \varphi=\frac{5\pi}{4}+2k\pi \qquad (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

§ 7. Kompleksinio skaičiaus trigonometrinė forma

Tarkime, kad r – kompleksinio skaičiaus $a+bi$ modulis, o φ – kuris nors vienas jo argumentų, t. y. $r=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi=\arg(a+bi)$. Tuomet iš (3) formulių išplaukia, kad $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$. Taigi

$$a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Nesunku įrodyti ir atvirkščią teiginį: kai yra teisinga lygybė $a+bi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (čia $r>0$), tai $r=|a+bi|$, $\varphi=\arg(a+bi)$.

Apibrėžimas. Kompleksinio skaičiaus z išraiška

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

(čia $r>0$) vadinama jo *trigonometrine forma.*

Taigi bet kokį kompleksinį skaičių $z\neq 0$ galima parašyti trigonometrine forma

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad r>0,$$

be to, ši lygybė yra teisinga tada ir tik tada, kai $r=|z|$, $\varphi=\arg z$.

Būtina suvokti, kad, išreiškę kompleksinį skaičių trigonometrinėmis funkcijomis, ne visada turėsime jo trigonometrinę formą. Pavyzdžiui, užrašas

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

yra skaičiaus $1+i$ trigonometrinė froma. Bet užrašas

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

arba

$$1+i=-\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

nėra skaičiaus $1+i$ trigonometrinė forma.

Nesunku įrodyti, kad du kompleksiniai skaičiai $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, parašyti trigonometrine forma, yra lygūs tada ir tik tada, kai $r_1=r_2$ ir $\varphi_1=\varphi_2+2k\pi$; čia k – tam tikras sveikasis skaičius.

3 teorema. *Tarkime, kad* $\varphi_1=\arg z_1$, $\varphi_2=\arg z_2$. *Tada* $\varphi_1+\varphi_2=\arg(z_1z_2)$.

Įrodymas. Skaičius z_1 ir z_2 išreikšime trigonometrine forma: $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$; čia $r_1=|z_1|$, $r_2=|z_2|$. Dabar apskaičiuosime skaičių z_1 ir z_2 sandaugą:

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=\\ &=r_1r_2\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\\ &+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big)=\\ &=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \end{aligned}$$

Kadangi $r_1r_2>0$, tai šis reiškinys yra skaičiaus z_1z_2 trigonometrinė forma. Vadinasi, $\varphi_1+\varphi_2=\arg(z_1z_2)$. Teorema įrodyta.

Įsidėmėtina, kad iš šio įrodymo išplaukia lygybė $|z_1 z_2|=r_1 r_2=|z_1|\,|z_2|$. Taigi turime dar vieną 1 savybės, suformuluotos 81 puslapyje, įrodymo būdą. Vadinasi, *dviejų kompleksinių skaičių sandaugos modulis lygus dauginamųjų modulių sandaugai, o dauginamųjų argumentų suma lygi sandaugos argumentui.*

Atkreipiame dėmesį, kad formulė

$$z_1 z_2=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)=$$
$$=r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big),$$

kurią gavome 3 teoremos įrodymo eigoje, apibrėžia kompleksinių skaičių, išreikštų trigonometrine forma, daugybos taisyklę.

Kai $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ yra atitinkami skaičių $z_1, z_2, \ldots, z_n$ argumentai, tai, pritaikius 3 teoremą, nesunku matematinės indukcijos metodu įrodyti, kad $\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n=\arg(z_1 z_2 \ldots z_n)$.

4 teorema. *Kai* $\varphi_1=\arg z_1$ ir $\varphi_2=\arg z_2$, *tai* $\varphi_1-\varphi_2=\arg\dfrac{z_1}{z_2}$.

Norint įrodyti šią teoremą, užtenka remtis 3 teorema. Iš 4 teoremos išplaukia, kad dviejų kompleksinių skaičių z_1 ir z_2 ($z_2\neq 0$), išreikštų trigonometrine forma

$$z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),\quad z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$

dalybą galima apibrėžti formule

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).$$

Kitaip tariant, *dviejų kompleksinių skaičių dalmens modulis lygus dalinio ir daliklio modulių dalmeniui, o dalinio ir daliklio argumentų skirtumas lygus dalmens argumentui.*

5 teorema. *Kompleksinio skaičiaus* $z\neq 0$, *išreikšto trigonometrine forma* $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, *kėlimą sveikuoju laipsniu* n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) *galima apibrėžti formule*

$$z^n=\big(r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\big)^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

Kai φ *— bet koks skaičius ir* n *— bet koks sveikasis skaičius, tai teisinga lygybė*

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

(Muavro formulė).

5 teorema lengvai įrodoma matematinės indukcijos metodu (pagal 3 teoremą, kai $n>0$, ir pagal 4 teoremą, kai $n<0$).

Iš to, kas pasakyta, aišku, kad kompleksinius skaičius patogu dauginti, dalyti ir kelti sveikuoju laipsniu, kai jie išreikšti trigonometrine forma.

9 pavyzdys. Kompleksinį skaičių $(1-i)^8$ išreikškite algebrine forma, t.y. suteikite jam išraišką $a+bi$.

Sprendimas. Kompleksinio skaičiaus $1-i$ modulis yra $\sqrt{2}$, o argumentas lygus $\frac{7\pi}{4}$. Taigi pagal kėlimo sveikuoju laipsniu formulę gauname

$$(1-i)^8=(\sqrt{2})^8(\cos 14\pi+i\sin 14\pi)=16.$$

Kompleksinį skaičių išreiškus trigonometrine forma, taip pat patogu spręsti lygtis $z^n=z_0$; čia z_0 – duotas kompleksinis skaičius, n – natūrinis skaičius.

10 pavyzdys. Raskite visus lygties $z^2=i$ sprendinius.

Sprendimas. Skaičių i parašome trigonometrine forma: $i=\cos\frac{\pi}{2}+$ $+i\sin\frac{\pi}{2}$. Tarkime, kad $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Tada lygtį $z^2=i$ galima pakeisti lygtimi

$$r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Iš čia randame $r=1$, $2\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, t.y. $\varphi=\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Taigi visi lygties $z^2=i$ sprendiniai apibrėžiami formule

$$z=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Kai k – bet koks lyginis skaičius, iš jos gauname

$$z_1=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}},$$

o kai k – bet koks nelyginis skaičius, tai gauname

$$z_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Taigi lygtis $z^2=i$ turi dvi šaknis:

$$z_{1,2}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

Bendru atveju lygties $z^n=z_0$ (n – natūrinis skaičius) sprendinius galima apibrėžti taip. Tarkime, kad $z_0=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$ – kompleksinio skaičiaus z_0 trigonometrinė forma. Tada visos lygties $z^n=z_0$ šaknys išreiškiamos formule

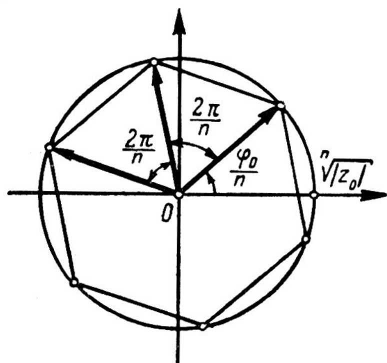
$$z=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right);$$

čia $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Iš to nesunku padaryti išvadą, kad taškai, vaizduojantys visas lygties $z^n=z_0$ šaknis, yra taisyklingojo n-kampio, įbrėžto į apskritimą su centru taške $z=0$ ir spinduliu $\sqrt[n]{|z_0|}$, viršūnės. Įrodyti šiuos tvirtinimus paliekame skaitytojams.

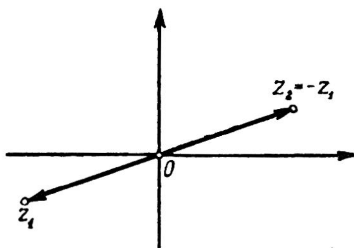
Kai $n=2$ ir $z_0=r_0\,(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$, iš išvestos formulės gauname, kad lygtis $z^2=z_0$ turi dvi šaknis:

$$\left.\begin{aligned} z_1&=\sqrt{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{2}+i\sin\frac{\varphi_0}{2}\right),\\ z_2&=\sqrt{r_0}\left(\cos\left(\frac{\varphi_0}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}+\pi\right)\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Šios šaknys yra simetriškos koordinačių pradžios atžvilgiu, t.y. $z_2=-z_1$ (26 pav.). Įsidėmėtina, kad šaknys z_1 ir z_2 yra visiškai lygiateisės: nėra jokių objektyvių priežasčių, dėl kurių vieną šaknį turėtume laikyti „pirmąja“ arba „pagrindine“. Juk skaičiaus z_0 argumentas yra ne tik φ_0, bet ir $\varphi_0+2\pi$. Kai į (4) formulę vietoj φ_0 įrašytume $\varphi_0+2\pi$, tai z_1 ir z_2 susikeistų vietomis. Tai rodo, kad šaknys z_1 ir z_2 yra lygiateisės. Jeigu vieną (kurią nors) šių šaknų sutartume žymėti $\sqrt{z_0}$, tai antroji būtų $-\sqrt{z_0}$. Dabar aišku, kad kompleksinių skaičių aibėje simbolis $\sqrt{z_0}$ neturi vienareikšmės prasmės, t.y., norėdami rašyti šį simbolį, kiekvieną kartą turime nurodyti, kuri lygties $z^2=z_0$ šaknis pažymėta $\sqrt{z_0}$. Todėl kvadratinės šaknies ženklas kompleksinių skaičių aibėje paprastai nevartojamas. Tačiau yra viena išimtis: spręsdami kvadratines lygtis, kurių diskriminantas neigiamas, traukiame kvadratinę šaknį iš neigiamojo skaičiaus. Apie tai dar užsiminsime kitame skyriuje.



25 pav.



26 pav.

IV skyriaus uždaviniai

4.1. Kompleksinius skaičius išreikškite algebrine forma $a+bi$:

1. $(1+2i)(2-i)+(1-2i)(2+i)$.

2. $\dfrac{5}{1+2i}+\dfrac{5}{2-i}$. 3. $\dfrac{1-i}{1+i}+\dfrac{1+i}{1-i}$.

4. $\dfrac{(1+i)(2+i)}{2-i}-\dfrac{(1-i)(2-i)}{2+i}$.

4.2. Raskite kompleksinių skaičių realiąją ir menamąją komponentes:

1. $(3+2i)^2$. 2. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

3. $(2+3i)^2-(2-3i)^2$. 4. $(2-i)^3$.

5. $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$. 6. $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

4.3. Įrodykite, kad su bet kokiu kompleksiniu skaičiumi z yra teisingos lygybės:

$$z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z, \quad z-\bar{z}=2i\operatorname{Im} z.$$

4.4. Įrodykite, kad $\overline{P(z)}=P(\bar{z})$, kai $P(z)$ – daugianaris su realiaisiais koeficientais.

4.5. Įrodykite, kad bet kokiems kompleksiniams skaičiams z_1 ir z_2 yra teisingos lygybės:

1. $|z_1\bar{z}_2+1|^2+|z_1-z_2|^2=(|z_1|^2+1)(|z_2|^2+1)$.
2. $|z_1\bar{z}_2-1|^2-|z_1-z_2|^2=(|z_1|^2-1)(|z_2|^2-1)$.
3. $|z_1+z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2-2\big(|z_1\bar{z}_2|-\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\big)$.
4. $|z_1+z_2|^2=(|z_1|-|z_2|)^2+2\big(|z_1\bar{z}_2|+\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)\big)$.

4.6. Kokia geometrinė lygybės

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

prasmė?

4.7. Ką geometriškai reiškia kompleksinės plokštumos taškų aibė, kai taškai tenkina sąlygas:

1. $\operatorname{Re} z>0$. 2. $\operatorname{Im} z\leqslant 0$.

3. $0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1$. 4. $|\operatorname{Im} z|<1$.

5. $|z|\leqslant 1$. 6. $|z+2i|<4$.

7. $|z-i|>1$. 8. $1<|z-1|<2$.

9. $|z+i|=|z-1|$. 10. $|1+z|<|1-z|$?

4.8. Įrodykite, kad su bet kokiu kompleksiniu skaičiumi z yra teisingos nelygybės

$$\operatorname{Re} z\leqslant|z|, \quad \operatorname{Im} z\leqslant|z|.$$

4.9. Įrodykite (algebriškai ir geometriškai), kad bet kokiems kompleksiniams skaičiams z_1 ir z_2 yra teisingos nelygybės

$$\big||z_1|-|z_2|\big|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

4.10. Kompleksinius skaičius parašykite trigonometrine forma:

1. i. 2. -2.

3. $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. 4. $i^{121}+1$.

5. $\frac{1-i}{1+i}$. 6. $-\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}$.

7. $(-3+4i)^3$. 8. $(1+i)^8(1-i\sqrt{3})^6$.

4.11. Įrodykite lygybę

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n=\frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha},$$

kai n – sveikasis skaičius, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $n\alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots)$.

4.12. Išreiškę kompleksinį skaičių $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3$ algebrine forma ir pritaikę dviejų skaičių sumos kubo bei Muavro formules, įrodykite lygybes:

$$\cos 3\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\sin^2\alpha,$$
$$\sin 3\alpha=3\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha.$$

4.13. Išspręskite lygtis:

1. $z^2=-i$.
2. $z^3=1$.
3. $z^6=64$.
4. $z^7=-1$.
5. $z^8=1+i$.
6. $z^2=3-4i$.

4.14. Įrodykite, kad visas lygties $z^2=a+bi$ (čia a ir b – realieji skaičiai) šaknis galima išreikšti formulėmis

$$z_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

kai $b\geqslant 0$, ir

$$z_{1,2}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right),$$

kai $b<0$.

4.15. Tarkime, kad $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ – taisyklingojo n-kampio, įbrėžto į apskritimą, kurio centras taške $z=0$, viršūnės, nuosekliai sunumeruotos prieš laikrodžio rodyklę. Kompleksinį skaičių z_k išreikškite skaičiumi $z_0\ (k=1, 2, \ldots, n-1)$.

4.16. Raskite visas lygčių šaknis:

1. $\bar{z}=z^3$.
2. $|z|-z=1+2i$.
3. $z+|z+1|+i=0$.
4. $|z|^2-2iz+2i=0$.
5. $z|z|+2z+i=0$.

4.17. Išspręskite lygčių sistemas:

1. $\begin{cases}|z-2i|=|z|,\\ |z-i|=|z-1|.\end{cases}$
2. $\begin{cases}|z^2-2i|=4,\\ \left|\dfrac{z+1+i}{z-1-i}\right|=1.\end{cases}$

4.18. Įrodykite, kad skaičius $\frac{z-1}{z+1}$ yra realusis tada ir tik tada, kai z – realusis skaičius, $z\neq-1$.

4.19. Įrodykite, kad skaičius $\frac{z-1}{z+1}$ yra grynai menamasis tada ir tik tada, kai $|z|=1$, $z\neq-1$.

4.20. Įrodykite, kad trys skirtingi taškai z_1, z_2 ir z_3 yra vienoje tiesėje tada ir tik tada, kai santykis $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ yra realusis skaičius.

4.21. Tarkime, kad $|z_k|=1\ (k=1, 2, 3)$. Įrodykite, jog taškai z_1, z_2, z_3 yra taisyklingojo trikampio viršūnės tada ir tik tada, kai

$$z_1+z_2+z_3=0.$$

V SKYRIUS

KVADRATINIS TRINARIS

§ 1. Kvadratinis trinaris ir jo šaknys

Kvadratiniu trinariu kintamojo x atžvilgiu vadinamas reiškinys

$$ax^2+bx+c; \tag{1}$$

čia a, b, c – tam tikri skaičiai, be to, $a\neq 0$. Skaičiai a, b, c vadinami kvadratinio trinario *koeficientais*. Susitarsime ateičiai, kad a, b, c – realieji skaičiai.

Kintamojo x reikšmės, su kuriomis kvadratinis trinaris lygus nuliui, vadinamos trinario *šaknimis*. Taigi, norint rasti kvadratinio trinario šaknis, reikia išspręsti kvadratinę lygtį

$$ax^2+bx+c=0. \tag{2}$$

Priminsime, kaip sprendžiama (2) kvadratinė lygtis; be to, šiek tiek patikslinsime tuos faktus, kurie paprastai dėstomi mokykloje.

Spręsdami (2) kvadratinę lygtį, (1) kvadratiniame trinaryje išskiriame dvinario kvadratą, t.y. parašome taip (priminsime, kad $a\neq 0$):

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x\right)+c=$$

$$=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Vadinasi, (2) lygtį galima pakeisti lygtimi

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0,$$

arba, perkėlus trupmeną į dešiniąją pusę ir padalijus iš a, lygtimi

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \tag{3}$$

(3) lygtis yra ekvivalenti (2) lygčiai, t.y. turi tokias pat šaknis, kaip ir (2) lygtis. Iš tiesų, jeigu tam tikra x reikšmė tenkina (2) lygtį, tai, kaip matyti iš atliktų pertvarkymų, ši reikšmė tenkina ir (3) lygtį. Bet šiuos pertvarkymus galima atlikti ir atvirkščia tvarka, t.y., kai skaičius x tenkina (3) lygtį, tai jis tenkins ir (2) lygtį.

Kitaip tariant, (2) lygybė yra teiginio funkcija, kuri su vienomis x reikšmėmis (būtent, su trinario šaknimis) yra teisingas teiginys, o su kitomis –

klaidingas. Lygiai taip pat (3) lygybė irgi yra teiginio funkcija. (2) ir (3) lygčių ekvivalentumą sąlygoja tai, kad šios abi teiginio funkcijos kartu yra teisingos arba klaidingos.

Taigi belieka išspręsti (3) lygtį. Skaičius b^2-4ac vadinamas kvadratinio trinario (1) *diskriminantu*, jį įprasta žymėti raide D. Vadinasi, (3) lygtį galima parašyti taip:

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{D}{4a^2}; \text{ čia } D=b^2-4ac. \qquad (4)$$

Dabar reikia išnagrinėti tris skirtingus atvejus – priklausomai nuo to, koks yra skaičius D.

a) Kai skaičius D yra teigiamas, tai skaičius $\frac{D}{4a^2}$ irgi yra teigiamas. Todėl egzistuoja du skaičiai, kurių kvadratai yra lygūs $\frac{D}{4a^2}$: tai bus skaičiai $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ ir $-\frac{\sqrt{D}}{2a}$ (čia, kaip visada, $\sqrt{D}$ – aritmetinė šaknis iš teigiamojo skaičiaus D). Bet (4) formulė rodo, kad $x+\frac{b}{2a}$ yra kaip tik toks skaičius, kurio kvadratas lygus $\frac{D}{4a^2}$. Vadinasi, yra du atvejai, kada x tenkina (4) lygtį:

1) kai $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{2a}$ $\left(\text{ir tada } x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)$;

2) kai $x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{D}}{2a}$ $\left(\text{ir tada } x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$.

Vadinasi, kai $D>0$, (4) lygtis, o kartu ir (2) lygtis turi dvi šaknis:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \quad x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \qquad (5)$$

(čia $D=b^2-4ac$). Šiuo atveju abi šaknys x_1, x_2 yra realios, be to, $x_1\neq x_2$ (t.y. lygtis iš tikrųjų turi dvi šaknis).

b) Kai skaičius D lygus nuliui, tai iš (4) lygties gauname lygtį

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0.$$

Bet skaičiaus kvadratas lygus nuliui tik tada, kai pats skaičius lygus nuliui. Todėl gauname

$$x+\frac{b}{2a}=0, \text{ arba } x=-\frac{b}{2a}.$$

Taigi, kai $D=0$, (4) lygtis, o kartu ir (2) lygtis turi tik vieną šaknį $x=-\frac{b}{2a}$, t.y. *egzistuoja tik vienas skaičius* $\left(\text{būtent, } -\frac{b}{2a}\right)$, tenkinantis šią lygtį. Tačiau dėl vienodumo laikome, kad ir šiuo atveju (2) lygtis turi

dvi šaknis, tik jos abi sutampa. Kitaip tariant, sutarta, kad ir tada, kai $D=0$, (2) lygtis turi dvi šaknis:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

Aišku, tą patį gauname ir iš (5) formulių, įrašę į jas $D=0$. Taigi, jeigu sutarsime, kai $D=0$, šaknį $x = -\frac{b}{2a}$ pakartoti du kartus (arba, kaip sakoma, sutarsime ją laikyti *antrojo kartotinumo šaknimi*), tai ir šiuo atveju šaknų formulės ((5) formulės) galios. Ateityje ne kartą įsitikinsime, kad ir kitais atvejais toks susitarimas (kai $D=0$, šaknį laikyti kartotine šaknimi) bus patogus: kitaip daugelyje teoremų dėl šio atvejo tektų specialiai daryti išlygas. Todėl matematikoje įprasta laikyti, kad (2) lygtis, kai $D=0$, turi dvi sutampančias šaknis. Tačiau skaitytojas turi aiškiai suvokti, kad tai tik *susitarimo* reikalas: kai $D=0$, tai tik vienas realusis skaičius $\left(\text{būtent, } -\frac{b}{2a}\right)$ tenkina (2) lygtį.

c) Liko atvejis, kai D yra neigiamas. Tada skaičius $\frac{D}{4a^2}$ irgi neigiamas. Kadangi realiojo skaičiaus kvadratas negali būti neigiamas, tai (2) *lygtis* šiuo atveju *neturi realiųjų šaknų.* Kaip žinome, egzistuoja du kompleksiniai skaičiai, kurių kiekvieno kvadratas yra lygus neigiamajam skaičiui D (žr. p. 88). Šie skaičiai yra grynai menami ir, be to, jungtiniai. Jeigu sutarsime vieną jų (nesvarbu kurį) žymėti $\sqrt{D}$, tai kitas bus $-\sqrt{D}$. Tada skaičiai, kurių kiekvieno kvadratas lygus neigiamam skaičiui $\frac{D}{4a^2}$, bus grynai menamieji skaičiai $\frac{\sqrt{D}}{2a}$ ir $-\frac{\sqrt{D}}{2a}$ (kitų tokių skaičių nėra). Bet pagal (4) lygtį išeina, kad $x+\frac{b}{2a}$ yra skaičius, kurio kvadratas lygus $\frac{D}{4a^2}$. Vadinasi, yra du atvejai, kada x tenkina (4) lygtį, o kartu ir (2) lygtį:

1) kai $x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{D}}{2a}$ $\left(\text{ir tada } x=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\right)$;

2) kai $x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{D}}{2a}$ $\left(\text{ir tada } x=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)$.

Taigi ir dabar, kai $D<0$, (2) lygtis turi dvi šaknis, kurios apskaičiuojamos pagal (5) formules ir yra kompleksiniai jungtiniai skaičiai. Dar kartą pabrėžiame, kad šis tvirtinimas, kai sutarta ženklu $\sqrt{D}$ žymėti kurį nors vieną kompleksinį skaičių, kurio kvadratas lygus neigiamam skaičiui D, yra sąlyginis. Tai iš tiesų tik sąlygiškas susitarimas, nes pagal apibrėžimą ženklu $\sqrt{}$ žymima aritmetinė šaknis iš teigiamojo realiojo skaičiaus. Kompleksinių skaičių aibėje šis ženklas neturi vienareikšmės prasmės. Bet visgi, sprendžiant kvadratines lygtis, kurių diskriminantai yra neigiami, sutarta, kad $\sqrt{D}$ reiškia vieną iš dviejų skaičių, kurio kvadratas lygus D. Tada (5) formulių prasmė lieka tokia pat ir tada, kai $D<0$.

Taigi, taip susitarus (ir tik tada!), yra teisinga tokia teorema.

1 teorema. *Kvadratinis trinaris* ax^2+bx+c *su realiaisiais koeficientais* a, b, c $(a\neq 0)$ *visada turi dvi šaknis, apibrėžtas* (5) *formulėmis.* Šios šaknys yra:

a) *realios ir skirtingos, kai* $D>0$;

b) *realios ir sutampančios, kai* $D=0$;

c) *kompleksinės jungtinės, kai* $D<0$.

Išvada. *Sudėję ir sudauginę* (1) *kvadratinio trinario šaknis* x_1, x_2 (žr. (5) formules), *gauname*

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\quad x_1x_2=\frac{c}{a}. \tag{6}$$

(6) formulės vadinamos *Vijetos formulėmis.*

Taikant Vijetos formules, kvadratinį trinarį ax^2+bx+c galima išskaidyti dauginamaisiais:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \tag{7}$$

Arba detaliau galioja tokia teorema.

2 teorema. *Tarkime, kad* x_1, x_2 – *kvadratinio trinario* ax^2+bx+c *šaknys. Tuomet su bet kokia* x *reikšme yra teisinga* (7) *formulė.*

Įrodymas. Iš (6) formulių išplaukia, kad

$$b=-a(x_1+x_2),\quad c=ax_1x_2.$$

Todėl su bet kokia (realiąja arba kompleksine) x reikšme turime

$$ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2=$$
$$=ax(x-x_1)-ax_2(x-x_1)=a(x-x_1)(x-x_2).$$

1 pavyzdys. Tarkime, kad x_1 ir x_2 yra kvadratinės lygties ax^2+bx+ $+c=0$ $(a\neq 0)$ šaknys. Nespręsdami šios lygties, sumą $x_1^3+x_2^3$ išreikškite 2 lygties koeficientais.

Sprendimas. Turime $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)$ $\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)$. Pritaikę Vijetos formules, gauname

$$x_1^3+x_2^3=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-3\frac{c}{a}\right)=\frac{b(3ac-b^2)}{a^3}.$$

2 pavyzdys. Įrodykite, kad kvadratinio trinario x^2+px+q šaknys x_1 ir x_2 yra realios ir teigiamos tada ir tik tada, kai

$$D=p^2-4q\geqslant 0,\ p<0,\ q>0. \tag{8}$$

Įrodymas. Būtinumas. Tarkime, kad trinario šaknys yra teigiamos:

$$x_1>0,\ x_2>0. \tag{9}$$

Parodysime, kad galioja (8) sąlygos. Iš (9) nelygybių išplaukia, kad $x_1+x_2>0$ bei $x_1x_2>0$, ir todėl, taikydami (6) Vijetos formules, gauname $p<0$, $q>0$. Be to, $D=p^2-4q\geqslant 0$ (nes, kai $D<0$, šaknys nebūtų realios).

Pakankamumas. Tarkime, kad galioja (8) nelygybės. Parodysime, kad kvadratinio trinario x^2+px+q šaknys yra teigiamos, t.y. galioja (9)

nelygybės. Kadangi $D \geqslant 0$, tai, remiantis 1 teorema, trinario šaknys yra realios. Pagal Vijetos formules

$$-p = x_1 + x_2 > 0, \quad q = x_1 x_2 > 0. \tag{10}$$

Iš nelygybės $x_1 x_2 > 0$ išplaukia, kad realieji skaičiai x_1 ir x_2 yra vienodų ženklų (arba abu teigiami, arba abu neigiami), o iš pirmosios (10) nelygybės $x_1 + x_2 > 0$ išplaukia, kad šie skaičiai yra teigiami. Taigi $x_1 > 0$; $x_2 > 0$.

Pastaba. Reikalavimas $D \geqslant 0$, suformuluotas šio pavyzdžio sąlygoje, yra esminis: kvadratinio trinario $x^2 - 2x + 2$ šaknys lygios $x_1 = 1 + i$, $x_2 = 1 - i$ ir tenkina (10) nelygybes, o (9) nelygybių netenkina.

§ 2. Kvadratinio trinario grafikas

Funkciją

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{11}$$

kai a, b, c — realieji skaičiai, be to, $a \neq 0$, vadinsime *kvadratine* funkcija. Nors y reikšmę pagal (11) formulę galima apskaičiuoti su bet kokiomis kompleksinėmis x reikšmėmis, šią funkciją nagrinėsime, tarę, kad argumentas x įgyja tik realiąsias reikšmes. (11) formulėje x gali įgyti bet kokią realiąją reikšmę. Kitaip tariant, kvadratinės funkcijos (11) apibrėžimo sritis yra visų realiųjų skaičių aibė.

Norėdami išnagrinėti (11) funkciją ir nubrėžti jos grafiką, reiškinyje $ax^2 + bx + c$ vėl išskirsime dvinario kvadratą:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}. \tag{12}$$

Trumpumo dėlei pažymėsime:

$$m = -\frac{b}{2a}, \quad l = -\frac{D}{4a}. \tag{13}$$

Tuomet (12) formulė įgis išraišką

$$y = a(x - m)^2 + l. \tag{14}$$

Toliau parodysime, kaip braižomas (11) funkcijos grafikas. Dėl to iš pradžių išnagrinėsime paprastesnės funkcijos

$$y = ax^2 \tag{15}$$

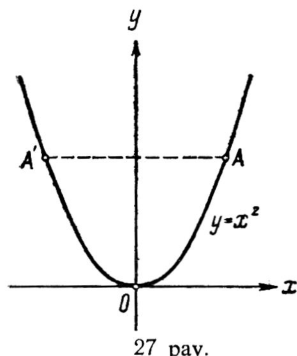
grafiką, o paskui parodysime, kad (11) funkcijos grafiką galima postūmiu gauti iš (15) funkcijos grafiko.

Funkcijos $y = x^2$ grafikas. Iš pradžių išnagrinėsime (15) funkciją, kai $a = 1$, t.y. funkciją

$$y = x^2. \tag{16}$$

Ši funkcija su visomis realiomis x reikšmėmis yra neneigiama. Jos mažiausioji reikšmė lygi nuliui, kai $x = 0$.

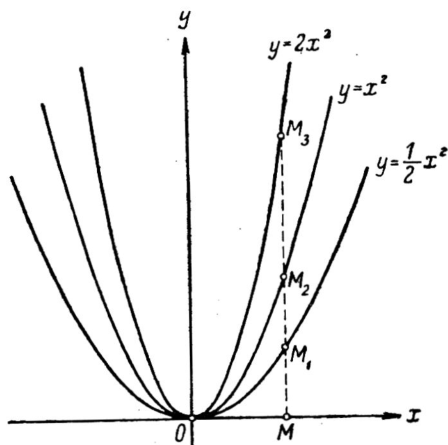
Be to, kai $x>0$, funkcija $y=x^2$ yra didėjanti (didesnę argumento x reikšmę atitinka didesnė funkcijos reikšmė). Iš tikrųjų, kai $0<x_1<x_2$, tai $x_2-x_1>0$, $x_2+x_1>0$. Todėl skaičius $(x_2-x_1)(x_2+x_1)$ kaip teigiamų skaičių sandauga yra teigiamas, t.y. $x_2^2-x_1^2>0$ arba $x_1^2<x_2^2$.



27 pav.

Pagaliau kiekvieną argumento reikšmių porą, kai tos reikšmės yra priešingų ženklų, bet turi lygius absoliutinius didumus, atitinka vienodos funkcijos $y=x^2$ reikšmės, nes $(-x_0)^2=x_0^2$. Kitaip tariant, funkcija $y=x^2$ yra *lyginė*. Tai reiškia, kad *jos grafikas yra simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu.* Todėl, norint nubraižyti funkcijos $y=x^2$ grafiką, pakanka nubrėžti tą grafiko dalį, kuri atitinka teigiamas x reikšmes, o paskui šią grafiko dalį reikia simetriškai atvaizduoti ordinačių ašies atžvilgiu.

27 pav. pavaizduotas funkcijos $y=x^2$ grafikas (taškas A' yra simetriškas taškui A Oy ašies atžvilgiu). Šis grafikas vadinamas *parabole*. Ordinačių ašis yra parabolės *simetrijos ašis*. Parabolės ir jos simetrijos ašies susikirtimo taškas vadinamas parabolės *viršūne*. Taigi taškas O (koordinačių pradžia) – parabolės $y=x^2$ viršūnė.



28 pav.

Funkcijos $y=ax^2$ grafikas. Panagrinėsime, kaip braižomas funkcijos $y=ax^2$ grafikas, kai a – bet koks skaičius, nelygus nuliui. Atskirai ištirsime atvejus $a>1$, $0<a<1$, $a<0$.

a) Atvejis $a>1$. Su viena ir ta pačia x reikšme funkcijos $y=ax^2$ reikšmė yra a kartų didesnė už funkcijos $y=x^2$ reikšmę Vadinasi, funkcijos $y=ax^2$ grafiko taškas gaunamas iš atitinkamo funkcijos $y=x^2$ grafiko taško, ištempiant pastarojo ordinatę a kartų. Jis bus aukščiau, negu atitinkamas funkcijos $y=x^2$ grafiko taškas. Taigi funkcijos $y=ax^2$ grafikas, kai $a>1$, gaunamas iš funkcijos $y=x^2$ grafiko, ištempiant pastarojo visas ordinates a kartų, ir todėl yra aukščiau už funkcijos $y=x^2$ grafiką (turėdamas su juo vieną bendrą tašką – koordinačių pradžią). Galima pasakyti, kad parabolė $y=ax^2$, kai $a>1$, yra „siauresnė“, negu parabolė $y=x^2$ (žr. funkcijos $y=2x^2$ grafiką 28 pav.).

b) Atvejis $0<a<1$. Dabar funkcijos $y=ax^2$ grafiko taškai yra gaunami iš atitinkamų funkcijos $y=x^2$ grafiko taškų, suspaudžiant pastarųjų

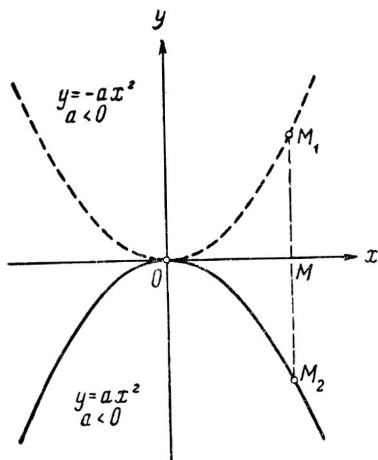
ordinates $\frac{1}{a}$ kartų. Kadangi $\frac{1}{a}>1$, tai funkcijos $y=ax^2$ grafiko taškai, kai $0<a<1$, yra žemiau atitinkamų funkcijos $y=x^2$ grafiko taškų. Taigi parabolė $y=ax^2$, kai $0<a<1$, yra „platesnė“, negu parabolė $y=x^2$ (žr. funkcijos $y=\frac{1}{2}x^2$ grafiką 28 pav.). 28 pav. pavaizduoti funkcijų

$$y=x^2,\ y=\frac{1}{2}x^2,\ y=2x^2$$

grafikai. Bet kuris abscisių ašies taškas M tenkina sąlygas

$$MM_1=\frac{1}{2}MM_2,\ MM_3=2\,MM_2.$$

c) Atvejis $a<0$. Šiuo atveju $-a>0$, ir todėl jau mokame nubrėžti funkcijos $y=-ax^2$ grafiką. Palyginsime funkcijų $y=ax^2$ ir $y=-ax^2$ grafikus. Su viena ir ta pačia x reikšme šių grafikų taškų ordinatės turi priešingus ženklus, bet yra vienodų absoliutinių didumų. Taigi funkcijos $y=ax^2$ grafikas yra simetriškas funkcijos $y=-ax^2$ grafikui Ox ašies atžvilgiu (29 pav.). 29 pav. $MM_2=MM_1$ (M – bet koks abscisių ašies taškas).



29 pav.

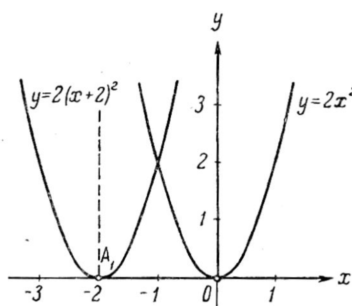
Palyginę išnagrinėtuosius atvejus, padarome išvadą, kad nuo koeficiento a ženklo priklauso parabolės $y=ax^2$ šakų kryptis: kai $a>0$, parabolės $y=ax^2$ šakos nukreiptos aukštyn, kai $a<0$ – žemyn.

Funkcijos $y=a(x-m)^2$ grafikas. Kad būtų vaizdžiau, iš pradžių išnagrinėsime pavyzdį $y=2(x+2)^2$. Funkciją $y=2(x+2)^2$ palyginsime su funkcija $y=2x^2$. Kai $x=x_0$, funkcijos $y=2x^2$ reikšmė lygi $2x_0^2$. Funkcija $y=2(x+2)^2$ įgis tokią pat reikšmę, kai $x=x_0-2$. Vadinasi, norint, kad funkcijų $y=2x^2$ ir $y=2(x+2)^2$ reikšmės būtų vienodos, reikia funkcijos $y=2(x+2)^2$ argumentui suteikti reikšmę, dviem vienetais mažesnę už funkcijos $y=2x^2$ argumento reikšmę. Taigi funkcijos $y=2(x+2)^2$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y=2x^2$ grafiko, pastūmus pastarąjį išilgai Ox ašies per du vienetus į kairę (30 pav.). Parabolės $y=2(x+2)^2$ viršūnė A_1 yra Ox ašies taške, kurio abscisė lygi -2.

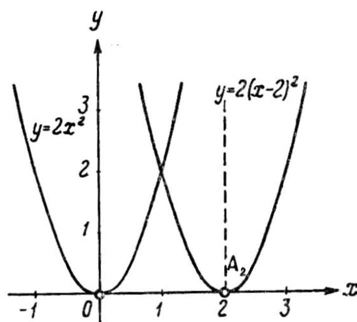
Funkcijos $y=2(x-2)^2$ grafikas gaunamas analogiškai iš funkcijos $y=2x^2$ grafiko, pastūmus pastarąjį per du vienetus į dešinę (31 pav.). Tada parabolės $y=2(x-2)^2$ viršūnė A_2 turės koordinates $A_2(2;0)$.

Apskritai, norint nubraižyti funkcijos $y=a(x-m)^2$ grafiką, reikia funkcijos $y=ax^2$ grafiką perkelti išilgai abscisių ašies per m vienetų į dešinę, kai $m>0$, ir per $|m|$ vienetų į kairę, kai $m<0$. Parabolės $y=a(x-m)^2$ viršūnė A turės koordinates $A(m;\ 0)$.

Funkcijos $y=a(x-m)^2+l$ grafikas. Palyginsime funkcijų $y=a(x-m)^2+l$ ir $y=a(x-m)^2$ reikšmes. Kai $l>0$, tai su viena ir ta pačia x reikšme funkcijos $y=a(x-m)^2+l$ reikšmė yra l vienetų didesnė už funkcijos $y=a(x-m)^2$ reikšmę, o kai $l<0$, tai funkcijos $y=a(x-m)^2+l$ reikšmė yra $|l|$ vienetų mažesnė už funkcijos $y=a(x-m)^2$ reikšmę. Vadinasi, norint gauti funkcijos $y=a(x-m)^2+l$ grafiką, reikia funkcijos $y=a(x-m)^2$ grafiką pastumti išilgai ordinačių ašies per l vienetų aukštyn, kai $l>0$, ir per $|l|$ vienetų žemyn, kai $l<0$.



30 pav.



31 pav.

32 pav. pavaizduoti funkcijų

$$y=2(x+1)^2,$$

$$y=2(x+1)^2+3,$$

$$y=2(x+1)^2-3$$

grafikai, kurie iliustruoja šiuos samprotavimus. Atitinkamų parabolių viršūnės turi koordinates

$$A(-1;0),\ A_1(-1;3),\ A_2(-1;\ -3).$$

Susumuosime rezultatus. Taigi galima tvirtinti, kad

1) funkciją $y=ax^2+bx+c$, pažymėjus

$$m=-\frac{b}{2a},\ l=c-\frac{b^2}{4a}=-\frac{D}{4a},$$

galima užrašyti taip:

$$y=a(x-m)^2+l;$$

2) norint nubraižyti funkcijos $y=a(x-m)^2+l$ grafiką, reikia funkcijos $y=ax^2$ grafiką pastumti išilgai abscisių ašies per m atkarpą, o paskui išilgai ordinačių ašies per l atkarpą; vadinasi, funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikas yra tokia pat parabolė, kaip ir $y=ax^2$, tik pastumta taip, kad jos viršūnė yra taške $A(m;l)$ $\left(\text{čia } m=-\frac{b}{2a};\ l=-\frac{D}{4a}\right)$;

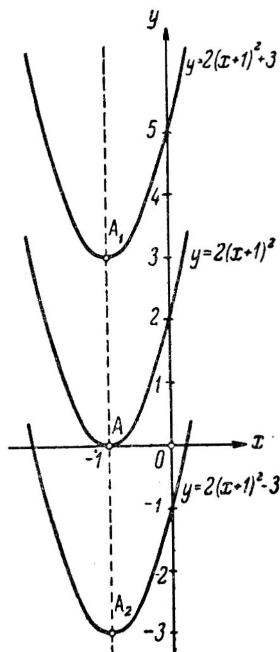
3) nuo koeficiento a priklauso grafiko $y=ax^2$ forma: kuo $|a|$ didesnis, tuo „siauresnė" parabolė; skaičiaus a ženklas nulemia parabolės šakų kryptį.

Šio paragrafo rezultatus suformuluosime kaip teoremą.

3 teorema. *Taškas*

$$A\left(-\frac{b}{2a};\ -\frac{D}{4a}\right)$$

(čia $D=b^2-4ac$) priklauso kvadratinės funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikui; jis vadinamas parabolės, kuri yra šios funkcijos grafikas, viršūne. Funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y=ax^2$ grafiko, pastūmus pastarojo viršūnę O (0; 0) į tašką A $\Big($t.y., pastūmus funkcijos $y=ax^2$ grafiką išilgai abscisių ašies dydžiu $m=-\frac{b}{2a}$ ir išilgai ordinačių ašies dydžiu $l=-\frac{D}{4a}\Big)$. Tiesė, einanti per viršūnę A lygiagrečiai ordinačių ašiai, yra parabolės $y=ax^2+bx+c$ simetrijos ašis. Pagaliau, jei q – tiesė, einanti per viršūnę A lygiagrečiai abscisių ašiai, tai visas funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafikas (išskyrus viršūnę) yra aukščiau tiesės q, kai $a>0$, ir žemiau tiesės q, kai $a<0$.



32 pav.

Funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafiką galima braižyti pagal tokį planą.

a) Kvadratinę funkciją $y=ax^2+bx+c$ užrašome $y=a(x-m)^2+l$ ir randame parabolės viršūnės A koordinates $(m;\ l)$ $\big($(13) formulių, pagal kurias apskaičiuojamos viršūnės A koordinatės, atsiminti nebūtina$\big)$.

b) Randame parabolės susikirtimo su koordinačių ašimis taškus. Aišku, kad parabolė $y=ax^2+bx+c$ kerta Oy ašį taške $B\,(0;\ c)$. Ox ašį parabolė kerta tuose taškuose, kuriuose kvadratinio trinario ax^2+bx+c reikšmė lygi nuliui; šie taškai egzistuoja tik tada, kai lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys yra realios, t.y., kai $D=b^2-4ac\geqslant 0$ (1 teorema). Taigi, kai $D\geqslant 0$, tai, apskaičiavę lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknis x_1, x_2, rasime du taškus $A_1\,(x_1;\ 0)$ ir $A_2\,(x_2;\ 0)$, kuriuose parabolė kirs Ox ašį (kai $D=0$, šie taškai sutampa).

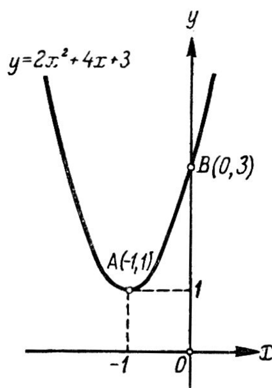
c) Žinodami parabolės $y=ax^2+bx+c$ viršūnę $A\,(m;\ l)$ ir jos susikirtimo su koordinačių ašimis taškus, galėsime, įvertinę koeficiento a ženklą (kai $a>0$, parabolės šakos nukreiptos aukštyn, o kai $a<0$, – žemyn), nubraižyti grafiko eskizą. Kad grafikas būtų tikslesnis, galima pažymėti dar keletą jo taškų.

Pastaba. Viršūnės A koordinates $(m;\ l)$ galima rasti ir kitaip, nesuteikiant kvadratiniam trinariui ax^2+bx+c išraiškos $a(x-m)^2+l$. Bū-

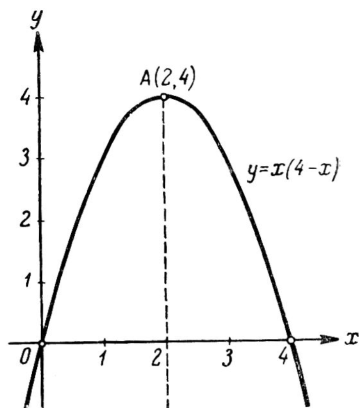
tent, palyginę (6) ir (13) formules, matome, kad $m=\frac{x_1+x_2}{2}$. Taigi, norint rasti parabolės viršūnę, reikia išspręsti kvadratinę lygtį $ax^2+bx+c=0$, o paskui pagal formulę $m=\frac{x_1+x_2}{2}$ apskaičiuoti parabolės viršūnės abscisę. Tada viršūnės ordinatė l bus lygi kvadratinės funkcijos $y=ax^2+bx+c$ reikšmei, kai $x=m$. Kartais toks būdas yra tinkamesnis, nes kvadratinio trinario ax^2+bx+c šaknys reikalingos ne tik ieškant viršūnės, bet ir tų taškų, kuriuose grafikas kerta abscisių ašį.

3 pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $y=2x^2+4x+3$ grafiką.

Sprendimas. Išskiriame dvinario kvadratą: $y=2(x^2+2x+1)+1=$ $=2(x+1)^2+1$. Taigi viršūnė yra taške $A(-1;\ 1)$. Kadangi $a=2>0$, tai parabolės šakos nukreiptos aukštyn ir todėl grafikas abscisių ašies nekirs. Toliau grafikas Oy ašį kerta taške $B(0, 3)$. Funkcijos $y=2x^2+$ $+4x+3$ grafikas pavaizduotas 33 pav.



33 pav.



34 pav.

4 pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $y=x(4-x)$ grafiką.

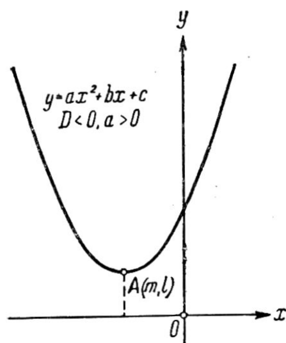
Sprendimas. Lygties $x(4-x)=0$ šaknys yra $x_1=0$, $x_2=4$. Jos žymi taškus, kuriuose grafikas kerta abscisių ašį. Viršūnės abscisė (žr. pastabą prieš 3 pavyzdį) lygi $m=\frac{0+4}{2}=2$. Viršūnės ordinatė l lygi funkcijos reikšmei, kai $x=m=2$, t.y. $l=2(4-2)=4$. Šakos nukreiptos žemyn, nes $a=-1<0$.

Funkcijos $y=x(4-x)$ grafikas pavaizduotas 34 pav.

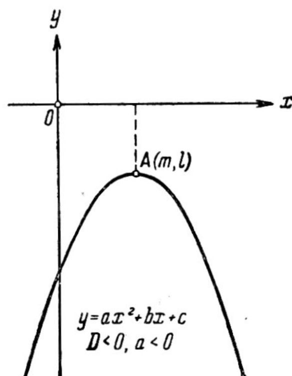
§ 3. Kvadratinio trinario tyrimas

Geometrinis tyrimas. Šio tyrimo tikslas – išsiaiškinti diskriminanto $D=b^2-4ac$ ženklo įtaką parabolės $y=ax^2+bx+c$ padėčiai abscisių ašies atžvilgiu. (Dar kartą primename: buvo sutarta, kad a, b, c – visada realieji skaičiai.) Išnagrinėsime tris galimus atvejus: $D<0$, $D=0$, $D>0$.

a) A t v e j i s $D<0$. Kadangi $l=\frac{-D}{4a}$, tai trupmenos skaitiklis $-D$, kai $D<0$, yra teigiamas. Todėl viršūnės ordinatės ženklas sutampa su skaičiaus a ženklu. Iš pradžių tarkime, kad $a>0$. Tada (kadangi $D<0$) $l>0$, t.y. parabolės viršūnė esti a u k š č i a u abscisių ašies. Kai $a>0$, parabolės šakos būna nukreiptos aukštyn. Vadinasi, kai $D<0$ ir $a>0$, visa parabolė esti aukščiau abscisių ašies, kai $D<0$ ir $a<0$, – žemiau abscisių ašies. Taigi, kai $D<0$, tai parabolė $y=ax^2+bx+c$ nekerta abscisių ašies. Be to, kai $a>0$, ši parabolė būna aukščiau abscisių ašies (35 pav.), o kai $a<0$ – žemiau šios ašies (36 pav.)

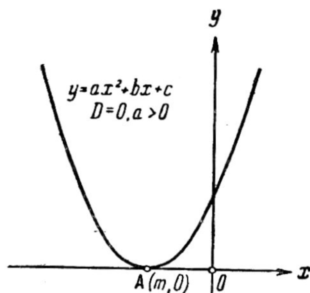


35 pav.

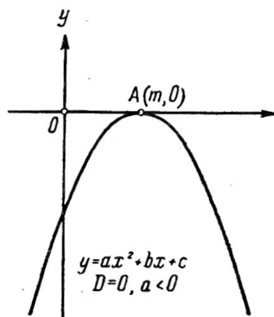


36 pav.

b) A t v e j i s $D=0$. Kadangi dabar $l=0$, tai parabolės $y=ax^2+bx+c$ viršūnė yra abscisių ašyje. Parabolės padėtis abscisių ašies atžvilgiu priklausomai nuo skaičiaus a ženklo parodyta 37 ir 38 pav.



37 pav.

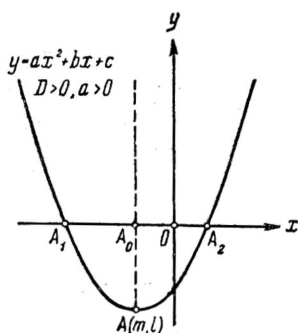


38 pav.

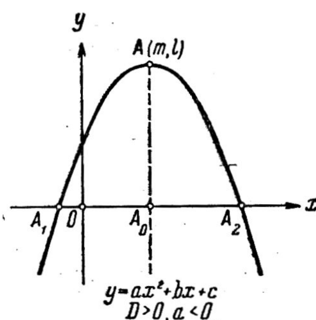
c) A t v e j i s $D>0$. Šį kartą skaičiaus $l=-\frac{D}{4a}$ ženklas yra p r i e š i n g a s skaičiaus a ženklui. Kai $a>0$, tai $l<0$, vadinasi, parabolės viršūnė yra ž e m i a u abscisių ašies, o parabolės šakos nukreiptos aukštyn, nes $a>0$. Taigi, kai $D>0$ ir $a>0$, parabolė kerta abscisių ašį dviejuose taškuose A_1 ir A_2 (39 pav.).

Atvejis $a<0$ nagrinėjamas analogiškai (40 pav.).

P a s t a b a. Kai $D>0$, parabolės simetrijos ašis yra tiesė, einanti per atkarpos A_1A_2 vidurio tašką A_0 lygiagrečiai ordinačių ašiai.



39 pav.



40 pav.

Algebrinis tyrimas. Vėl nagrinėsime tris atvejus: $D<0$, $D=0$, $D>0$.

4 t e o r e m a. *Kai $D<0$, tai su visomis realiomis x reikšmėmis kvadratinio trinario $y=ax^2+bx+c$ ženklas sutampa su skaičiaus a ženklu.*

Į r o d y m a s. Pasinaudosime (12) formule:

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a}.$$

Iškėlę dešinėje lygybės pusėje už skliaustų skaičių a, gauname

$$y=ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a^2}\right). \tag{17}$$

Reiškinys $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-D}{4a^2}$ yra t e i g i a m a s su visomis x reikšmėmis, nes $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geqslant 0$, $-D>0$, $a^2>0$. Vadinasi, kai $D<0$, kvadratinio trinario ženklas sutampa (koks bebūtų x) su skaičiaus a ženklu (žr. 35 ir 36 pav.).

5 t e o r e m a. *Kai $D=0$, tai su visomis realiomis x reikšmėmis, išskyrus $x=-\frac{b}{2a}$, kvadratinio trinario $y=ax^2+bx+c$ ženklas sutampa su skaičiaus a ženklu; kai $x=-\frac{b}{2a}$, trinaris lygus nuliui.*

Į r o d y m a s. Kai $D=0$, tai (žr. (17) formulę) gauname

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2. \tag{18}$$

Iš (18) formulės išplaukia, kad kvadratinis trinaris lygus nuliui, kai $x=-\frac{b}{2a}$. Jeigu $x\neq-\frac{b}{2a}$, tai $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2>0$. Todėl, kai $x\neq-\frac{b}{2a}$, trinario ženklas sutampa su skaičiaus a ženklu (žr. 37 ir 38 pav.).

6 teorema. *Kai $D>0$, tai su visomis x reikšmėmis, nepriklausančiomis atkarpai $[x_1; x_2]$ (čia x_1, x_2 – lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys), kvadratinio trinario $y=ax^2+bx+c$ ženklas sutampa su skaičiaus a ženklu; toliau su visomis x reikšmėmis, esančiomis šios atkarpos viduje (t.y. su visais x, kurie yra tarp trinario $x_1<x<x_2$ šaknų), kvadratinio trinario ženklas yra priešingas skaičiaus a ženklui; pagaliau, kai $x=x_1$ ir $x=x_2$, trinaris lygus nuliui.*

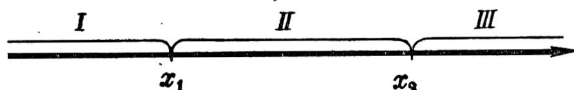
Įrodymas. Pasinaudosime kvadratinio trinario skaidiniu, apibrėžtu (7) formule:

$$y=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2). \quad (19)$$

Kadangi $D>0$, tai šaknys x_1 ir x_2 yra realios bei skirtingos (1 teorema). Apibrėžtumo dėlei sakykime, kad $x_1<x_2$. Kai $x<x_1$, tai tuo labiau $x<x_2$, todėl $x-x_1<0$, $x-x_2<0$. Vadinasi, $(x-x_1)(x-x_2)>0$. Tada iš (19), formulės išplaukia, kad trinario ženklas sutampa su skaičiaus a ženklu, kai $x<x_1$. Analogiškai nustatoma, kad trinario ženklas irgi sutampa su skaičiaus a ženklu, kai $x>x_2$. Toliau, kai $x_1<x<x_2$, tai $x-x_1>0$, o $x-x_2<0$. Iš čia gauname, kad $(x-x_1)(x-x)_2<0$. Vadinasi, kai $x_1<x<x_2$, kvadratinio trinario ženklas yra priešingas skaičiaus a ženklui. Pagaliau, kai $x=x_1$ ir $x=x_2$, turime $y=0$.

Kvadratinio trinario tyrimo rezultatus suformuluosime taip, kad juos būtų lengviau įsiminti: *su visomis x reikšmėmis trinario ax^2+bx+c ženklas sutampa su koeficiento a ženklu, išskyrus tą atvejį, kai trinario šaknys x_1 ir x_2 yra realios ($D\geqslant0$), o skaičius x tenkina nelygybę $x_1\leqslant x\leqslant x_2$.*

Pastaba. Sakykime, kad $D>0$. Skaičių ašyje pažymėsime kvadratinio trinario šaknis x_1 ir x_2 (apibrėžtumo dėlei tarkime, kad $x_1<x_2$). Su visais x, paimtais iš begalinio intervalo $]-\infty; x_1[$ (41 pav. šis intervalas pažymėtas skaitmeniu *I*), skirtumas $x-x_1$ esti neigiamas. Antra vertus



41 pav.

šis skirtumas yra teigiamas, kai imame bet kokį x, didesnį už x_1. Taig, skirtumas $x-x_1$ taške x_1 keičia ženklą. Lygiai taip pat skirtumas $x-x_2$ taške x_2 keičia ženklą. Vadinasi, kai x reikšmės imamos, judant skaičių ašimi iš kairės į dešinę – nuo mažesnių reikšmių prie didesnių, sandauga $(x-x_1)(x-x_2)$ keičia ženklą taškuose x_1 bei x_2, ir tik juose. Taigi sandaugos $(x-x_1)(x-x_2)$ ženklai keičiasi *I, II, III* intervaluose (41 pav.). Kadangi kvadratinis trinaris ir sandauga $(x-x_1)(x-x_2)$ skiriasi tik pastoviu nelygiu nuliui daugikliu a (žr. (19) formulę), tai ir trinario ženklai pažymėtuose intervaluose irgi keičiasi. Todėl pakanka nustatyti trinario ženklą kuriame nors viename iš intervalų: *I, II, III.*

5 pavyzdys. Įrodykite, kad su visomis realiomis x reikšmėmis kvadratinio trinario $y=ax^2+bx+c$ reikšmės yra teigiamos tada ir tik tada, kai $D<0$ ir $a>0$.

Įrodymas. Pakankamumas išplaukia iš 4 teoremos. Iš tiesų, kai $D<0$, tai pagal 4 teoremą kvadratinio trinario ženklas sutampa su skaičiaus a ženklu. Vadinasi, kai $a>0$, tai su visomis realiomis x reikšmėmis trinario reikšmės yra teigiamos.

Įrodysime būtinumą, t.y. parodysime, kai $D<0$ ir $a>0$ tada, kai su visomis realiomis x reikšmėmis trinario reikšmės yra teigiamos. Tarkime priešingai, kad sąlyga $D<0$ negalima, t.y. $D\geqslant 0$. Tada pagal 1 teoremą trinaris turi realias šaknis x_1 ir x_2 (galbūt sutampančias). Vadinasi, jis lygus nuliui, kai $x=x_1$ ir $x=x_2$, o tai prieštarauja sąlygai, kad trinaris yra teigiamas. Taigi $D<0$. Pagal 4 teoremą dabar surandame ir kad $a>0$.

§ 4. Kvadratinės nelygybės

Nelygybė

$$ax^2+bx+c>0, \tag{20}$$

kurioje a, b, c – realieji skaičiai, $a\neq 0$, yra vadinama *kvadratine* nelygybe.

Jeigu (20) nelygybės kairėje pusėje vietoj x įrašytume kokį nors realųjį skaičių x_0, gautume skaitinę nelygybę $ax_0^2+bx_0+c>0$, kuri su vienomis x_0 reikšmėmis gali būti teisinga, o su kitomis – klaidinga.

Kitaip tariant, (20) nelygybę galima laikyti teiginio funkcija, iš kurios su vienomis x reikšmėmis gaunami teisingi teiginiai, o su kitomis – klaidingi. Skaičių x_0 vadinsime (20) nelygybės *sprendiniu*, kai, vietoj x įrašę skaičių x_0, gausime teisingą skaitinę nelygybę $ax_0^2+bx_0+c>0$, t.y., kai su $x=x_0$ kvadratinio trinario ax^2+bx+c reikšmė bus teigiama. *Išspręsti* (20) nelygybę – reiškia rasti visus jos sprendinius.

Jeigu panaudotume funkcijos

$$y=ax^2+bx+c$$

grafiką, tai (20) nelygybę išspręstume, suradę visas tas x reikšmes, su kuriomis funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafiko taškai esti aukščiau abscisių ašies.

Greta (20) nelygybių galima nagrinėti, pavyzdžiui, tokias nelygybes

$$ax^2+bx+c<0, \tag{21}$$

$$ax^2+bx+c\geqslant 0, \tag{22}$$

$$ax^2+bx+c\leqslant 0, \tag{23}$$

$$a_1x^2+b_1x+c_1>a_2x^2+b_2x+c_2. \tag{24}$$

Šias nelygybes taip pat vadinsime kvadratinėmis (kai (24) nelygybėje $a_1=a_2$, tai ši nelygybė esti tiesinė).

Suformuluosime tokį apibrėžimą. Dvi kvadratinės nelygybės vadinamos *ekvivalenčiomis*, kai jų sprendiniai sutampa, t.y. kiekvienas pirmosios nelygybės sprendinys yra antrosios nelygybės sprendinys ir, atvirkščiai, kiekvienas antrosios nelygybės sprendinys yra pirmosios nelygybės sprendinys.

Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad

a) nelygybė $ax^2+bx+c<0$ yra ekvivalenti nelygybei $-ax^2-bx-c>0$;

b) nelygybė $a_1x^2+b_1x+c_1>a_2x^2+b_2x+c_2$ yra ekvivalenti nelygybei $(a_1-a_2)x^2+(b_1-b_2)x+c_1-c_2>0$ (a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 – bet kokie realieji skaičiai).

Įrodysime, pavyzdžiui, pirmąjį tvirtinimą.

Sakykime, kad x_0 – nelygybės $ax^2+bx+c<0$ sprendinys; tada $ax_0^2+bx_0+c<0$ – teisinga skaitinė nelygybė. Padauginę abi šios nelygybės puses iš -1 ir pritaikę nelygybių savybes, turime $-ax_0^2-bx_0-c>0$. Iš čia išplaukia, kad x_0 – nelygybės $-ax^2-bx-c>0$ sprendinys.

Atvirkščiai, kai x_1 yra nelygybės $-ax^2-bx-c>0$ sprendinys, tai $-ax_1^2-bx_1-c>0$ – teisinga skaitinė nelygybė, iš kurios gauname $ax_1^2+bx_1+c<0$. Taigi x_1 – nelygybės $ax^2+bx+c<0$ sprendinys.

Toliau nagrinėsime kvadratinių nelygybių sprendimą. Apsiribosime tik *griežtomis* nelygybėmis, t.y. nelygybėmis su ženklais $>$ arba $<$. Tokios yra (20), (21), (24) nelygybės. (22) ir (23) nelygybės vadinamos *negriežtomis*.

Įsidėmėtina, kad kiekvieną griežtąją kvadratinę nelygybę galima parašyti taip:

a) $ax^2+bx+c>0$, kai $a>0$, (25)

b) $ax^2+bx+c<0$, kai $a>0$. (26)

Iš tikrųjų, kai $a<0$, nelygybė $ax^2+bx+c>0$, kaip įrodėme, yra ekvivalenti nelygybei $a_1x^2+b_1x+c_1<0$; čia $a_1=-a$, $b_1=-b$, $c_1=-c$, be to, $a_1>0$ (t.y. ekvivalenti (26) išraiškos nelygybei). Analogiškai, kai $a<0$, padauginę nelygybę $ax^2+bx+c<0$ iš -1, gautume nelygybę, ekvivalenčią (25) išraiškos nelygybei.

Taigi nagrinėsime (25) ir (26) nelygybes, kuriose $a>0$.

Kvadratinio trinario tyrimo rezultatai (žr. § 3) leidžia padaryti tokias išvadas:

1) kai $D<0$, tai (25) nelygybė yra teisinga su visomis realiomis x reikšmėmis, o (26) nelygybė neturi sprendinių (žr. 35 bei 36 pav.);

2) kai $D=0$, tai (25) nelygybė yra teisinga su visomis x reikšmėmis, išskyrus $x=-\frac{b}{2a}$, o (26) nelygybė neturi sprendinių (žr. 37 bei 38 pav.).

3) kai $D>0$, tai (25) nelygybė (žr. 39 pav.) yra teisinga, kai $x<x_1$ ir $x>x_2$ (t.y. su tomis reikšmėmis, kurios nepriklauso atkarpai $[x_1; x_2]$; čia $x_1<x_2$ – trinario šaknys), o (26) nelygybė yra teisinga, kai $x_1<x<x_2$ (t.y. intervale $]x_1; x_2[$).

Taigi, kai $a>0$, nelygybė $ax^2+bx+c>0$ yra teisinga visada, išskyrus atvejį, kada $D\geqslant 0$ ir $x_1\leqslant x\leqslant x_2$, o nelygybė $ax^2+bx+c<0$, kai $a>0$, teisinga tik tada, kada $D>0$ ir $x_1<x<x_2$.

6 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $x^2-5x+6>0$.

Sprendimas. Turime $D=5^2-6\cdot 4=1>0$. Išsprendę lygtį $x^2-5x+6=0$, randame jos šaknis: $x_1=2$, $x_2=3$. Kadangi $a=1>0$, tai nelygybė yra teisinga, kai $x<2$ ir $x>3$.

Šį rezultatą galėtume gauti iš skaidinio $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ (žr. 6 teoremos pastabą).

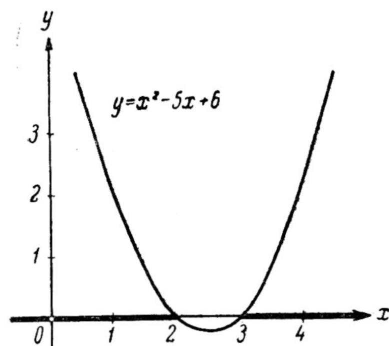
Pagaliau nelygybę galima išspręsti grafiškai: funkcijos $y=x^2-5x+6$ grafikas (42 pav.) kerta Ox ašį taškuose $x_1=2, x_2=3$ ir yra aukščiau Ox ašies, kai $x<2$ bei $x>3$.

7 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $6x-9<x^2$.

Sprendimas. Ši nelygybė ekvivalenti nelygybei $x^2-6x+9>0$ arba $(x-3)^2>0$; ji teisinga su visais x, išskyrus $x=3$.

8 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $2x^2+4x+3<0$.

Sprendimas. Kadangi $D=16-24<0$ ir $a=2>0$, tai ši nelygybė neturi sprendinių.



42 pav.

9 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $x^2 \leqslant 4x-4$.

Sprendimas. Duotoji nelygybė yra ekvivalenti nelygybei $x^2-4x+4 \leqslant \leqslant 0$ arba $(x-2)^2 \leqslant 0$; ji teisinga tik tada, kai $x=2$.

§ 5. Didžiausioji ir mažiausioji kvadratinio trinario reikšmė

7 teorema. *Kai* $a>0$, *tai kvadratinis trinaris* $y=ax^2+bx+c$ *taške* $x=-\frac{b}{2a}$ *įgyja mažiausią reikšmę, lygią* $-\frac{D}{4a}$ *(čia* $D=b^2-4ac$*). Kai* $a<0$, *tai kvadratinis trinaris taške* $x=-\frac{b}{2a}$ *įgyja didžiausią reikšmę, lygią* $-\frac{D}{4a}$.

Įrodymas. Iš pradžių tarkime, kad $a>0$. Tada (12) formulėje pirmasis dėmuo yra neneigiamas, t.y. $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$. Todėl, koks bebūtų realusis x, y reikšmė negali būti mažesnė už $-\frac{D}{4a}$. Kai $x=-\frac{b}{2a}$, (12) funkcija įgyja reikšmę $y_{\min}=-\frac{D}{4a}$, kuri yra mažiausia iš reikšmių, kurias funkcija įgyja visoje skaičių ašyje.

Šį faktą galima taip pat paaiškinti, naudojantis funkcijos $y=ax^2+bx+c$ grafiku. Kai $a>0$, parabolės šakos nukreiptos aukštyn, žemiausias grafiko taškas – jo viršūnė (35, 37, 39 pav.). Aišku, kad viršūnės ordinatė ir yra mažiausioji kvadratinio trinario reikšmė, t.y. $l=-\frac{D}{4a}=y_{\min}$, ir šią reikšmę trinaris įgyja, kai $x=m=-\frac{b}{2a}$.

Įsidėmėtina, kad kvadratinis trinaris neturi didžiausios reikšmės, kai $a>0$.

Dabar tarkime, kad $a<0$. Samprotaudami analogiškai, gautume, kad taške $x=-\frac{b}{2a}$ kvadratinis trinaris, kai $a<0$, įgyja didžiausią reikšmę $y_{\max}=l=-\frac{D}{4a}$ (36, 38, 40 pav.).

10 pavyzdys. Duotąjį teigiamąjį skaičių M išreikškite dviejų dėmenų suma taip, kad jų sandauga būtų didžiausia.

Sprendimas. Vieną dėmenį pažymėsime x; tada antrasis bus lygus $M-x$.

Reikia rasti sandaugos $x(M-x)$ didžiausią reikšmę. Išnagrinėsime kvadratinį trinarį $y=x(M-x)=-x^2+Mx$. Šio trinario koeficientas prie x^2 yra neigiamas (lygus -1); vadinasi, kai $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{M}{-2}=\frac{M}{2}$, trinaris įgyja didžiausią reikšmę (7 teorema). Kadangi $x=\frac{M}{2}$, tai $M-x=$ $=\frac{M}{2}$. Taigi dviejų skaičių, kurių suma lygi duotajam teigiamam skaičiui, sandauga yra didžiausia, kai šie skaičiai lygūs vienas kitam.

V skyriaus uždaviniai

5.1. Kvadratinio trinario ax^2+bx+c reikšmės, kai $x=1$; 2; 3, yra atitinkamai lygios 0; 1; 4. Apskaičiuokite šio trinario reikšmę, kai $x=11$.

5.2–5.4 *uždavinių koeficientai p ir q gali būti ir realieji, ir kompleksiniai.*

5.2. Kvadratinės lygties $x^2+px+q=0$ šaknys nėra realios ir nėra kompleksinės jungtinės. Ką galima pasakyti apie šios lygties koeficientus?

5.3. Ar gali viena lygties $x^2+px+q=0$ šaknis būti realioji, o kita – nerealioji (t.y. kompleksinis skaičius, kurio menamoji komponentė nelygi nuliui)?

5.4. Viena lygties $x^2+px+q=0$ šaknis lygi $1+i$. Ką galima pasakyti apie kitą šios lygties šaknį?

5.5. Jeigu viena kvadratinio trinario (su realiaisiais koeficientais) šaknis yra realusis skaičius, tai ir antroji trinario šaknis yra realioji, be to, tada $D\geqslant 0$. Įrodykite.

5.6. Jeigu viena kvadratinio trinario (su realiaisiais koeficientais) šaknis nėra realusis skaičius, tai ir antroji šaknis nebus realioji, be to, tada$D<0$. Įrodykite.

5.7. Ar gali lygtis $x^2+px+q=0$ su racionaliaisiais koeficientais p ir q turėti tokias šaknis:

1. $x_1=\sqrt{2}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}$?

2. $x_1=\sqrt{2}+1$, $x_2=1-\sqrt{2}$?

5.8. Kvadratinio trinario šaknų suma yra realusis skaičius. Ar galima teigti, kad visi trinario koeficientai yra realieji?

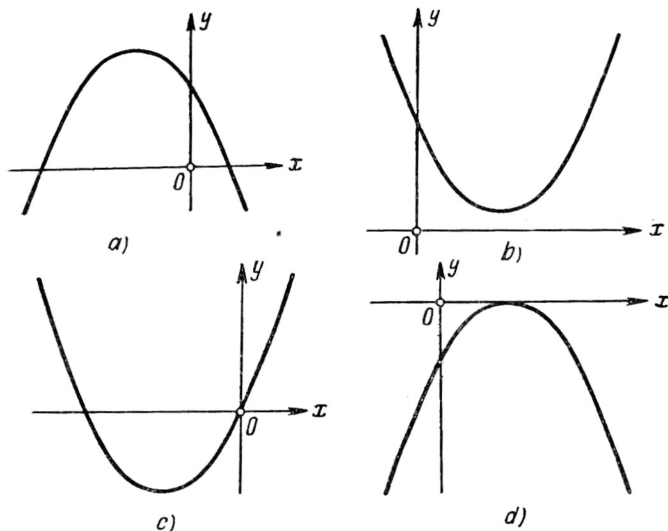
5.9. Kvadratinio trinario šaknų suma ir sandauga yra realieji skaičiai. Ar galima teigti, kad visi trinario koeficientai yra realieji?

5.10. Kvadratinio trinario šaknų suma ir sandauga yra realieji skaičiai ir, be to, vienas trinario koeficientas yra realusis. Ar galima teigti, kad ir kiti du trinario koeficientai yra realieji?

5.11. Įrodykite, kad pirmąjį pagrindinį 1 teoremos tvirtinimą apie kvadratinio trinario šaknis galima suformuluoti kaip teoremą

$$A \Leftrightarrow B \vee C;$$

čia A, B, C – tokios teiginio funkcijos: $A \equiv \{ax^2+bx+c=0\}$, $B \equiv \{x = x_1\}$, $C \equiv \{x=x_2\}$, o skaičiai x_1, x_2 yra apibrėžiami (5) formulėmis.



43 pav.

5.12. Lygties $x^2-4rx+7r^2=0$ šaknys tenkina sąlygą $x_1^2+x_2^2=2$. Apskaičiuokite r.

5.13. Tarkime, kad x_1 ir x_2 – lygties $ax^2+bx+c=0$ šaknys, $a \neq 0$. Nespręsdami lygties, išreikškite dydžiais a, b ir c šias sumas:

1. $x_1^4+x_2^4$.
2. $x_1^6+x_2^6$.

5.14. Tarkime, kad x_1 ir x_2 – lygties $x^2+px+q=0$ šaknys. Raskite p ir q, kai x_1+1 ir x_2+1 yra lygties $x^2-p^2x+pq=0$ šaknys.

5.15. Neieškodami lygties $3x^2-5x+6=0$ šaknų x_1 ir x_2, apskaičiuokite sumą $x_1^7x_2^2+x_2^7x_1^2$.

5.16. Tarkime, kad x_1 ir x_2 – lygties $x^2-8x+2=0$ šaknys. Sudarykite kvadratinę lygtį, kurios šaknys būtų lygios x_1^{-3} ir x_2^{-3}.

5.17. Nubraižykite grafikus šių funkcijų:

a) $y=4-x^2$; c) $y=-x^2+2x-1$;

b) $y=x^2-3x+2$; d) $y=x^2-2x+2$.

5.18. 43 pav. parodytos įvairios parabolės $y=ax^2+bx+c$ padėtys koordinačių ašių atžvilgiu. Kokie skaičių a, b, c ženklai kiekvienu atveju?

5.19. Įrodykite, kad su visomis $x > -\frac{b}{2a}$ reikšmėmis funkcija $y=ax^2+$ $+bx+c$, kai $a>0$, yra didėjanti. Kitaip tariant, kokie bebūtų x_1 ir x_2, tenkinantys sąlygą $-\frac{b}{2a}<x_1<x_2$, visada yra teisinga nelygybė $ax_1^2+bx_1+$ $+c<ax_2^2+bx_2+c$.

5.20. Pažymėti trys skirtingi taškai A, B, C: du abscisių ašyje, trečias – ordinačių ašyje, be to, nė vienas taškas nesutampa su koordinačių pradžia. Ar egzistuoja kvadratinis trinaris, kurio grafikas eina per šiuos tris taškus? Ar tik vieną tokį trinarį galima parinkti?

Išspręskite uždavinį, kai

1. $A(-1;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-4)$.
2. $A(3;0)$, $B(1;0)$, $C(0;3)$.
3. $A(-5;0)$, $B(-1;0)$, $C(0;-5)$.

5.21. Pažymėti du taškai A ir B taip, kad atkarpa AB nelygiagreti koordinačių ašims. Ar egzistuoja kvadratinis trinaris, kurio grafikas eitų per tašką B, o viršūnė būtų taške A? Ar tik vieną tokį trinarį galima parinkti? Išspręskite uždavinį, kai

1. $A(0;1)$, $B(1;3)$.
2. $A(3;1)$, $B(5;-3)$.
3. $A(2;4)$, $B(0;0)$.

5.22. Išspręskite nelygybes:

1. $x(4-x)<0$.
2. $x^2<x-1$.
3. $x^2+3x-4<0$.
4. $x^2\leqslant 2x-1$.
5. $4x^2>4x-1$.

5.23. Išspręskite nelygybes:

1. $\frac{4x-x^2}{x^2-x+1}\geqslant 0$. 2. $\frac{x^2-3x+4}{1-x^2}>0$.

5.24. Su kokia r reikšme lygties $x^2-rx+r-3=0$ šaknų kvadratų suma yra mažiausia?

5.25. Kvadratinis trinaris $y=ax^2+bx+c$ įgyja didžiausią reikšmę, lygią 3, kai $x=1$, ir yra lygus nuliui, kai $x=-1$. Kokia jo reikšmė, kai $x=5$?

5.26. Tarkime, kad a, b, c, d – realieji skaičiai, $a^2+c^2\neq 0$. Su kokia x reikšme funkcija $y=(ax+b)^2+(cx+d)^2$ įgyja mažiausią reikšmę? Apskaičiuokite ją.

5.27. Su kokiomis r reikšmėmis lygtis $x^2+(4+2r)x+5+4r=0$ turi: 1) lygias šaknis? 2) priešingų ženklų šaknis, kurių absoliutiniai didumai yra lygūs?

5.28. Raskite būtiną ir pakankamą sąlygą, kad kvadratinio trinario ax^2+bx+c (a, b, c – realieji skaičiai, $a\neq 0$) šaknys būtų realios ir 1) vienodų ženklų; 2) priešingų ženklų.

5.29. Raskite visas realiąsias r reikšmes, su kuriomis lygties x^2- $-2(r-1)x+2r+1=0$ šaknys yra realios, ir ištirkite šaknų ženklus priklausomai nuo r.

5.30. Įrodykite, kad su visomis realiomis x reikšmėmis kvadratinio trinario ax^2+bx+c ženklas yra toks pat tada ir tik tada, kai $D=b^2-4ac<0$.

5.31. Įrodykite, kad su visomis realiomis x reikšmėmis kvadratinis trinaris ax^2+bx+c yra neigiamas tada ir tik tada, kai $D<0$, $a<0$.

5.32. Raskite visas r reikšmes, su kuriomis kvadratinis trinaris x^2+ $+2rx+1$ yra teigiamas, kai x – bet koks realusis skaičius.

5.33. Įrodykite, kad lygties $x^2+px+q=0$ (p ir q – realieji skaičiai) šaknys yra neigiamos tada ir tik tada, kai $p^2-4q\geqslant 0$, $p>0$, $q>0$.

5.34. Raskite visas r reikšmes, su kuriomis lygties $(r-1)\,x^2-2rx+r+$ $3=0$ šaknys yra teigiamos.

5.35. Raskite visas realiąsias r reikšmes, su kuriomis funkcija $y=(r^2-1)\,x^2+2\,(r-1)\,x+2$ įgyja teigiamas reikšmes, esant bet kokiam realiajam x.

5.36. Raskite visas realiąsias r reikšmes, su kuriomis kvadratinis trinaris $y=rx^2+2\,(r+2)\,x+2r+4$ įgyja neigiamas reikšmes, esant bet kokiam realiajam x.

5.37. Raskite būtiną ir pakankamą sąlygą, kad lygties $x^2+px+q=0$ šaknys x_1 ir x_2 būtų realios ir tenkintų nelygybes $\alpha<x_1<\beta$, $\alpha<x_2<\beta$.

5.38. Raskite visas realiąsias r reikšmes, su kuriomis abi lygties $2rx^2$ $-(r+1)\,x+1=0$ šaknys yra realios ir absoliutiniu didumu mažesnės už vienetą.

5.39. Tarkime, kad lygčių $x^2+p_1x+q_1=0$ ir $x^2+p_2x+q_2=0$ koeficientai yra realieji ir, be to, $p_1p_2=2\,(q_1+q_2)$. Įrodykite, kad bent vienos šių lygčių šaknys yra realios.

5.40. Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos

$$y=\frac{1}{x^2+x+1}$$

reikšmę, kai $-1\leqslant x\leqslant 1$.

5.41. Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos

$$y=x^4+3x^2+2$$

reikšmę, kai $-2\leqslant x\leqslant 3$.

5.42. Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos

$$y=\sin^2 x+\sin x+1$$

reikšmę.

VI SKYRIUS

DAUGIANARIAI IR ALGEBRINĖS LYGTYS

§ 1. Daugianaris ir jo reikšmės

Kintamojo x *daugianariu* vadinamas reiškinys

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n; \qquad (1)$$

čia $a_0, a_1, \dots, a_n$ – tam tikri skaičiai, vadinami daugianario *koeficientais*, o x – simbolis, kurio vietoje galima įrašyti bet kokį skaičių.

Galima nagrinėti daugianarius ir su realiaisiais, ir su kompleksiniais koeficientais. Šioje knygoje apsiribosime tik tais daugianariais, kurių koeficientai yra realieji (o dažnai sveikieji arba racionalieji) skaičiai. Priešingai, kintamajam x dažnai suteiksime ne tik realiąsias, bet ir kompleksines reikšmes.

Tarkime, kad c – tam tikras skaičius (realusis arba kompleksinis). Daugianario (1) *reikšme*, kai $x=c$, vadinamas skaičius, kuris gaunamas, vietoje x (1) reiškinyje įrašius skaičių c ir atlikus nurodytus veiksmus. Pavyzdžiui, kai $x=2$, daugianaris

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 5 \qquad (2)$$

įgyja reikšmę

$$2^3 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 5 = 1,$$

kai $x = 1 - \sqrt{2}$, jo reikšmė yra lygi

$$(1-\sqrt{2})^3 - 2 \cdot (1-\sqrt{2})^2 + 3(1-\sqrt{2}) - 5 = -1 - 4\sqrt{2},$$

o kai $x = 2+i$, jo reikšmė yra lygi

$$(2+i)^3 - 2(2+i)^2 + 3(2+i) - 5 = -3 + 6i.$$

Dažnai, norėdami sutrumpinti užrašus, daugianarius žymime taip, kaip žymimos funkcijos. Susitarsime, pavyzdžiui, (1) daugianarį žymėti simboliu $f(x)$:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n.$$

Tada šio daugianario reikšmė, kai $x=c$, bus žymima $f(c)$:

$$f(c) = a_0 c^n + a_1 c^{n-1} + \dots + a_{n-1} c + a_n.$$

Pavyzdžiui, pažymėjus (2) daugianarį $\varphi(x)$, t.y.

$$\varphi(x)=x^3-2x^2+3x-5,$$

$$\varphi(2)=1,\ \varphi(1-\sqrt{2})=-1-4\sqrt{2},\ \varphi(2+i)=-3+6i.$$

Reiškinio (1) koeficientas a_n vadinamas daugianario *laisvuoju nariu*. Aišku, kad (1) daugianario reikšmė lygi a_n, kai $x=0$. Todėl *bet kokio daugianario reikšmė, kai* $x=0$, *yra lygi šio daugianario laisvajam nariui.*

Toliau (1) daugianaris, kai $x=1$, įgyja reikšmę $a_0+a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n$. Taigi *bet kokio daugianario reikšmė, kai* $x=1$, *yra lygi visų šio daugianario koeficientų sumai.*

Spręsdami uždavinius, dažnai remiamės šiomis dviem nesudėtingomis išvadomis.

„Daugianariais" įprasta vadinti ne tik (1) išraiškos reiškinius, bet ir tuos, kuriems galima suteikti šią išraišką po tapatingų pertvarkymų: atskliautus, sutraukus panašiuosius narius, sukeitus dėmenis vietomis. Jeigu kuris nors (1) daugianario koeficientas yra nulis, tai, rašydami daugianarį, šį dėmenį praleidžiame. Pavyzdžiui, daugianarį

$$0\cdot x^4+2x^3+0\cdot x^2+x+5$$

rašome tiesiog

$$2x^3+x+5. \tag{3}$$

Toliau (1) reiškinyje visi dėmenys surašyti x laipsnio mažėjimo eile. Tačiau, kai dėmenys surašyti kita tvarka, jų suma irgi vadinama daugianariu. Pavyzdžiui, reiškinys

$$x+1-x^3-x^4 \tag{4}$$

yra daugianaris: sukeitus dėmenis vietomis, galima jam suteikti (1) išraišką:

$$(-1)\,x^4+(-1)\,x^3+0\cdot x^2+1\cdot x+1.$$

Galiausiai ir tada, kai, suteikiant reiškiniui (1) išraišką, reikia atskliausti skliaustus bei sutraukti panašiuosius narius, šis reiškinys taip pat vadinamas „daugianariu". Pavyzdžiui, reiškinys

$$1+(x^2+2)(x^2-x+1) \tag{5}$$

yra daugianaris: atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius, gauname

$$x^4-x^3+3x^2-2x+3.$$

Taigi, vadindami (3), (4), (5) ir jiems analogiškus reiškinius „daugianariais", turime galvoje tai, kad juos galima parašyti (1) išraiška, remiantis sudėties ir daugybos dėsniais (p. 44). Taip „daugianario" sąvoką suprasime ir toliau.

Kai (1) daugianario koeficientas a_0 prie x^n nelygus nuliui, tai dėmuo a_0x^n vadinamas *vyriausiuoju nariu*, koeficientas a_0 vadinamas *vyriausiuoju koeficientu*, o pats daugianaris vadinamas *n-tojo laipsnio daugianariu*. Kai $a_0=0$, tai dėmenį a_0x^n galima praleisti ir daugianarį parašyti taip: $a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$. Jeigu dabar $a_1\neq0$, tai nagrinėjamasis daugiana-

ris yra $(n-1)$-ojo laipsnio. Bet jeigu ir $a_1=0$, tai dėmenį $a_1 x^{n-1}$ taip pat galima praleisti ir t.t. Taigi, atmetus pirmuosius dėmenis, lygius nuliui (jeigu tokių yra), visada galima laikyti, kad (1) reiškinio koeficientas a_0 nelygus nuliui. Yra vienintelė išimtis, kai visi (1) daugianario koeficientai lygūs nuliui. Toks daugianaris vadinamas *nuliniu daugianariu* (arba nuliu) ir žymimas simboliu 0.

Taigi kiekvieną nelygų nuliui daugianarį galima parašyti (1) reiškiniu, kuriame $a_0 \neq 0$, n – tam tikras neneigiamas sveikasis skaičius. Toks užrašas vadinamas n-tojo laipsnio daugianario *kanonine išraiška*[1].

1 pavyzdys. Apskaičiuokite daugianario koeficientų sumą, kai jis gaunamas iš daugianario

$$1+(x^2-6x+5)(x^5+3x^4-2x^3+x^2-x-7)^3+$$
$$+(x^2-3x+1)^{25}(x^3+5x+7),$$

suteikiant pastarajam kanoninę išraišką.

Sprendimas. Duotąjį daugianarį pažymėsime $f(x)$. Norint apskaičiuoti šio daugianario koeficientų sumą, nebūtina jį rašyti kanonine išraiška, t.y. atskliausti, sutraukti panašiuosius narius bei sudėti gautojo daugianario koeficientus. Iš tikrųjų nežinomoji koeficientų suma lygi $f(1)$. Įrašę $x=1$, lengvai randame

$$f(1)=1+0(\ldots)+(-1)^{25}\cdot 13=1-13=-12.$$

Taigi daugianario koeficientų suma lygi -12.

Du daugianariai vadinami *lygiais*, kai jų kanoninė išraiška yra vienoda, t.y. šių daugianarių koeficientai yra atitinkamai lygūs. Kitaip tariant, kai

$$P(x)=a_0 x^n+a_1 x^{n-1}+\ \ldots\ +a_{n-1}x+a_n,$$
$$Q(x)=b_0 x^m+b_1 x^{m-1}+\ \ldots\ +b_{m-1}x+b_m$$

yra du daugianariai, parašyti kanonine išraiška, tai lygybė $P(x)=Q(x)$ galima tada ir tik tada, kai $m=n$ ir daugianarių koeficientai yra atitinkamai lygūs: $a_0=b_0$, $a_1=b_1$ ir t.t.

Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad *su bet kokia c reikšme lygių daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$* (t.y. daugianarių su vienoda kanonine išraiška) *reikšmės, kai $x=c$, sutampa.*

Taip pat teisinga teorema, atvirkštinė šiai teoremai (taip pat teisinga teorema, priešinga šiai ir priešinga atvirkštinei teoremai). Vadinasi, galioja tokios keturios teoremos:

1 teorema. *Kai $P(x)=Q(x)$, tai su bet kokiu skaičiumi c yra teisinga lygybė $P(c)=Q(c)$.*

2 teorema. *Kai su bet kokiu skaičiumi c yra teisinga lygybė $P(c)=$ $=Q(c)$, tai $P(x)=Q(x)$.*

3 teorema. *Kai $P(x)\neq Q(x)$, tai egzistuoja toks skaičius c, su kuriuo $P(c)\neq Q(c)$.*

[1] Kanonas – dėsnis; todėl „kanoninė išraiška" reiškia: įteisinta, visų pripažinta išraiška.

4 teorema. *Kai egzistuoja toks skaičius c, su kuriuo $P(c) \neq Q(c)$, tai $P(x) \neq Q(x)$.*

1 teorema (o kartu ir ekvivalenti jai 4 teorema) yra savaime aiškios: kai du daugianariai yra lygūs (t.y. po tapatingų pertvarkymų jie įgyja vienodą kanoninę išraišką), tai, įrašius $x=c$, jie turi vienodas skaitines reikšmes. Priešingai, 2 teorema (o kartu ir jai ekvivalenti 3 teorema) iš pirmo žvilgsnio jau ne tokia aiški: joje tvirtinama, kad dviejų daugianarių $P(x)$ bei $Q(x)$ (parašytų kanonine išraiška) *koeficientai yra vienodi*, jei su bet kokia c reikšme jų *reikšmės yra vienodos* $\big($t.y. $P(c)=Q(c)\big)$. 2 teorema bus įrodyta šio skyriaus pabaigoje.

Panagrinėkime pavyzdį. Mokinys sudaugino daugianarius ir gavo tokį rezultatą:

$$(x^5-x^4+x^2-x+1)(x+1)=x^6+1.$$

Norėdami patikrinti, ar teisingai sudauginta, daugianarį, kuris yra kairėje pusėje, pažymėsime $P(x)$, o tą, kuris yra dešinėje pusėje, pažymėsime $Q(x)$ ir argumentui x suteiksime keletą reikšmių. Įrašę $x=0$, lengvai gauname, kad $P(0)=1$, $Q(0)=1$, t.y. $P(0)=Q(0)$. Analogišką rezultatą gauname ir tada, kai $x=1$: $P(1)=2$, $Q(1)=2$, t.y. $P(1)=Q(1)$. Ar jau galima teigti, kad $P(x)=Q(x)$, t.y. sudauginta teisingai? Nė viena iš keturių suformuluotų teoremų neatsako į šį klausimą. Tinkamiausia yra antroji teorema. Tačiau, ketindami ją pritaikyti, turime žinoti, kad lygybė $P(c)=Q(c)$ yra teisinga su bet kokia c reikšme, o tai kol kas neaišku. Tikrinkime toliau. Įrašę $x=-1$, gauname $P(-1)=0$, $Q(-1)=2$, t.y. $P(-1) \neq Q(-1)$. Dabar iš ketvirtosios teoremos išplaukia, kad $P(x) \neq$ $\neq Q(x)$. Taigi mokinys sudaugino klaidingai.

Išsiaiškinome, kad dviejų daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ reikšmių sutapimas viename ar dviejuose taškuose dar negarantuoja, kad lygybė $P(x)=$ $=Q(x)$ yra teisinga. Tačiau, išbandžius daug argumento reikšmių ir įsitikinus, kad daugianario reikšmės atskiruose taškuose sutampa, visgi galima įrodyti dviejų daugianarių lygybę. Kaip tik teisinga yra ta teorema, kuri iš esmės sustiprina 2 teoremos tvirtinimą.

5 teorema. *Tarkime, kad $P(x)$ ir $Q(x)$ – du daugianariai, kurių laipsniai ne didesni už n. Jeigu daugianarių $P(x)$ ir $Q(x)$ reikšmės sutampa $n+1$ taškuose, tai $P(x)=Q(x)$.*

Kitaip tariant, kai $P(c_1)=Q(c_1)$, $P(c_2)=Q(c_2)$, ..., $P(c_{n+1})=$ $=Q(c_{n+1})$ (čia $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ – skirtingi skaičiai), tai $P(x)=Q(x)$. Aišku, kad 2 teorema išplaukia iš 5 teoremos. 5 teoremą įrodysime vėliau (skyriaus pabaigoje).

1, 2 ir 5 teoremos esmę galima paaiškinti tokiu būdu. Kiekvieną daugianarį $P(x)$ galima laikyti argumento x funkcija. 1 teorema teigia: kai $P(x)$ ir $Q(x)$ sutampa *kaip daugianariai* (t.y., suteikus jiems kanoninę išraišką, jų koeficientai yra vienodi), tai jie sutampa ir *kaip funkcijos* (t.y. su bet kokia argumento reikšme jų reikšmės yra lygios). 2 teorema teigia atvirkščiai: kai $P(x)$ ir $Q(x)$ sutampa *kaip funkcijos*, tai jie sutampa ir *kaip daugianariai*. Pagaliau 5 teorema sustiprina 2 teoremą: kai kiekvieno daugianario $P(x)$, $Q(x)$ laipsnis yra ne didesnis už n ir kai funkcijų

$P(x)$, $Q(x)$ reikšmės sutampa $n+1$ taškuose, tai $P(x)$ bei $Q(x)$ sutampa *kaip daugianariai.*

2 pavyzdys. Skaičius a, b ir c parinkite taip, kad būtų teisinga lygybė

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-2}+\frac{c}{x-3}.$$

Pirmasis sprendimas. Duotąją lygybę, subendravardiklinę jos dešiniąją pusę, parašome taip

$$\frac{x+5}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Vadinasi, uždavinį išspręsime, kai skaičius a, b ir c parinksime taip, kad galiotų lygybė

$$x+5=a(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-3)+c(x-1)(x-2). \quad (6)$$

Atskliautę bei sutraukę panašiuosius narius, iš šios lygybės gauname

$$x+5=(a+b+c)x^2-(5a+4b+3c)x+(6a+3b+2c).$$

Dabar, pritaikę daugianarių lygybės apibrėžimą, darome išvadą, kad dešinėje pusėje turi būti pirmojo laipsnio daugianaris su tokiais pat koeficientais, kaip ir daugianaris, esantis kairėje pusėje. Kitaip tariant, turi galioti lygybės

$$a+b+c=0,$$

$$5a+4b+3c=-1,$$

$$6a+3b+2c=5.$$

Šias lygybes laikydami lygčių sistema kintamųjų a, b, c atžvilgiu ir išsprendę tą sistemą, gauname nežinomas reikšmes:

$$a=3,\ b=-7,\ c=4.$$

Antrasis sprendimas. Kaip ir pirmojo sprendimo atveju, padarome išvadą, kad uždavinys bus išspręstas, kai rasime a, b, c reikšmes, tenkinančias (6) lygybę. Bet pagal 1 teoremą (p. 113) dviejų daugianarių reikšmės su bet kokia x reikšme yra lygios. Kitaip tariant, išsprendę uždavinį (t.y. parinkę skaičius a, b, c), į (6) lygybę galėtume įrašyti bet kokią x reikšmę. Įrašysime $x=1$, po to $x=2$ ir pagaliau $x=3$. Gausime

$$6=2a,\ 7=-b,\ 8=2c.$$

Taigi, kai (6) lygybė yra teisinga, skaičiams a, b ir c galima parinkti šias reikšmes: $a=3$, $b=-7$, $c=4$. Bet ar tikrai su šiomis a, b, c reikšmėmis (6) lygybė yra teisinga? Taip, ir tai išplaukia iš 5 teoremos. Iš tiesų a, b, c reikšmes parinkome taip, kad (6) sąryšio kairiosios ir dešiniosios pusės reikšmės būtų lygios, kai $x=1$, $x=2$ ir $x=3$. Kadangi kairėje ir dešinėje pusėje yra *ne didesnio kaip antrojo laipsnio* daugianariai, o jų reikšmės sutampa *trijuose* taškuose, tai pagal 5 teoremą jie yra lygūs.

3 pavyzdys (uždavinys pokštas). Tarkime, kad a, b, c — trys skirtingi skaičiai. Nagrinėsime lygtį

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}=1. \qquad (7)$$

Kadangi kiekvienos trupmenos vardiklis yra skaičius, o skaitiklis – antrojo laipsnio daugianaris, tai turime kvadratinę lygtį. Tiesiogiai patikrinę, įsitikiname, kad skaičiai a, b, c tenkina šią lygtį. Vadinasi, duotoji kvadratinė lygtis turi tris skirtingas šaknis. Kaip tai paaiškinama?

Sprendimas. Kairėje ir dešinėje (7) lygybės pusėje yra *ne didesnio kaip antrojo* laipsnio daugianariai. Kadangi jų reikšmės sutampa trijuose taškuose, tai daugianariai, esantys kairėje ir dešinėje lygybės pusėje, yra lygūs (pagal 5 teoremą). Vadinasi, parašę kairiąją pusę kanonine išraiška, gautume 1, t. y. koeficientai prie x^2 ir x būtų lygūs nuliui. Taigi gautume tapatybę $1=1$, o ne kvadratinę lygtį. Tuo galėtume įsitikinti tiesiogiai, sudėję trupmenas kairėje pusėje.

Pastebėsime, kad iki tol, kol daugianaris neparašytas kanonine išraiška, nustatyti jo laipsnį kartais esti sunku. Pavyzdžiui, daugianaryje

$$(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x-1)-x^2\,(x^2+1)(x^2-1),$$

kol jis parašytas tokia forma, yra penktasis x laipsnis. Tačiau, atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius, gautume x^2-1. Vadinasi, šis daugianaris tikrai yra antrojo laipsnio. Panašų dalyką pastebėjome, spręsdami 3 pavyzdį: (7) sąryšio kairioji pusė lygi 1, taigi ji yra nulinio laipsnio daugianaris, nors iš pirmo žvilgsnio savo forma primena antrojo laipsnio daugianarį.

§ 2. Veiksmai su daugianariais

Dviejų daugianarių suma, skirtumas ir sandauga irgi yra daugianariai. Šis teiginys teisingas todėl, kad pirmajame paragrafe sutarėme terminą „daugianaris" suprasti plačiąja prasme. Iš tikrųjų, kai

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n,$$

$$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m$$

yra du daugianariai, reiškinius

$$P(x)+Q(x)=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)+(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m),$$

$$P(x)-Q(x)=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)-(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m),$$

$$P(x)\cdot Q(x)=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n)(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m),$$

atskliautę ir sutraukę panašiuosius narius, nesunkiai parašytume (1) išraišką. Vadinasi, jie yra daugianariai.

Toliau nagrinėsime lengvai įrodomas teoremas, kurios dažnai taikomos, sprendžiant daugelį uždavinių.

6 teorema. *Sakykime, kad P (x) ir Q (x) – du nelygūs nuliui daugianariai. Tada daugianario P (x) Q (x) laipsnis lygus daugianarių P (x) ir Q (x) laipsnių sumai, o daugianario P (x) Q (x) vyriausias koeficientas lygus daugianarių P (x) ir Q (x) vyriausiųjų koeficientų sandaugai.*

7 teorema. *Daugianario $P(x)+Q(x)$ (arba $P(x)-Q(x)$) laipsnis yra ne didesnis už aukščiausią daugianarių P (x), Q (x) laipsnį.*

Įsidėmėtina, kad daugianario $P(x)\pm Q(x)$ laipsnis gali būti žemesnis už kiekvieno daugianario $P(x)$, $Q(x)$ laipsnį. Pavyzdžiui, kai

$$P(x)=x^3-x^2+3x+5,$$

$$Q(x)=-x^3+x^2-x-3,$$

tai šių dviejų trečiojo laipsnio daugianarių suma yra pirmojo laipsnio daugianaris:

$$P(x)+Q(x)=2x+2.$$

Priminsime kelias daugianarių daugybos formules, pagal kurias dažnai sprendžiami uždaviniai (šiose formulėse m, n – bet kokie natūriniai skaičiai):

$$(x^n+a\,x^{n-1}+a^2x^{n-2}+\ \dots\ +a^{n-2}x^2+a^{n-1}x+a^n)(x-a)=$$
$$=x^{n+1}-a^{n+1}, \tag{8}$$

$$(x^{2m}-ax^{2m-1}+a^2x^{2m-2}+\ \dots\ +a^{2m-2}x^2-a^{2m-1}x+a^{2m})\cdot(x+a)=$$
$$=x^{2m+1}+a^{2m+1}. \tag{9}$$

Iš šių formulių, kai $a=1$, gauname

$$(x^n+x^{n-1}+\ \dots\ +x^2+x+1)(x-1)=x^{n+1}-1, \tag{10}$$

$$(x^{2m}-x^{2m-1}+x^{2m-2}-\ \dots\ +x^2-x+1)(x+1)=x^{2m+1}+1. \tag{11}$$

Šias formules galima įrodyti tiesiogiai, atskliautus ir sutraukus panašiuosius narius.

4 pavyzdys. Įrodykite, kad nėra daugianario, kurio kvadratas būtų lygus daugianariui

$$x^{1000}+x^{999}+\dots+x+1.$$

Sprendimas. Tarkime priešingai, kad

$$x^{1000}+x^{999}+\dots+x+1=\big(P(x)\big)^2; \tag{12}$$

čia $P(x)$ – tam tikras daugianaris. Paėmę $x=1$, gauname $\big(P(1)\big)^2=1001$. Todėl daugianario $P(x)$ koeficientų suma lygi $\sqrt{1001}$ arba $-\sqrt{1001}$. Taigi daugianario $P(x)$ koeficientų suma yra iracionalusis skaičius, o tai reiškia, kad to daugianario bent vienas koeficientas yra iracionalusis.

Daugianarį $P(x)$ parašysime kanonine forma:

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_n\ (a_0\neq 0).$$

Tada daugianario $\big(P(x)\big)^2=P(x)\cdot P(x)$ vyriausias narys lygus $a_0x^n\cdot a_0x^n=a_0^2x^{2n}$, ir todėl $a_0^2x^{2n}=x^{1000}$. Iš čia išplaukia, kad $n=500$ ir $a_0^2=1$, t.y. $a_0=\pm 1$. Kadangi $P(0)=a_n=a_{500}$, tai iš (12) lygybės gauname $1=(a_{500})^2$, t.y. $a_{500}=\pm 1$.

Taigi vyriausias koeficientas a_0 yra racionalusis skaičius, bet tarp kitų daugianario $P(x)$ koeficientų $a_1, \ldots, a_{499}$ yra bent vienas iracionalusis. Raide m pažymėsime mažiausią sveikąjį skaičių ir tarsime, kad jį atitinkantis koeficientas a_m yra iracionalusis (čia $m<500$). Tuomet turėsime

$$P(x)=a_0x^{500}+\ldots+a_{m-1}x^{500-(m-1)}+a_m x_{500}{}^{-m}+\ldots+a_{500}=$$

$$=(a_0x^{500}+\ldots+a_{m-1}x^{500-(m-1)})+(a_m x^{500-m}+\ldots+a_{500})=Q(x)+R(x);$$

čia $Q(x)=a_0x^{500}+\ \ldots\ +a_{m-1}x^{500-(m-1)}$ – daugianaris, kurio visi koeficientai yra racionalieji, o $R(x)=a_m x^{500-m}+\ \ldots\ +a_{500}$ – daugianaris, kurio vyriausias koeficientas yra iracionalusis. Pakėlę kvadratu, gauname

$$(P(x))^2=(Q(x)+R(x))^2=(Q(x))^2+2Q(x)R(x)+(R(x))^2.$$

Daugianario $(Q(x))^2$ koeficientai yra racionalieji. Daugianario $2Q(x)\cdot R(x)$ vyriausias narys lygus $2a_0x^{500}\cdot a_m x^{500-m}=2a_0a_m x^{1000-m}$. Šio nario koeficientas $2a_0a_m$ yra iracionalusis. Pagaliau daugianario $(R(x))^2$ laipsnis lygus $1000-2m$, t.y. mažesnis už $1000-m$ (nes $m>0$). Todėl daugianaris $(R(x))^2$ neturi dėmens su dauginamuoju x^{1000-m}.

Vadinasi, daugianaryje $(P(x))^2$ koeficientas prie x^{1000-m} lygus $b_m+2a_0a_m$; čia b_m – daugianario $(Q(x))^2$ koeficientas prie x^{1000-m}. Bet b_m – racionalusis skaičius o $2a_0a_m$ – iracionalusis, todėl ir jų suma $b_m+2a_0a_m$ – iracionalusis skaičius.

Taigi daugianario $(P(x))^2$ koeficientas prie x^{1000-m} yra iracionalusis skaičius. Bet tai prieštarauja (12) lygybei, nes kairėje jos pusėje yra daugianaris su racionaliaisiais koeficientais.

Dabar nagrinėsime daugianarių *dalybą.* Tarkime, kad $f(x)$ ir $g(x)$ – du daugianariai, be to, daugianaris $g(x)$ nelygus nuliui. Jeigu egzistuoja toks daugianaris $q(x)$, kad $f(x)=g(x)\,q(x)$, tai sakome, jog daugianaris $f(x)$ *dalijasi iš* $g(x)$ (arba $g(x)$ yra daugianario $f(x)$ *daliklis*), o daugianarį $q(x)$ vadiname $f(x)$ ir $g(x)$ *dalmeniu.*

Pavyzdžiui, (10) lygybė reiškia, kad su bet kokiu natūriniu k daugianaris x^k-1 dalijasi iš $x-1$ (ir dalmuo lygus $x^{k-1}+x^{k-2}+\ \ldots\ +x+1$).

Nesudėtingi pavyzdžiai rodo, kad vienas daugianaris ne visada dalijasi iš antrojo. Pavyzdžiui, daugianaris x^2+1 nesidalija iš $x-1$. Iš tiesų jeigu x^2+1 dalytųsi iš $x-1$, tai turėtume $x^2+1=(x-1)\,q(x)$; čia $q(x)$ – tam tikras daugianaris. Bet kairioji pusė, kai $x=1$, yra lygi 2, o dešinioji – 0. Vadinasi, parašytoji lygybė, koks bebūtų $q(x)$, yra klaidinga (4 teorema, p. 114), t.y. x^2+1 nesidalija iš $x-1$.

Taigi dalyba daugianarių aibėje galima ne visada. Tačiau yra bendresnė operacija, kuri vadinama *dalyba su liekana.* Taip dalyti daugianarių aibėje jau galima visada (aišku, išskyrus atvejį, kai daliklis lygus nuliui). Priminsime šios operacijos apibrėžimą.

Tarkime, kad $f(x)$ ir $g(x)$ – du daugianariai, be to, daugianaris $g(x)$ nelygus nuliui. Apibrėžimas sako, kad *daugianaris* $f(x)$ *yra padalytas su liekana iš daugianario* $g(x)$, kai daugianaris $f(x)$ parašytas reiškiniu

$$f(x)=g(x)\,q(x)+r(x); \tag{13}$$

čia $q(x)$ ir $r(x)$ – tam tikri daugianariai, be to, $r(x)$ arba lygus nuliui, arba jo laipsnis yra mažesnis už $g(x)$ laipsnį. Daugianaris $q(x)$ vadinamas

dalmeniu, o daugianaris $r(x)$ – *liekana*, kuri gaunama, $f(x)$ padalijus iš $g(x)$.

Dabar įrodysime teoremą, tvirtinančią, kad dalyba su liekana yra vienareikšmė ir visada galima operacija.

8 teorema. *Tarkime, kad $f(x)$ ir $g(x)$ – du bet kokie daugianariai, be to, daugianaris $g(x)$ nelygus nuliui. Tada egzistuoja daugianarių $q(x)$ ir $r(x)$ pora, tenkinanti* (13) *lygybę, ir tokia, kad daugianaris $r(x)$ yra arba lygus nuliui, arba jo laipsnis mažesnis negu daugianario $g(x)$ laipsnis.*

Įrodymas. Pirmiausia įrodysime, kad egzistuoja daugianariai $q(x)$ ir $r(x)$. Kai $f(x)=0$, tai (13) lygybę tenkina daugianariai $q(x)=0$, $r(x)=0$. Vadinasi, šiuo atveju daugianariai $q(x)$ ir $r(x)$ egzistuoja. Dabar sakysime, kad $f(x)\neq 0$, o daugianarių $f(x)$ ir $g(x)$ kanoninė išraiška yra tokia:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_n,$$
$$g(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ \dots\ +b_m;$$

čia m, n – neneigiami sveikieji skaičiai ir $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$. Kai $n<m$, tai daugianariai $q(x)=0$, $r(x)=f(x)$ tenkina suformuluotas sąlygas. Lieka atvejis, kai $n\geqslant m$. Išnagrinėsime daugianarį $\left(\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}\right)\cdot g(x)$. Jo vyriausiasis narys lygus $\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}b_0x^m=a_0x^n$ (žr. 6 teoremą, p. 117), t.y. sutampa su daugianario $f(x)$ vyriausiuoju nariu. Todėl daugianario $f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x)$ (jei tik jis nelygus nuliui) laipsnis yra mažesnis už n. Dabar parašysime savaime aiškią tapatybę

$$f(x)=\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x)+\left(f(x)-\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x)\right). \tag{14}$$

Daugianarį $\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}$ pažymėsime $q^*(x)$, o (14) lygybės dešiniosios pusės antrąjį dėmenį – $f^*(x)$; tuomet (14) lygybę galėsime parašyti taip:

$$f(x)=q^*(x)\,g(x)+f^*(x);$$

čia daugianaris $f^*(x)$ arba lygus nuliui, arba jo laipsnis yra mažesnis už $f(x)$ laipsnį. Jeigu daugianaris $f^*(x)$ lygus nuliui arba jo laipsnis yra mažesnis už m, tai tikslas pasiektas: teoremos sąlygas tenkina daugianariai $q(x)=q^*(x)$ ir $r(x)=f^*(x)$. Jeigu visgi $f^*(x)$ laipsnis yra didesnis arba lygus m, tai tikslo dar nepasiekėme. Tačiau šiek tiek priartėjome prie jo, nes daugianario $f^*(x)$ laipsnis yra mažesnis už $f(x)$ laipsnį. Su daugianariu $f^*(x)$ pasielgiame taip pat, t.y. jį išreiškiame taip:

$$f^*(x)=q^{**}(x)\,g(x)+f^{**}(x);$$

čia $f^{**}(x)$ yra dar mažesnio laipsnio daugianaris. Dabar galima parašyti

$$f(x)=q^*(x)\,g(x)+\left(q^{**}(x)\,g(x)+f^{**}(x)\right)=$$
$$=\left(q^*(x)+q^{**}(x)\right)g(x)+f^{**}(x).$$

Jeigu daugianaris $f^{**}(x)$ lygus nuliui arba jo laipsnis yra mažesnis už m, tai tikslą pasiekėme: teoremos sąlygas tenkina daugianariai $q(x)=q^*(x)+$

$+q^{**}(x)$ ir $r(x)=f^{**}(x)$. Bet jeigu daugianario $f^{**}(x)$ laipsnis dar yra didesnis arba lygus m, tai su daugianariu $f^{**}(x)$ galima pasielgti vėl taip pat. Taip padarę, gausime dar mažesnio laipsnio daugianarį ir t.t. Kadangi daugianarių $f(x), f^{*}(x), f^{**}(x), \ldots$ laipsniai mažėja, tai, padarę baigtinį skaičių žingsnių, gausime arba lygų nuliui, arba mažesnio negu m laipsnio daugianarį. Taigi ir gausime reikiamus daugianarius $q(x)$ ir $r(x)$.

Vadinasi, dalyba su liekana galima visada. Įrodysime jos vienatumą. Tarkime, kad daugianariui $f(x)$ galima suteikti (13) išraišką dviem būdais:

$$f(x)=q_1(x)\,g(x)+r_1(x), \tag{15}$$

$$f(x)=q_2(x)\,g(x)=r_2(x); \tag{16}$$

čia daugianaris $r_1(x)$ arba lygus nuliui, arba jo laipsnis yra mažesnis už m; tą patį galima pasakyti ir apie daugianarį $r_2(x)$. Kitaip tariant, daugianarį $f(x)$ padalijome su liekana iš daugianario $g(x)$ dviem būdais. Įrodę, kad (15) ir (16) lygybės sutampa $\big($t.y. $q_1(x)=q_2(x)$ bei $r_1(x)=r_2(x)\big)$, kartu įrodysime ir dalybos su liekana vienatumą.

Atėmę (16) lygybę iš (15), gauname

$$\big(q_2(x)-q_1(x)\big)\,g(x)=r_1(x)-r_2(x).$$

Dešinėje pusėje yra daugianaris, kurio laipsnis mažesnis už m (arba pats daugianaris lygus nuliui). Vadinasi, tokia pat savybe pasižymi ir jam lygus daugianaris, esantis kairėje lygybės pusėje. Bet kai daugianaris $q_2(x)-q_1(x)$ nelygus nuliui, tai pagal 6 teoremą (p. 117) kairiosios pusės laipsnis turi būti ne mažesnis už m (nes daugianario $g(x)$ laipsnis lygus m), o taip būti negali. Taigi $q_2(x)-q_1(x)=0$, ir todėl $r_1(x)-r_2(x)=0$. Bet tada $q_1(x)=q_2(x)$ ir $r_1(x)=r_2(x)$. 8 teorema įrodyta.

Iš teoremos įrodymo išplaukia gana paprastas dalybos su liekana būdas, kurį vadiname „dalyba stulpeliu“. Jis pagrįstas (14) lygybe. Taigi daugianariai, kurie yra (14) lygybėje, surašomi tokiu būdu:

$$\begin{array}{r|l}
f(x) & g(x) \\ \cline{2-2}
-\;\dfrac{a_0}{b_0}\,x^{n-m}\,g(x) & \dfrac{a_0}{b_0}\,x^{n-m} \\ \cline{1-1}
f^{*}(x) &
\end{array}$$

Be to, žinome, kad daugianaris $f^{*}(x)=f(x)-\dfrac{a_0}{b_0}\,x^{n-m}\,g(x)$ arba lygus nuliui, arba jo laipsnis yra mažesnis už $f(x)$ laipsnį. Įsidėmėtina, kad reiškinys $\dfrac{a_0}{b_0}\,x^{n-m}$, esantis po dalybos ženklu, gaunamas, vyriausiąjį daugianario $f(x)$ narį padalijus iš vyriausiojo $g(x)$ nario. Jeigu dabar daugianario $f^{*}(x)$ laipsnis dar yra didesnis arba lygus m, tai su $f^{*}(x)$ pasielgiame vėl taip pat – po dalybos ženklu parašome dar vieną dėmenį. Pavyz-

džiui, kai $f^*(x)=c_0x^p+c_1x^{p-1}+\ldots+c_p$ (čia $n>p\geqslant m$), tai dalybos procesą tęsiame tokiu būdu:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & g(x) \\ \cline{2-2} -\dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x) & \dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m}+\dfrac{c_0}{b_0}x^{p-m} \\ \cline{1-1} \qquad f^*(x) & \\ \qquad -\dfrac{c_0}{b_0}x^{p-m}g(x) & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad f^{**}(x) & \end{array}$$

Daugianario $f^{**}(x)$ laipsnis (jei tik pats daugianaris nelygus nuliui) sumažėjo ir t.t. Dalybos su liekana procesas baigiasi tada, kai, eilinį kartą atėmę, gauname daugianarį, kuris arba lygus nuliui, arba jo laipsnis yra mažesnis už m. Šis daugianaris ir yra $f(x)$ dalybos iš $g(x)$ *liekana*. Po dalybos ženklu gauname *dalmenį*, t.y. galiausiai turime tokį užrašą:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & g(x) \\ \cline{2-2} -\dfrac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x) & q(x) \\ \cline{1-1} \qquad f^*(x) & \\ \qquad -\dfrac{c_0}{b_0}x^{p-m}g(x) & \\ \cline{1-1} \qquad \cdots\cdots\cdots & \\ \qquad \cdots\cdots\cdots & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad r(x) & \end{array}$$

Dar kartą pabrėžiame, kad dalybos su liekana rezultatas išreiškiamas taip:

$$f(x)=q(x)\,g(x)+r(x).$$

Kai $r(x)=0$, tai daugianaris $f(x)$ dalijasi iš $g(x)$ (arba, kaip sakoma, „dalijasi be liekanos“); kai liekana $r(x)$ nelygi nuliui, tai $f(x)$ nesidalija iš $g(x)$.

5 pavyzdys. Daugianarį $x^4-3x^3+2x^2+x-5$ padalykite su liekana iš daugianario x^2+2x-3.

Sprendimas

$$\begin{array}{r|l} x^4-3x^3+2x^2+x-5 & x^2+2x-3 \\ \cline{2-2} -\;x^4+2x^3-3x^2\qquad\quad & x^2-5x+15 \\ \cline{1-1} -5x^3+5x^2+x-5 & \\ -\;-5x^3-10x^2+15x\quad & \\ \cline{1-1} 15x^2-14x-5 & \\ -\;15x^2+30x-45 & \\ \cline{1-1} -44x+40 & \end{array}$$

Matome, kad dalmuo lygus $x^2-5x+15$, o liekana lygi $-44x+40$. Taigi

$$\underbrace{x^4-3x^3+2x^2+x-5}_{\text{dalinys}}=$$

$$=\underbrace{(x^2+2x-3)}_{\text{daliklis}}\underbrace{(x^2-5x+15)}_{\text{dalmuo}}+(\underbrace{-44x+40}_{\text{liekana}}).$$

Pabaigai suformuluosime dvi teoremas, kurios dažnai padeda išspręsti uždavinius.

9 teorema. *Kai $f(x)$ ir $g(x)$ – daugianariai su sveikaisiais koeficientais, be to, vyriausiasis daugianario $g(x)$ koeficientas lygus 1 arba -1, tai dalmuo $q(x)$ ir liekana $r(x)$, kurie gaunami, $f(x)$ padalijus iš $g(x)$, taip pat yra daugianariai su sveikaisiais koeficientais.*

10 teorema. *Kai dalinys ir daliklis – daugianariai su racionaliaisiais koeficientais, tai dalmuo ir liekana irgi yra daugianariai su racionaliaisiais koeficientais.*

Iš tiesų, kai $f(x)$ ir $g(x)$ koeficientai yra sveikieji, be to, vyriausiasis daugianario $g(x)$ koeficientas b_0 lygus 1 arba -1, tai vyriausiasis dalmens koeficientas $\frac{a_0}{b_0}$ taip pat būna sveikasis, o daugianario $f^*(x)=f(x)-$ $-\frac{a_0}{b_0}x^{n-m}g(x)$ (žr. (14)) koeficientai – sveikieji skaičiai. Analogiškai gautume, kad kitas dalmens koeficientas irgi yra sveikasis skaičius, o daugianario $f^{**}(x)$ koeficientai taip pat sveikieji skaičiai ir t.t. Taigi 9 teorema yra teisinga. Panašiai įrodoma ir 10 teorema.

6 pavyzdys. Sakykime, kad x_1 ir x_2 – kvadratinės lygties x^2+ax+ $+b=0$ su sveikaisiais koeficientais a ir b šaknys. Dar tarkime, jog $f(x)$ – bet koks daugianaris su sveikaisiais koeficientais. Įrodykite, kad $f(x_1)+$ $+f(x_2)$ – sveikasis skaičius.

Sprendimas. Daugianarį $f(x)$ padalysime iš $g(x)=x^2+ax+b$. Gausime

$$f(x)=(x^2+ax+b)\,q(x)+r(x). \tag{17}$$

Čia liekanos $r(x)$ (jei tik ji nelygi nuliui) laipsnis yra ne didesnis už vienetą. Pagal 9 teoremą turime, kad ir dalmuo $q(x)$, ir liekana $r(x)$ yra daugianariai su sveikaisiais koeficientais. Todėl

$$r(x)=cx+d;$$

čia c ir d – sveikieji skaičiai.

(17) lygybėje įrašę $x=x_1$ ir turėdami galvoje tai, kad $x_1^2+ax_1+b=0$, gauname

$$f(x_1)=0\cdot q(x_1)+r(x_1)=r(x_1)=cx_1+d.$$

Analogiškai $f(x_2)=cx_2+d$. Vadinasi, $f(x_1)+f(x_2)=(cx_1+d)+(cx_2+d)=$ $=c(x_1+x_2)+2d$. Bet pagal Vijetos formules $x_1+x_2=-a$, todėl

$$f(x_1)+f(x_2)=-ac+2d.$$

Dabar aišku, kad $f(x_1)+f(x_2)$ – sveikasis skaičius (nes a, c ir d – sveikieji skaičiai).

§ 3. Algebrinė lygtis ir jos šaknys

Skaičius c vadinamas daugianario $f(x)$ *šaknimi*, kai $f(c)=0$. Uždavinį „*raskite visas duotojo daugianario $f(x)$ šaknis*“ įprasta formuluoti taip: „*išspręskite lygtį $f(x)=0$*“. Kitaip tariant, nagrinėdami lygtį $f(x)=0$, nelaikome, kad užrašas $f(x)=0$ išreiškia daugianarių lygybę (t.y., jog visi daugianario $f(x)$ koeficientai lygūs nuliui). Taip rašydami, norime tik pasakyti, kad ieškome daugianario $f(x)$ *šaknų*, t.y. tų taškų, kuriuose daugianario $f(x)$ *reikšmė* lygi nuliui. Pavyzdžiui, nagrinėdami *kvadratinę lygtį*

$$x^2+px+q=0, \tag{18}$$

šio sąryšio nelaikome daugianarių lygybe. Parašę (18) sąryšį, tuo pačiu suformulavome uždavinį – surasti kvadratinio trinario x^2+px+q šaknis. Daugianario $f(x)$ šaknys taip pat vadinamos lygties $f(x)=0$ šaknimis. Todėl uždavinys „išspręskite lygtį $f(x)=0$“ formuluojamas taip pat, kaip uždavinys „Raskite lygties $f(x)=0$ šaknis“. Dar kartą akcentuojame, kad išspręsti lygtį – reiškia rasti visas jos šaknis.

Mokyklos kurse nagrinėjamos įvairios lygtys: iracionaliosios, logaritminės, rodiklinės, trigonometrinės ir kt. *Algebrine lygtimi* vadinama lygtis $f(x)=0$; čia $f(x)$ – tam tikras daugianaris. Kai $f(x)$ yra n-tojo laipsnio daugianaris, tai lygtis $f(x)=0$ vadinama n-tojo *laipsnio algebrine lygtimi*.

Sprendžiant algebrines lygtis, naudinga ši teorema (ji vadinama *Bezu teorema*).

11 teorema. *Liekana, kuri gaunama, daugianarį $f(x)$ padalijus iš $x-a$, yra lygi $f(a)$ (t.y. lygi šio daugianario reikšmei, kai $x=a$).*

Iš tiesų, daugianarį $f(x)$ padalijję iš $x-a$ su liekana, gauname:

$$f(x)=(x-a)\,q(x)+r(x);$$

čia liekana $r(x)$, jei tik ji nelygi nuliui, yra daugianaris, kurio laipsnis mažesnis už daliklio $x-a$ laipsnį. Vadinasi, liekanos laipsnis lygus nuliui. Todėl $r(x)=r$ yra skaičius. Tada

$$f(x)=(x-a)\,q(x)+r.$$

Norėdami rasti skaičių r, šioje lygybėje įrašome $x=a$. Gauname $f(a)=r$, o tai ir įrodo teoremą.

Iš šios teoremos tiesiogiai išplaukia tokia:

12 teorema. *Kai a yra daugianario $f(x)$ šaknis, tai šis daugianaris dalijasi iš $x-a$.*

11 ir 12 teoremoje skaičius a ir daugianario $f(x)$ koeficientai gali būti ir realieji, ir kompleksiniai.

36 puslapyje buvo pasakyta, kad dviejų skaičių sandauga lygi nuliui tada ir tik tada, kai bent vienas šių skaičių lygus nuliui. Iš to tiesiogiai išplaukia dar viena svarbi algebrinių lygčių sprendimui teorema.

13 teorema. *Tarkime, kad $f(x)$ ir $g(x)$ – du bet kokie daugianariai. Skaičius a yra lygties $f(x)\,g(x)=0$ šaknis tada ir tik tada, kai jis yra bent vienos šių lygčių $f(x)=0$, $g(x)=0$ šaknis.*

Kitaip tariant, norėdami gauti visas lygties $f(x)\,g(x)=0$ šaknis, turime prie lygties $f(x)=0$ šaknų prijungti lygties $g(x)=0$ šaknis.

Iš šios teoremos išplaukia svarbi išvada. Sakykime, kad $f(x)=0$ yra n-tojo laipsnio algebrinė lygtis (t.y. $f(x)$ – n-tojo laipsnio daugianaris). Tarkime, kad žinome vieną šios lygties šaknį $x=a$. Tada pagal 12 teoremą daugianaris $f(x)$ dalijasi iš $x-a$, t.y. $f(x)=(x-a)\,g(x)$. Pagal 6 teoremą išeina, kad daugianario $g(x)$ laipsnis lygus $n-1$. Vadinasi, norėdami gauti visas lygties $f(x)=0$ šaknis, turime prie lygties $x-a=0$ šaknų prijungti lygties $g(x)=0$ šaknis (žr. 13 teoremą). Bet lygtis $x-a=0$ turi tik vieną šaknį $x=a$, kurią žinojome iš anksto. Taigi, prijungę prie šaknies $x=a$ visas lygties $g(x)=0$ šaknis, turėsime visas lygties $f(x)=0$ šaknis. Atkreipiame dėmesį į tai, kad lygtis $g(x)=0$ yra paprastesnė negu duotoji, bent jau todėl, kad yra žemesnio, būtent, $(n-1)$-ojo laipsnio.

O kai žinome algebrinės lygties $f(x)=0$ vieną šaknį $x=a$, tai $f(x)=(x-a)\,g(x)$. Tada, išsprendę vienetu žemesnio laipsnio lygtį $g(x)=0$, rasime visas kitas duotosios lygties šaknis. Trumpiau, kai žinome vieną lygties šaknį, galime jos laipsnį sumažinti vienetu.

Kartais algebrinių lygčių sprendimą palengvina tokia teorema.

14 teorema. *Kai visi daugianario*

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ a_{n-1}x+a_n$$

koeficientai yra sveikieji skaičiai, tai kiekviena sveikoji šio daugianario šaknis yra jo laisvojo nario a_n daliklis.

Iš tiesų tarkime, kad c – sveikoji daugianario $f(x)$ šaknis, t.y.

$$f(c)=a_0c^n+a_1c^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}c+a_n=0.$$

Tada

$$a_n=-c\,(a_0c^{n-1}+a_1c^{n-2}+\ \dots\ +a_{n-1}).$$

Kadangi skliaustuose parašytas skaičius yra sveikasis (nes visi koeficientai $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, kaip ir skaičius c, yra sveikieji), tai a_n dalijasi iš c.

Pagal šią teoremą daug lengviau rasti daugianario su sveikaisiais koeficientais sveikąsias šaknis. Dėl to reikia paimti visus laisvojo nario daliklius (ir teigiamus, ir neigiamus) ir patikrinti, kuris jų yra duotojo daugianario šaknis. O jeigu nė su viena laisvojo nario daliklio reikšme daugianaris nelygus nuliui, tai šis daugianaris sveikųjų šaknų neturi.

7 pavyzdys. Išspręskite lygtį $x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$.

Sprendimas. Parašome laisvojo nario 12 daliklius: 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 6; -6; 12; -12. Dabar, įrašę šiuos skaičius į daugianarį $f(x)=x^4-4x^3-13x^2+28x+12$, patikriname, kurie jų yra daugianario šaknys. Gauname:

$$f(1)=24 \text{ (t.y. 1 – ne šaknis);}$$

$$f(-1)=-24 \text{ (t.y. } -1 \text{ – taip pat ne šaknis);}$$

$$f(2)=0 \text{ (t.y. 2 – daugianario } f(x) \text{ šaknis).}$$

Taigi radome vieną šaknį $x=2$. Pagal 12 teoremą daugianaris $f(x)$dalijasi iš $x-2$. Padaliję („stulpeliu"), turime

$$f(x)=(x-2)(x^3-2x^2-17x-6).$$

Norėdami surasti kitas šaknis, turime išspręsti lygtį $x^3-2x^2-17x-6=0$. Vėl parašome laisvojo nario -6 daliklius:

$$1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 6;\ -6.$$

Skaičiai 1 ir -1 negali būti gautos kubinės lygties šaknys (jau nustatėme, kad jie nėra pradinės lygties šaknys). Išbandysime kitus daliklius: iš eilės surašysime jų reikšmes daugianaryje $g(x)=x^3-2x^2-17x-6$. Gauname:

$g(2)=-40$ (t.y. 2– ne šaknis];

$g(-2)=12$ (t.y. -2 – ne šaknis);

$g(3)=-48$ (t.y. 3 – ne šaknis);

$g(-3)=0$ (t.y. -3 – daugianario $g(x)$ šaknis).

Taigi radome dar vieną šaknį $x=-3$. Pagal 12 teoremą daugianaris $g(x)$ dalijasi iš $x+3$. Padaliję turime

$$x^3-2x^2-17x-6=(x+3)(x^2-5x-2).$$

Vadinasi, norėdami rasti likusias šaknis, turėsime išspręsti kvadratinę lygtį $x^2-5x-2=0$. Jos šaknys: $\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{33}$. Taigi duotoji ketvirtojo laipsnio lygtis turi keturias šaknis:

$$x_1=2;\ x_2=-3;\ x_3=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{33};\ x_4=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{33}.$$

Dabar išnagrinėsime daugianario skaidymą pirmojo laipsnio dauginamaisiais ir su šiuo skaidymu susijusį klausimą, kiek šaknų turi algebrinė lygtis. Pagrindinė yra tokia teorema:

15 teorema. *Bet kokį n-tojo laipsnio daugianarį*

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \tag{19}$$

(čia $a_0\neq 0$ ir $n>0$) galima išreikšti sandauga

$$f(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n).$$

Šis skaidinys, jeigu nekreipsime dėmesio į dauginamųjų tvarką, yra vienintelis.

Koeficientai $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bei skaičiai $c_1, c_2, \ldots, c_n$ gali būti ir realieji, ir kompleksiniai.

15 teoremos įrodymas pagrįstas teorema, kuri vadinama pagrindine algebros teorema.

16 teorema. *Bet koks nenulinio laipsnio daugianaris $f(x)$ turi bent vieną šaknį.*

Daugianario koeficientai bei jo šaknys gali būti ir realieji, ir kompleksiniai skaičiai.

Nors 16 teorema *formuluojama* kaip grynai algebros teorema, tačiau *įrodymo* metodų požiūriu ji nėra algebros teorema. Visi žinomi pagrindinės algebros teoremos įrodymo būdai yra neelementarieji (juos galima rasti aukštosios algebros vadovėliuose). Todėl šioje knygoje 16 teorema *neįrodoma*, bet, ja remdamiesi, visiškai įrodysime 15 teoremą.

15 *teoremos įrodymas.* Naudosimės matematinės indukcijos metodu. Bet kuris pirmojo laipsnio daugianaris turi išraišką

$$f(x)=a_0x+a_1 \ (a_0 \neq 0),$$

todėl

$$f(x)=a_0\left(x+\frac{a_1}{a_0}\right).$$

Šiuo atveju skaidinio vienatumas savaime aiškus. Taigi pirmojo laipsnio daugianariams teorema įrodyta.

Dabar tarkime, kad ši teorema įrodyta bet kokiems daugianariams, kurių laipsnis *mažesnis* už n. Imkime bet kokį (19) išraiškos n-ojo laipsnio daugianarį. Pagal 16 teoremą jis turi bent vieną šaknį c_1. Bet tada pagal 12 teoremą daugianaris $f(x)$ dalijasi iš $x-c_1$, t.y.

$$f(x)=(x-c_1)\,g(x);$$

čia $g(x)$ – tam tikras $(n-1)$-ojo laipsnio daugianaris. Pagal 6 teoremą vyriausias daugianario $g(x)$ narys lygus a_0x^{n-1}. Tačiau, prisiminę indukcijos prielaidą, daugianarį $g(x)$ galime išskaidyti dauginamaisiais tokiu būdu:

$$g(x)=a_0(x-c_2)\ldots(x-c_n)$$

(čia $c_2, \ldots, c_n$ – tam tikri skaičiai, realieji arba kompleksiniai). Taigi

$$f(x)=(x-c_1)\,g(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n).$$

Įrodėme, kad daugianarį $f(x)$ galima išskaidyti pirmojo laipsnio dauginamaisiais. Lieka įrodyti, kad gautas skaidinys yra vienintelis (ta prasme, kad kiti skaidiniai nuo šio skiriasi tik dauginamųjų tvarka).

Tarkime, kad

$$a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)=b_0(x-d_1)(x-d_2)\ldots(x-d_n). \qquad (20)$$

Palyginę koeficientus prie x^n kairėje ir dešinėje, įsitikiname, kad $a_0=b_0$. Toliau, kai $x=c_1$, kairioji (20) lygybės pusė lygi nuliui. Vadinasi, ir dešinioji šios lygybės pusė turi būti lygi nuliui. Bet tada bent vienas iš skaičių $d_1, d_2, \ldots, d_n$ turi būti lygus c_1; priešingu atveju dešinėje pusėje būtų n nelygių nuliui reiškinių $c_1-d_1, c_1-d_2, \ldots, c_1-d_n$ sandauga.

Sakykime, pavyzdžiui, kad $d_1=c_1$. Tuomet iš (20) lygybės gauname

$$a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)-a_0(x-c_1)(x-d_2)\ldots(x-d_n)=0,$$

arba

$$a_0(x-c_1)\big((x-c_2)\ldots(x-c_n)-(x-d_2)\ldots(x-d_n)\big)=0. \qquad (21)$$

Jeigu daugianaris $(x-c_2)\dots(x-c_n)-(x-d_2)\dots(x-d_n)$ būtų nelygus nuliui, tai ir visa kairioji (21) reiškinio pusė būtų nelygus nuliui daugianaris (pavyzdžiui, pagal 6 teoremą kairiosios pusės vyriausiasis koeficientas būtų nelygus nuliui). Bet tai reikštų, kad (21) lygybė yra klaidinga. Vadinasi, daugianaris $(x-c_2)\dots(x-c_n)-(x-d_2)\dots(x-d_n)$ yra nulinis daugianaris, t.y.

$$(x-c_2)\dots(x-c_n)=(x-d_2)\dots(x-d_n).$$

Šios lygybės abiejose pusėse yra $(n-1)$-ojo laipsnio daugianariai, ir, remiantis indukcijos prielaida, kairiosios ir dešiniosios pusės pirmojo laipsnio dauginamieji gali skirtis tik tvarka, kuria jie surašyti. Taigi ir (20) lygybėje kairiosios ir dešiniosios pusės sandaugos gali skirtis tik dauginamųjų tvarka. Teorema įrodyta.

Suformuluosime teoremą, kuri išsyk išplaukia iš 15 teoremos.

17 teorema. *Tarkime, kad*

$$f(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_n) \qquad (22)$$

yra n-tojo laipsnio daugianario, išskaidyto pirmojo laipsnio dauginamaisiais, skaidinys. Tada skaičiai $c_1, c_2, \dots, c_n$ *yra daugianario* $f(x)$ *šaknys ir šis daugianaris kitų šaknų neturi.*

Iš tiesų, įrašę (22) reiškinyje $x=c_m$ (m įgyja reikšmes $1, 2, \dots, n$), gausime $f(c_m)=0$. Vadinasi, kiekvienas skaičius c_m yra daugianario $f(x)$ šaknis. Jeigu vietoj x įrašytume bet kokį skaičių c, nelygų nė vienam iš skaičių $c_1, c_2, \dots, c_n$, tai nė vienas (22) reiškinio dešiniosios pusės dauginamasis nebūtų lygus nuliui, t.y. turėtume $f(c)\neq 0$.

Dabar jau galime tiksliai nusakyti terminą „visų daugianario $f(x)$ šaknų aibė“: pagal apibrėžimą visų šaknų aibę sudaro skaičiai c_1, $c_2, \dots, c_n$, kurie yra (22) skaidinyje. Jeigu kai kurie šių skaičių sutampa, tai sakome, kad daugianaris turi *kartotines* šaknis. Būtent, kai aibėje $c_1, c_2, \dots, c_n$ skaičius c pasikartoja k kartų, o visi kiti šios aibės skaičiai yra nelygūs c, tai c vadinamas daugianario $f(x)$ k-ojo *kartotinumo šaknimi.* Sutarę kiekvieną šaknį skaityti tiek kartų, koks jos kartotinumas, galėsime tvirtinti, kad yra teisinga ši teorema, gerokai patikslinanti pagrindinę algebros teoeomą.

18 teorema. *Kiekviena n-tojo laipsnio algebrinė lygtis turi lygiai n šaknų.*

8 pavyzdys. Įrodykite kad nėra daugianario, kurio kvadratas būtų lygus daugianariui $x^n+x^{n-1}+\dots+x+1$ (čia n – natūrinis skaičius).

Sprendimas. Tarkime priešingai, kad

$$x^n+x^{n-1}+\dots+x+1=\big(P(x)\big)^2;$$

čia $P(x)$ – tam tikras daugianaris, ir dar tarkime, jog

$$P(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\dots(x-c_m)$$

yra šio daugianario, išskaidyto pirmojo laipsnio dauginamaisiais, skaidinys. Tada

$$x^n+x^{n-1}+\dots+1=a_0^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\dots(x-c_m)^2.$$

Taigi kiekviena daugianario $x^n+x^{n-1}+\ldots+1$ šaknis yra kartotinė (jos kartotinumas ne mažesnis už 2). Padauginę daugianarį $x^n+x^{n-1}+$ $+\ldots+1$ iš $x-1$, gausime, kad daugianaris

$$x^{n+1}-1=(x-1)(x^n+x^{n-1}+\ldots+1)$$

turi šaknį $x=1$. Visos kitos šio daugianario šaknys yra kartotinės. Tačiau tai netiesa: pagal 87 puslapyje išvestą formulę daugianario $x^{n+1}-1$ šaknys apibrėžiamos reiškiniu

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n+1}+i\sin\frac{2k\pi}{n+1}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1)$$

ir visos šios šaknys yra skirtingos (t.y. nekartotinės). Gautas prieštaravimas ir įrodo uždavinio teiginį.

Kai $n=1000$, gauname uždavinį, kurį jau nagrinėjome 117 puslapyje (4 pavyzdys). Pasiūlytas ten sprendimo būdas tinka tik tiems n, kuriems $n+1$ nėra tikslusis kvadratas. Būdas, kuriuo išsprendėme uždavinį dabar, tinka bet kokiems n.

9 pavyzdys. Raskite liekaną, gaunamą, daugianarį $x^{100}-2x^{51}+1$ padalijus iš x^2-1.

Sprendimas. Liekana yra daugianaris, kurio laipsnis ne didesnis už vienetą. Kitaip tariant, daugianarį $x^{100}-2x^{51}+1$ padaliję iš x^2-1 su liekana, gauname

$$x^{100}-2x^{51}+1=(x^2-1)\,q(x)+(ax+b);\qquad(23)$$

čia $q(x)$ – dalmuo, o $r(x)=ax+b$ – liekana. Mums reikia rasti skaičius a ir b. Kai $x=1$, iš (23) lygybės randame

$$0=a+b,$$

o, kai $x=-1$, gauname

$$4=-a+b.$$

Taigi skaičius a ir b rasime, kai išspręsime sistemą

$$\begin{cases} b+a=0,\\ b-a=4.\end{cases}$$

Jos sprendinys yra $b=2$, $a=-2$. Vadinasi, ieškomoji liekana lygi $-2x+2$.

Baigdami šį skyrių, įrodysime 5 teoremą, suformuluotą 114 puslapyje. Tarkime, kad $P(x)$ ir $Q(x)$ – du daugianariai, kurių laipsniai ne didesni už n. Dar tarkime, kad

$$P(c_1)=Q(c_1),\ P(c_2)=Q(c_2),\ \ldots,\ P(c_{n+1})=Q(c_{n+1});$$

čia $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ – skirtingi skaičiai. Tada daugianaris $f(x)=P(x)-$ $-Q(x)$ įgyja reikšmes, lygias nuliui, $n+1$ taškuose $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$, t.y. turi ne mažiau kaip $n+1$ šaknų. Daugianario $f(x)$ laipsnis ne didesnis už n. Jeigu šis daugianaris būtų k-tojo laipsnio ir nelygus nuliui, tai lygtis $f(x)=0$ turėtų lygiai k šaknų (įskaitant jų kartotinumą). Taigi lygtis turėtų ne daugiau kaip n šaknų. Bet tai prieštarauja ankstesnei išvadai. Vadinasi, daugianaris $f(x)=P(x)-Q(x)$ lygus nuliui, t.y. $P(x)=$ $=Q(x)$.

VI skyriaus uždaviniai

6.1. Raskite daugianario

$$(1+2x-4x^2)^{248}(1-7x+5x^2)^{345}$$

koeficientų sumą.

6. 2. Tarkime, kad $f(x)$ – daugianaris su sveikaisiais koeficientais. Įrodykite, kad su bet kokiomis sveikosiomis a ir b reikšmėmis skaičius $f(a+\sqrt{b})+f(a-\sqrt{b})$ yra sveikas.

6.3. Ar daugianaris $x^{100}-3x+2$ dalijasi iš x^2-1?

6.4. Padaliję nežinomą daugianarį iš $x-1$, gavome liekaną, lygią 3, o padaliję iš $x-2$, lygią 4. Kokią gausime liekaną, kai šį daugianarį padalysime iš $(x-1)(x-2)$?

6.5. Padaliję nežinomą daugianarį iš $x+1$, $x-2$, $x-3$, gavome liekaną, lygią atitinkamai 3, 1, -1. Kokią gausime liekaną, kai šį daugianarį padalysime iš $(x+1)(x-2)(x-3)$?

6.6. Įrodykite, kad daugianaris $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ dalijasi iš $x^4+x^3+x^2+x+1$. Raskite dalmenį.

6.7. Daugianaris ax^4+bx^3+1 dalijasi iš $(x-1)^2$. Raskite a ir b.

6.8. Skaičius $1+\sqrt{3}$ yra lygties

$$x^4+ax^3+bx^2+6x+2=0$$

šaknis. Raskite kitas šios lygties šaknis, kai a ir b – racionalieji skaičiai.

6.9. Skaičius $1+\sqrt{2}$ yra lygties

$$x^5+ax^3+bx^2+5x+2=0$$

šaknis. Raskite kitas šios lygties šaknis, kai a ir b – racionalieji skaičiai.

6.10. Raskite lygčių

$$x^6+x^5+2x^4+x^3+2x^2+x+1=0,$$

$$x^6-x^5+2x^4-x^3+3x^2-2x+2=0$$

bendrąsias šaknis.

6.11. Raskite lygčių

$$x^6+2x^5+3x^4+2x^3+3x^2+2x+2=0,$$

$$x^4+3x^3+6x^2+6x+4=0$$

bendrąsias šaknis.

6.12. Įrodykite, kad su bet kokiomis sveikomis neneigiamomis m, n, p reikšmėmis daugianaris $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ dalijasi iš x^2+x+1.

6.13. Tarkime, kad x_1, x_2, x_3 yra lygties

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

šaknys. Įrodykite šias formules:

$$x_1+x_2+x_3=-a,$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=b,$$

$$x_1x_2x_3=-c$$

(Vijetos formulės kubiniai lygčiai).

6.14. Lygtis $2x^3+mx^2+nx+12=0$ turi šaknis $x_1=1$, $x_2=-2$. Raskite trečiąją šios lygties šaknį.

6.15. Apskaičiuokite sumą $x_0^{32}+\frac{1}{x_0^{32}}$, kai x_0 – lygties $x^2+x+1=0$ šaknis.

6.16. Įrodykite, kad daugianaris x^n+a^n $(a\neq 0)$ dalijasi iš $x+a$ tada ir tik tada, kai n – nelyginis skaičius.

6.17. Tarkime, kad x_1, x_2, x_3 – lygties $x^3+px+q=0$ šaknys. Įrodykite, kad

$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3.$$

6.18. Įrodykite, kad daugianaris x^3-ax^2-bx-c, kai $b\geqslant 0$, $c\geqslant 0$, negali turėti dviejų teigiamųjų šaknų.

6.19. Kokiai sąlygai esant, lygtis $x^3+px+q=0$ turi dvi vienodas šaknis?

6.20. Tarkime, kad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – daugianario

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

$(a_0\neq 0,\ a_n\neq 0)$ šaknys. Kokias šaknis turi daugianariai

$$A(x)=a_0x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^n a_n$$

ir

$$B(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0?$$

6.21. Sakykime, kad $P(x)=A(x)B(x)$, be to, padalijus daugianarį $B(x)$ iš $C(x)$, gaunama liekana $R(x)$. Įrodykite, kad liekana, gaunama, padalijus daugianarį $P(x)$ iš $A(x)\,C(x)$, yra lygi $A(x)\,R(x)$.

6.22. Raskite liekaną, kurią gauname, daugianarį $x^{1971}-1$ padaliję iš $(x^2+1)(x^2+x+1)$.

6.23. Įrodykite, kad daugianaris

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n$$

dalijasi iš $(x-b)^2$ tada ir tik tada, kai

$$b^n+a_1b^{n-1}+a_2b^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

ir

$$nb^{n-1}+a_1(n-1)\,b^{n-2}+a_2(n-2)\,b^{n-3}+\ldots+a_{n-1}=0.$$

6.24. Įrodykite, kad su bet kokia realiąja b reikšme lygtis $x^3+ax+b=0$, kai $a\geqslant 0$, turi tik vieną realiąją šaknį.

6.25. Įrodykite, kad su bet kokia realiąja c reikšme lygtis x^3-x^2+x+ $+c=0$ turi tik vieną realiąją šaknį.

6.26. Tarkime, kad $x=c$ yra daugianario

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_{n-1}x+a_n$$

su sveikaisiais koeficientais sveikoji šaknis. Įrodykite, kad su bet kokia sveikąja m reikšme skaičius $f(m)$ dalijasi iš $c-m$.

6.27. Daugianarį $A(x)$ galima išreikšti dviejų daugianarių su realiaisiais koeficientais kvadratų suma. Tarkime, kad daugianaris $B(x)$ turi tą pačią savybę. Įrodykite, jog šią savybę turės ir daugianaris $A(x)B(x)$.

6.28. Jeigu daugianaris su realiaisiais koeficientais turi kompleksinę šaknį $a+bi$, tai jis dalijasi iš daugianario $(x-a)^2+b^2$. Įrodykite.

6.29. Įrodykite, kad kiekvienas daugianaris su realiaisiais koeficientais dalijasi iš kokio nors pirmojo arba antrojo laipsnio daugianario, kurio koeficientai irgi realieji skaičiai.

6.30. Įrodykite, kad kiekvienas nelyginio laipsnio daugianaris su realiaisiais koeficientais turi bent vieną realiąją šaknį.

6.31. Daugianaris $f(x)$, kurio koeficientai yra realieji skaičiai, su visomis realiomis x reikšmėmis įgyja teigiamas reikšmes. Įrodykite, kad jį galima išreikšti dviejų daugianarių su realiaisiais koeficientais kvadratų suma.

6.32. Visi daugianario

$$x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots+a_{n-1}x+a_n$$

koeficientai – sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad kiekviena racionalioji šio daugianario šaknis yra sveikasis skaičius.

6.33. Įrodykite, kad n-tojo laipsnio daugianario

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_n$$

su sveikaisiais koeficientais $a_0, a_1, \dots, a_n$ bet kurią racionaliąją šaknį galima išreikšti nesuprastinama trupmena $\frac{p}{q}$, kurios skaitiklis p yra laisvojo nario a_n, o vardiklis q – vyriausiojo koeficiento a_0 dalikliai.

6.34. Tarkime, kad x_1, x_2, x_3 – kubinės lygties $x^3+ax^2+bx+c=0$ su sveikaisiais koeficientais a, b, c šaknys. Dar tarkime, kad $f(x)$ – bet koks daugianaris su sveikaisiais koeficientais. Įrodykite, kad $f(x_1)+f(x_2)+$ $+f(x_3)$ yra sveikasis skaičius.

6.35. Sakykime, kad $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$ – vienas kitam nelygūs realieji skaičiai. Ar egzistuoja n-tojo laipsnio daugianaris, turintis šaknis $c_1, c_2, \dots, c_n$, kurio reikšmė taške c_{n+1} būtų lygi 1?

6.36. Tarkime, kad $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$ ir $d_1, d_2, \dots, d_n, d_{n+1}$ – realieji skaičiai, be to, skaičiai $c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}$ nelygūs vienas kitam. Įrodykite, kad egzistuoja vienas ir tik vienas ne aukštesnio kaip n-tojo laipsnio daugianaris, įgyjantis taškuose $c_1, c_2, \dots, c_{n+1}$ reikšmes, atitinkamai lygias $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$.

VII SKYRIUS

FUNKCIJOS IR GRAFIKAI

§ 1. Funkcijos apibrėžimas

Funkcijos sąvoka dažna mokykliniame matematikos kurse ir mokiniams ji gerai žinoma. Ir visgi stojantieji į aukštąsias mokyklas per egzaminus, vartodami šią sąvoką, daro daug klaidų. Paaiškinti tai galima įvairiomis priežastimis, bet pirmiausia tuo, kad žodis „funkcija“ matematikoje turi kelias prasmes, o mokykliniuose vadovėliuose ši aplinkybė nepaaiškinta. Todėl pirmiausia panagrinėsime funkcijos apibrėžimą bei su juo susijusias sąvokas ir detaliai aptarsime žodžio „funkcija“ vartojimo mokyklinėje matematikoje įvairius aspektus.

Bendriausias (ir, be abejonės, pagrindinis) funkcijos sąvokos apibrėžimas yra toks. *Sakysime, kad yra apibrėžta tam tikra funkcija, pirma, kai duota tam tikra aibė, kuri vadinama funkcijos abibrėžimo sritimi, antra, kai duota tam tikra aibė, kuri vadinama funkcijos reikšmių sritimi, ir, trečia, kai nurodyta taisyklė, pagal kurią kiekvieną elementą iš apibrėžimo srities atitinka tam tikras elementas iš reikšmių srities.*

Pateiksime keletą pavyzdžių, iliustruojančių šį bendrą apibrėžimą.

1 pavyzdys. Visų trikampių, esančių plokštumoje, aibę pažymėsime raide A, o visų apskritimų, esančių toje pačioje plokštumoje, aibę pažymėsime raide B. Aibę A laikysime apibrėžimo sritimi, o aibę B – reikšmių sritimi (tos funkcijos, kurią ketiname apibrėžti). Pagaliau tarkime, kad kiekvieną trikampį atitinka apskritimas, įbrėžtas į šį trikampį. Čia jau turime apibrėžtą taisyklę, pagal kurią kiekvieną elementą iš apibrėžimo srities (t.y. trikampį) atitinka tam tikras elementas iš reikšmių srities (t.y. apskritimas).

2 pavyzdys. Imame tas pačias aibes A ir B, kaip ir 1 pavyzdyje, t. y. apibrėžimo sritimi laikome visų trikampių, esančių plokštumoje, aibę, o reikšmių sritimi – visų apskritimų aibę. Toliau kiekvienam trikampiui priskiriame apskritimą, apibrėžtą apie jį. Gauname funkciją, turinčią tą pačią apibrėžimo sritį A ir tą pačią reikšmių sritį B. Bet tai jau kita funkcija, nes apskritimas atitinka trikampį pagal kitą taisyklę.

3 pavyzdys. Visų skritulių, esančių plokštumoje, aibę pažymime raide K, o visų realiųjų skaičių aibę – raide R. Toliau parenkame plotų matavimo vienetą ir kiekvienam aibės K elementui (t.y. skrituliui) priskiriame skaičių, lygų šio skritulio plotui. Gauname funkciją, kurios apibrėžimo sritis yra K, o reikšmių sritis – R.

4 pavyzdys. Visų natūrinių skaičių aibę pažymime raide N, o visų realiųjų skaičių aibę – raide R. Parenkame du realiuosius skaičius a_1

bei r ir tariame, kad kiekvieną natūrinį skaičių n atitinka realusis skaičius, lygus aritmetinės progresijos, kurios pirmasis narys a_1 ir skirtumas r, n-tajam nariui (t.y. natūrinį skaičių n atitinka realusis skaičius $a_1+(n-1)r$). Gavome funkciją, kurios apibrėžimo sritis yra N, o reikšmių sritis – R.

5 pavyzdys. Visų realiųjų skaičių aibę R laikysime apibrėžimo ir kartu reikšmių sritimi. Parenkame du realiuosius skaičius a_1 bei r ir tariame, kad kiekvieną realųjį skaičių x atitinka skaičius $a_1+(x-1)\ r$. Gavome funkciją, kurios apibrėžimo ir reikšmių sritis yra R.

Turbūt pastebėjote, kad 4 ir 5 pavyzdžiuose buvo vienoda reikšmių sritis R ir vienoda atitikties taisyklė: formulės $a_1+(n-1)\ r$ ir $a_1+(x-1)\ r$ rodo, kad, norint sužinoti, koks skaičius atitinka pasirinktąjį (n arba x), reikia su juo atlikti vienus ir tuos pačius veiksmus. Tačiau šių dviejų funkcijų apibrėžimo sritys yra skirtingos, todėl 4 ir 5 pavyzdžio funkcijos *nevienodos*. Vadinasi, apibrėžiant funkciją, reikia nurodyti ne tik atitikties taisyklę, bet ir apibrėžimo bei reikšmių sritis.

Funkcijas įprasta žymėti raidėmis. Viena raide (paprastai x) žymimas bet koks elementas, paimtas iš funkcijos apibrėžimo srities. Ši raidė vadinama *argumentu*. Taigi, kai x – tam tikros funkcijos argumentas, vietoj x galima įrašyti bet kokį elementą, priklausantį šios funkcijos apibrėžimo sričiai. Toliau kita raide (paprastai y) žymimas bet koks elementas, paimtas iš funkcijos reikšmių srities. Ši raidė vadinama *funkcija* (čia ir yra antroji žodžio „funkcija“ reikšmė). Pagaliau trečiąja raide (paprastai f) žymima atitikties taisyklė: kai a – bet kokia argumento reikšmė (t. y. bet koks elementas, priklausantis apibrėžimo sričiai), tai ją atitinkantis elementas žymimas $f(a)$. Elementas $y=f(a)$ vadinamas funkcijos reikšme, kai $x=a$.

Norėdami pasakyti, kad x – argumentas, y – funkcija, o f – atitikties taisyklė, rašome

$$y=f(x) \tag{1}$$

(skaitome „ygrekas lygus ef nuo iks“ arba „ygrekas yra ikso funkcija“). Kartais raidė f arba reiškinys $f(x)$ taip pat vadinamas funkcija (ir tai – jau trečioji žodžio „funkcija“ reikšmė).

6 pavyzdys. Grįšime vėl prie funkcijos, kurią nagrinėjome 4 pavyzdyje. Argumentą pažymėsime n, funkciją – y, o atitikties taisyklę – f. Taigi šią funkciją parašysime taip: $y=f(n)$. Štai kelios jos reikšmės:

$$f(1)=a_1,\ f(2)=a_2=a_1+r,\ f(3)=a_3=a_1+2r \text{ ir t.t.}$$

7 pavyzdys. Nagrinėsime funkciją $y=\varphi(x)$, kurios apibrėžimo ir reikšmių sritis yra visų realiųjų skaičių aibė R, o atitikties taisyklė turi tokią išraišką:

$$y=\begin{cases} 0, \text{ kai } x\leqslant 0, \\ x, \text{ kai } x>0. \end{cases}$$

Štai kelios šios funkcijos reikšmės:

$$\varphi(-5)=0,\ \varphi(-\pi)=0,\ \varphi(-1)=0,\ \varphi(0)=0,$$

$$\varphi(1)=1,\ \varphi(3)=3,\ \varphi(\pi)=\pi,\ \varphi(100)=100,\ \ldots$$

Suprantama, kad vietoj raidžių x, y, f galima vartoti ir kitas. Pavyzdžiui, užrašas $s=\varphi(t)$ reiškia, kad s yra argumento t funkcija (arba trumpiau: s yra t funkcija); čia atitikties taisyklė pažymėta raide φ.

Reikia pabrėžti, kad funkcijos reikšmių sritis yra elementų (arba skaičių) aibė, kuriai būtinai priklauso visos nagrinėjamos funkcijos reikšmės. Tačiau reikšmių srityje gali būti tokių elementų, kurie nebus funkcijos reikšmės. Kitaip tariant, funkcijos *reikšmių aibė* būtinai priklauso *reikšmių sričiai*, nebūtinai sutapdama su ja. Štai 3 pavyzdyje funkcijos reikšmės yra tik *teigiamieji* skaičiai, o reikšmių sritis yra visų realiųjų skaičių aibė. 4 ir 7 pavyzdyje funkcijos reikšmių aibė taip pat nesutampa su jos reikšmių sritimi.

Išnagrinėsime dar vieną (ketvirtą!) žodžio „funkcija“ reikšmę, kuri mokykliniame matematikos kurse yra ypač svarbi. Būtent, funkcija vadinamas bet koks reiškinys, kuriame yra argumentas x, taip pat veiksmų ženklų ir skaičių. Pavyzdžiui, reiškiniai

$$y=x^2+1, \tag{2}$$

$$y=\frac{x(x^2+1)}{x}, \tag{3}$$

$$y=|x-1|, \tag{4}$$

$$y=\frac{x-5}{x+2}, \tag{5}$$

$$y=\sqrt{1+x}, \tag{6}$$

$$y=\sqrt{-(x-2)^2(x+1)^2(x+5)^2} \tag{7}$$

yra funkcijos (šia prasme).

Kodėl tokios formulės vadinamos „funkcijomis“ ir ar tai neprieštarauja anksčiau apibrėžtai funkcijos sąvokai? Ryšį su ankstesniąja funkcijos sąvokos traktuote galėsime nustatyti, ateityje visur laikydamiesi šio susitarimo.

Kai funkcija apibrėžta lygybe, kurios kairėje pusėje yra y (arba kita raidė, žyminti funkciją), o dešinėje pusėje tam tikras reiškinys, sudarytas iš argumento x, skaičių ir veiksmų ženklų (apibrėžimo sritis nenurodyta), tai įprasta laikyti, kad

1) visų realiųjų skaičių aibė R yra reikšmių sritis;

2) apibrėžimo sritis yra aibė visų tų realiųjų skaičių, kuriuos įrašius vietoj x, galima (realiųjų skaičių aibėje) atlikti visus veiksmus, nurodytus dešinėje pusėje;

3) kai skaičius a priklauso apibrėžimo sričiai, funkcijos reikšmė su $x=a$ yra lygi skaičiui, kuris gaunamas, įrašius dešinėje pusėje $x=a$ ir atlikus nurodytus veiksmus.

Taigi, kai funkcija yra apibrėžta formule, tai tuo pačiu nurodyta ir jos apibrėžimo sritis, ir atitikties taisyklė.

8 pavyzdys. Raskite (2) ir (3) funkcijų apibrėžimo sritį; ištirkite, ar sutampa šios funkcijos.

Sprendimas. Veiksmai, surašyti dešinėje (2) lygybės pusėje, galimi su bet kokia realiąja x reikšme, t.y. (2) funkcijos apibrėžimo sritis yra

visų realiųjų skaičių aibė R (arba, kitaip, begalinis intervalas $-\infty < x < \infty$). (3) funkcija apibrėžta visiems realiesiems skaičiams x, išskyrus $x=0$, t.y. šios funkcijos apibrėžimo sritis gaunama iš aibės R, pašalinus tašką $x=0$. Taigi (3) funkcijos apibrėžimo sritis yra dviejų begalinių intervalų $]-\infty;\ 0$ ir $]0;\ \infty[$ sąjunga.

Įsidėmėtina, kad (2) ir (3) funkcijų reikšmės su bet kokiu $x \neq 0$ sutampa. Bet visgi (2) ir (3) funkcijos yra skirtingos, nes jų apibrėžimo sritys nesutampa.

9 pavyzdys. Raskite (5), (6) ir (7) funkcijų apibrėžimo sritis.

Sprendimas. (5) funkcija yra apibrėžta su visomis argumento reikšmėmis, išskyrus $x=-2$. Vadinasi, šios funkcijos apibrėžimo sritis yra skaičių ašis, iš kurios pašalintas taškas $x=-2$. Kitaip tariant, ši apibrėžimo sritis yra begalinių intervalų $]-\infty;\ -2[$ ir $]-2;\ \infty[$ sąjunga.

(6) funkcijos apibrėžimo sritį sudaro tie taškai, kuriuose pošaknis yra neneigiamas, t.y. šią apibrėžimo sritį galima išreikšti nelygybe $1+x \geqslant 0$, arba $x \geqslant -1$. Kitaip tariant, (6) funkcijos apibrėžimo sritis yra begalinis intervalas $[-1;\ \infty[$. Šio intervalo galinis taškas $x=-1$ priklauso apibrėžimo sričiai.

Pagaliau (7) funkcijos apibrėžimo sritį sudaro tos x reikšmės, su kuriomis (7) lygybės dešiniosios pusės pošaknis yra neneigiamas. Tačiau jeigu šis pošaknis nelygus nuliui, tai jis, be abejonės, yra neigiamas. Vadinasi, (7) funkcijos apibrėžimo sritį sudaro tik tie taškai x, kuriuose pošaknis *lygus nuliui*. Tai bus taškai $x=-5$, $x=-1$ bei $x=2$. Taigi (7) funkcijos apibrėžimo sritį sudaro tik trys taškai: -5, -1 ir 2.

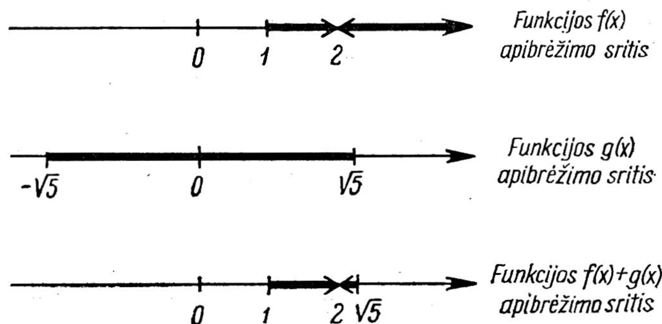
10 pavyzdys. Raskite funkcijos

$$y=f(x)+g(x)$$

apibrėžimo sritį, kai

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \text{ ir } g(x)=\sqrt{5-x^2}.$$

Sprendimas. Pirmasis dėmuo $f(x)$ yra apibrėžtas, kai galioja dvi sąlygos: 1) pošaknis yra neneigiamas, 2) vardiklis nelygus nuliui. Pirmoji sąlyga reiškia, kad $x \geqslant 1$, o antroji – kad $x \neq 2$. Taigi funkcijos $f(x)$ api-



44 pav.

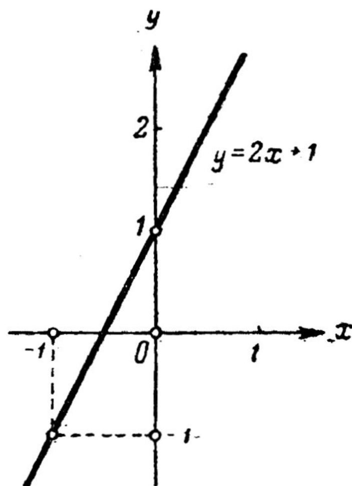
brėžimo sritis yra pusiau atviro intervalo [1; 2[ir begalinio intervalo]2; ∞[sąjunga. Toliau antrasis dėmuo $g(x)$ yra apibrėžtas, kai $5-x^2 \geqslant 0$, t.y. $-\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}$. Kitaip tariant, funkcijos $g(x)$ apibrėžimo sritis yra uždaras intervalas $[-\sqrt{5};\ +\sqrt{5}]$.

Tam tikras taškas $x=a$ priklauso funkcijos $y=f(x)+g(x)$ apibrėžimo sričiai tada, kai taške $x=a$ yra apibrėžta ir funkcija $f(x)$, ir funkcija $g(x)$. Kitaip tariant, funkcijos $y=f(x)+g(x)$ apibrėžimo sritis yra funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričių *sankirta*. Vadinasi (44 pav.), funkcijos $y=f(x)+g(x)$ apibrėžimo sritis yra pusiau atvirų intervalų [1; 2[ir 2;] $\sqrt{5}$] sąjunga.

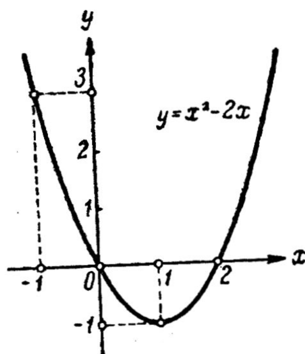
§ 2. Funkcijos grafikas

Plokštumoje nubraižome stačiakampę koordinačių sistemą ir abscisių ašyje atidedame argumento x reikšmes, o ordinačių ašyje – funkcijos $y=f(x)$ reikšmes. Visų taškų aibė, kurių abscisės priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai, o ordinatės yra lygios atitinkamoms funkcijos $y=f(x)$ reikšmėms, vadinama funkcijos $y=f(x)$ *grafiku.*

Kitaip tariant, funkcijos $y=f(x)$ grafikas – tai visų plokštumos taškų, kurių koordinatės x, y tenkina sąryšį $y=f(x)$, aibė.



45 pav.

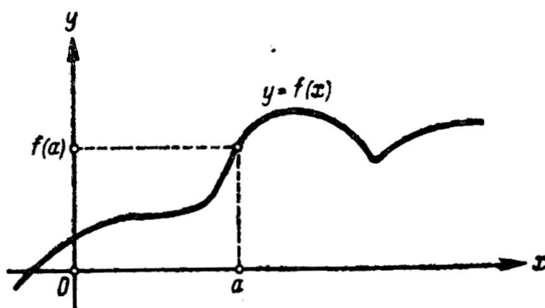


46 pav.

45 ir 46 pav. pavaizduoti funkcijų $y=2x+1$ ir $y=x^2-2x$ grafikai. Griežtai kalbant, *funkcijos grafiką* (kurį ką tik tiksliai apibrėžėme) reikia skirti nuo nubrėžtos kreivės, kuri visada yra daugmaž tikslus *grafiko eskizas* (ir tai paprastai ne viso grafiko, o tik jo dalies, kuri esti baigtinėje plokštumos dalyje). Tačiau ir toliau sakysime „grafikas“, o ne „grafiko eskizas“.

Turint nubraižytą grafiką, galima rasti funkcijos reikšmę taške. Būtent, kai taškas $x=a$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ apibrėžimo sričiai, tai,

norėdami rasti skaičių $f(a)$ (t.y. funkcijos reikšmę taške $x=a$), darome taip. Per tašką, kurio abscisė $x=a$, nubrėžiame tiesę, lygiagrečią ordinačių ašiai; ši tiesė kirs funkcijos $y=f(x)$ grafiką viename taške; šio taško ordinatė pagal grafiko apibrėžimą lygi $f(a)$ (47 pav.). Pavyzdžiui, kai $f(x)=x^2-2x$, tai iš grafiko (46 pav.) randame $f(-1)=3, f(0)=0, f(1)=-1, f(2)=0$ ir t.t.



47 pav.

Funkcijos grafikas vaizdžiai iliustruoja funkcijos elgseną ir savybes. Pavyzdžiui, panagrinėję 46 pav., matome, kad funkcija $y=x^2-2x$, kai $x<0$ ir $x>2$, įgyja teigiamas reikšmes, o kai $0<x<2$ – neigiamas; kai $x=1$, funkcija įgyja mažiausią reikšmę.

Norint nubraižyti funkcijos $y=f(x)$ grafiką, reikia plokštumoje pažymėti visus taškus, kurių koordinatės x, y tenkina lygtį $y=f(x)$. Bet, deja, taip padaryti galima ne visada, nes tokių taškų yra be galo daug. Todėl funkcijos grafikas braižomas apytiksliai – didesniu arba mažesniu tikslumu. Paprasčiausia grafiką nubraižyti, pažymėjus kelis taškus. Dėl to parenkame baigtinį argumento x reikšmių skaičių, pavyzdžiui, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ir, apskaičiavę funkcijos reikšmes, sudarome lentelę, kuri atrodo taip:

x	x_1	x_2	...	x_k
y	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_k)$

Užpildę tokią lentelę, galėsime pažymėti kelis funkcijos $y=f(x)$ grafiko taškus. Nubrėžę per šiuos taškus kreivę, gausime apytikslį funkcijos $y=f(x)$ grafiką.

Tačiau toks grafiko braižymo metodas pagal kelis taškus yra nepatikimas. Iš tiesų grafiko elgsena tarp pažymėtųjų taškų, taip pat išorėje kraštinių pažymėtųjų taškų lieka neaiški.

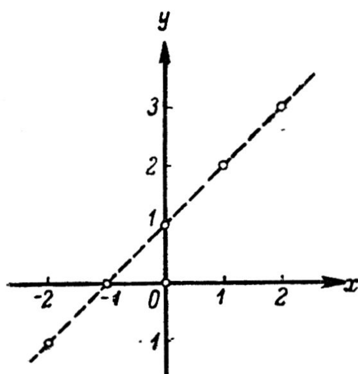
11 pavyzdys. Norėdamas nubraižyti grafiką, mokinys sudarė argumento ir funkcijos reikšmių lentelę:

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3

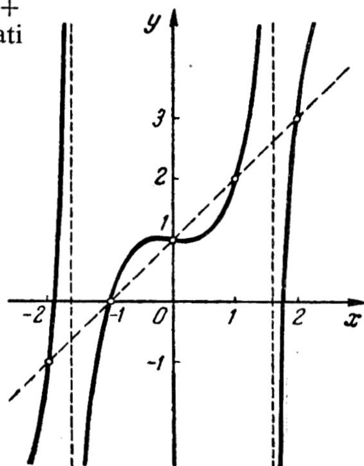
Šias reikšmes atitinkantys penki taškai pažymėti 48 pav. Remdamasis šių taškų padėtimi, mokinys padarė išvadą, kad funkcijos grafikas yra tiesė (48 pav. ji pavaizduota brūkšneliais). Ar patikima ši išvada? Jeigu nėra jokių papildomų faktų, patvirtinančių šią išvadą, tai vargu ar galima ją laikyti patikima. Pailiustruosime tai nesudėtingu pavyzdžiu. Panagrinėkime funkciją

$$y = x^3 + 1 - \frac{x^3 - x}{x^2 - 3}.$$

Apskaičiavę šios funkcijos reikšmes taškuose -2, -1, 0, 1, 2, gauname, kad jos yra lygios funkcijos reikšmėms, surašytoms lentelėje. Tačiau šios funkcijos grafikas ne tiesė (jis pavaizduotas 49 pav.). Kitas pavyzdys – funkcija $y = x + 1 + \sin \pi x$; šią funkciją apibūdina ta pati reikšmių lentelė.



48 pav.



49 pav.

Šis pavyzdys rodo, kad funkcijos grafiko braižymas tik pagal kelis jo taškus yra nepatikimas. Todėl, norėdami nubraižyti duotosios funkcijos grafiką, paprastai elgiamės taip. Pirmiausia nagrinėjame duotosios funkcijos savybes, kurios padeda nubraižyti grafiko eskizą. Po to, apskaičiavę funkcijos reikšmes keliuose taškuose (jų parinkimas priklauso nuo funkcijos savybių), pažymime atitinkamus grafiko taškus. Ir galiausiai per pažymėtuosius taškus, atsižvelgę į duotosios funkcijos savybes, nubrėžiame kreivę.

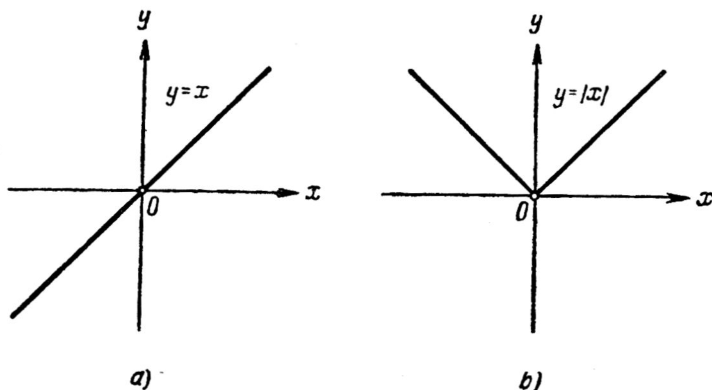
Kai kurias (paprasčiausias ir dažnai taikomas) funkcijų savybes, pagal kurias braižomas grafiko eskizas, nagrinėsime § 3. O dabar išnagrinėsime kai kuriuos dažnai naudojamus grafikų braižymo būdus.

Funkcijos $y = |f(x)|$ grafikas. Išnagrinėsime, kaip braižomas $y = |f(x)|$ grafikas, kai žinoma funkcija $f(x)$. Priminsime, kaip tai daroma. Pagal skaičiaus absoliutinio didumo apibrėžimą galima parašyti

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{kai } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x), & \text{kai } f(x) < 0. \end{cases}$$

Tai reiškia, kad funkcijos $y=|f(x)|$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko štai tokiu būdu: visi funkcijos $y=f(x)$ grafiko taškai, kurių ordinatės neneigiamos, paliekami nepakeisti; toliau vietoj funkcijos $y=f(x)$ grafiko taškų, kurių ordinatės yra neigiamos, nubraižomi atitinkami funkcijos $y=-f(x)$ grafiko taškai (t.y. funkcijos $y=f(x)$ grafiko dalis, kuri yra žemiau x-ų ašies, simetriškai atvaizduojama pastarosios atžvilgiu).

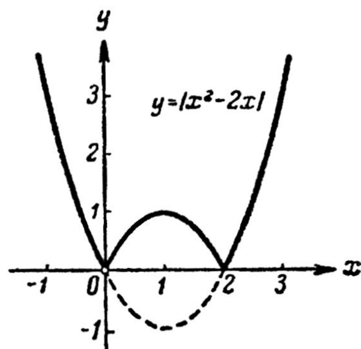
12 pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $y=|x|$ grafiką.



50 pav.

Sprendimas. Imame funkcijos $y=x$ grafiką (50 pav., *a*) ir grafiko dalį, atitinkančią $x<0$ (esančią po x ašimi), simetriškai atvaizduojame x ašies atžvilgiu. Taip padarę, gauname funkcijos $y=|x|$ grafiką (50 pav., *b*).

13 pavyzdys. 51 pav. pavaizduotas funkcijos $y=|x^2-2x|$ grafikas, kuris gautas iš funkcijos $y=x^2-2x$ grafiko (žr. 46 pav.). Dėl to funkcijos $y=x^2-2x$ grafiko dalis, atitinkanti taškus $0<x<2$, buvo simetriškai atvaizduota x ašies atžvilgiu.



51 pav.

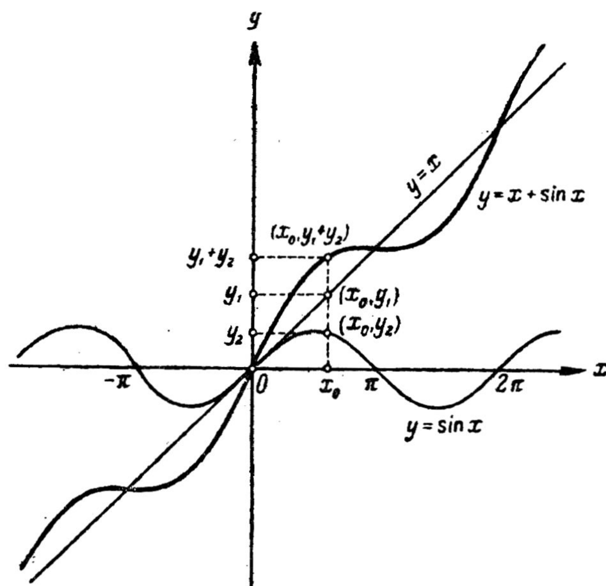
Funkcijos $y=f_1(x)+f_2(x)$ grafikas. Išnagrinėsime, kaip braižomas funkcijos $y=f_1(x)+f_2(x)$ grafikas, kai duoti funkcijų $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$ grafikai.

Priminsime, kad funkcijos $y=f_1(x)+f_2(x)$ apibrėžimo sritį sudaro visos tos x reikšmės, su kuriomis yra apibrėžtos abi funkcijos $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$, t.y. ši apibrėžimo sritis yra funkcijų $f_1(x)$ ir $f_2(x)$ apibrėžimo sričių sankirta.

Tarkime, kad taškai $(x_0; y_1)$ ir $(x_0; y_2)$ priklauso atitinkamai funkcijų $y=f_1(x)$ bei $y=f_2(x)$ grafikams, t.y. $y_1=f_1(x_0)$, $y_2=f_2(x_0)$. Tuomet taškas $(x_0; y_1+y_2)$ priklauso funkcijos $y=f_1(x)+f_2(x)$ grafikui, nes $f_1(x_0)+$

$+f_2(x_0)=y_1+y_2$. Tokiu pat būdu galima gauti ir bet kokį kitą funkcijos $y=f_1(x)+f_2(x)$ grafiko tašką. Vadinasi, funkcijos $y=f_1(x)+f_2(x)$ grafiką galima gauti iš funkcijų $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$ grafikų, kiekvieną funkcijos $y=f_1(x)$ grafiko tašką $(x_0;\ y_1)$ pakeitus tašku $(x_0;\ y_1+y_2)$; čia $y_2=f_2(x_0)$. Kitaip tariant, pastūmus kiekvieną funkcijos $y=f_1(x)$ grafiko tašką $(x_0;\ y_1)$ išilgai y ašies dydžiu $y_2=f_2(x_0)$. Taip darydami, imame tik tuos taškus x_0, kuriuose yra apibrėžtos abi funkcijos $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$.

Toks funkcijos $y=f_1(x)+f_2(x)$ grafiko braižymo metodas vadinamas funkcijų $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$ *grafikų sudėtimi.*



52 pav.

14 pavyzdys. 52 pav. pavaizduotas funkcijos $y=x+\sin x$ grafikas, kuris gautas, pritaikius grafikų sudėties metodą. (Manome, kad skaitytojas yra susipažinęs su trigonometrinių funkcijų $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ savybėmis bei jų grafikais.)

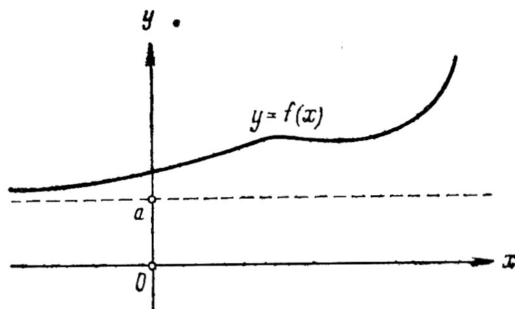
§ 3. Aprėžtos, monotoninės, lyginės, nelyginės, periodinės funkcijos

1. Aprėžtumas. Funkciją $f(x)$ vadiname *aprėžta iš apačios,* kai egzistuoja toks skaičius a, kad su kiekviena x reikšme iš funkcijos apibrėžimo srities yra teisinga nelygybė $f(x)>a$.

Funkciją $f(x)$ vadiname *aprėžta iš viršaus,* kai egzistuoja toks skaičius b, kad su kiekviena x reikšme iš apibrėžimo srities yra teisinga nelygybė $f(x)<b$.

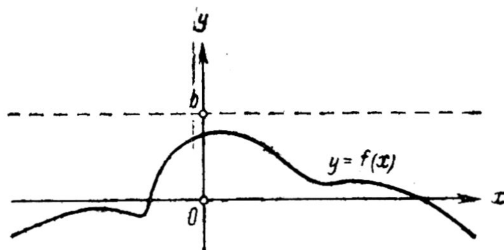
Funkciją $f(x)$ vadiname *aprėžta*, kai ji kartu yra aprėžta iš apačios ir iš viršaus.

Funkcijos aprėžtumas (iš viršaus arba iš apačios) turi esminę įtaką jos grafiko vaizdui ir padėčiai. Kai funkcija $y=f(x)$ yra aprėžta iš apačios, t.y. $f(x)>a$ su bet kokia x reikšme iš funkcijos apibrėžimo srities, tai visi grafiko taškai yra aukščiau tiesės $y=a$ (53 pav.). Kai funkcija $y=f(x)$



53 pav.

yra aprėžta iš viršaus, t.y. $f(x)<b$ su bet kokia x reikšme iš funkcijos apibrėžimo srities, tai visi grafiko taškai yra žemiau tiesės $y=b$ (54 pav.). Pagaliau, kai funkcija $y=f(x)$ yra aprėžta, t.y. $a<f(x)<b$ su kiekviena



54 pav.

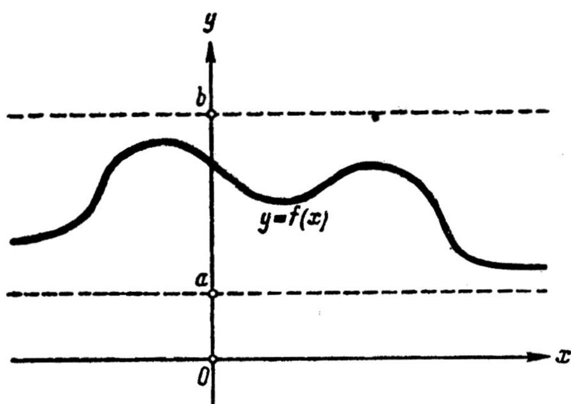
x reikšme iš funkcijos apibrėžimo srities, tai visi grafiko taškai yra juostoje tarp tiesių $y=a$ ir $y=b$ (55 pav.).

15 pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ grafiką.

Sprendimas. Funkcija yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje $-\infty<x<\infty$. Kadangi su kiekviena x reikšme trupmenos skaitiklis ir vardiklis yra teigiami, tai su kiekvienu x funkcija $f(x)>0$. Taigi funkcija $f(x)$ aprėžta iš apačios. Pagaliau, kadangi $1+x^2\geqslant 1$, tai su kiekvienu x funkcija $f(x)\leqslant 1$. Todėl funkcija $f(x)$ aprėžta iš viršaus. Vadinasi, funkcijos $y=f(x)$ visas grafikas yra juostoje tarp tiesių $y=0$ ir $y=1$.

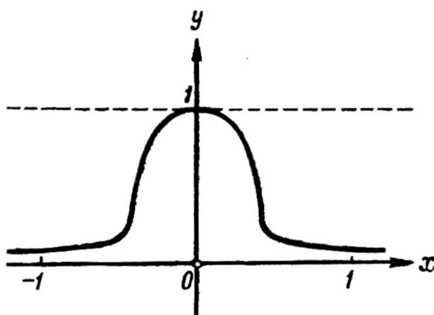
Lengva įžvelgti dar vieną funkcijos $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ savybę: kai x reikšmės (teigiamos arba neigiamos) absoliutinis didumas yra didelis, atitinkama

funkcijos $f(x)$ reikšmė yra artima nuliui. Kitaip tariant, kuo toliau pajudame į dešinę (arba į kairę), tuo funkcijos $y=f(x)$ grafikas „priartėja“ prie tiesės $y=0$. Kai $x=0$, turime $f(0)=1$. Taigi funkcijos grafikas eina

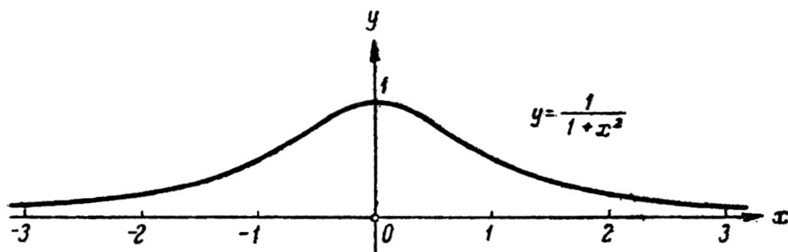


55 pav.

per tašką (0, 1). Dabar jau galima nubrėžti grafiko eskizą (56 pav.). Pažymėję dar kelis grafiko taškus $\left(\text{pavyzdžiui, kai } x=\pm\frac{1}{2},\ x=\pm 1,\ x=\pm\right.$ $\left.\pm 2,\ x=\pm 3\right)$, šį grafiką galėsime nubraižyti tiksliau (57 pav.).



56 pav.



57 pav.

16 pavyzdys. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ nėra aprėžta iš viršaus.

Sprendimas. Reikia įrodyti, kad koks bebūtų skaičius b, egzistuoja (bent viena) x reikšmė iš funkcijos apibrėžimo srities, su kuria $f(x) \geqslant b$, t.y. $\frac{1}{(x-1)^2} \geqslant b$.

Funkcijos $\frac{1}{(x-1)^2}$ apibrėžimo sritis yra dviejų begalinių intervalų $]-\infty; 1[$ ir $]1; \infty[$ sąjunga. Jeigu $b \leqslant 0$, tai nelygybė $\frac{1}{(x-1)^2} \geqslant b$ yra visada teisinga, pavyzdžiui, kai $x=0$. Kai $b>0$, tai funkcijos $\frac{1}{(x-1)^2}$ apibrėžimo srityje nelygybė $\frac{1}{(x-1)^2} \geqslant b$ yra ekvivalenti nelygybei $|x-1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{b}}$. Pastaroji nelygybė yra teisinga, pavyzdžiui, kai $x=1+\frac{1}{\sqrt{b}}$, o tai ir reikėjo įrodyti.

Pastaba. Naudojantis I skyriaus simbolika, apibrėžtos iš viršaus funkcijos apibrėžimą (žr. p. 140) galima parašyti taip. Simboliu $A(x, b)$ žymime teiginio funkciją

$$A(x, b) \equiv \{f(x)<b\},$$

apibrėžtą visų x reikšmių, priklausančių funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sričiai, aibėje ir visų realiųjų b reikšmių aibėje. Tada teiginio funkcija

$$B(b) \equiv (\forall x)\, A(x, b)$$

bus apibrėžta visų realiųjų b reikšmių aibėje. Ši teiginio funkcija reiškia, kad su kiekvienu x iš funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities yra teisinga nelygybė $f(x)<b$. Čia iš tiesų turime teiginio funkciją, nes su vienomis b reikšmėmis ji galbūt yra teisinga, o su kitomis – klaidinga.

Užrašas $(\exists b)\, B(b)$ jau reiškia teiginį (o ne teiginio funkciją). Šį teiginį pažymėsime C:

$$C \equiv (\exists b)\, B(b) \equiv (\exists b)(\forall x)\, A(x, b).$$

Jis tvirtina, kad egzistuoja toks realusis skaičius b, kad su kiekvienu x iš funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities yra teisinga nelygybė $f(x)<b$. Dabar apibrėžimą galima suformuluoti taip: funkcija $f(x)$ vadinama aprėžta iš viršaus, kai teiginys C yra teisingas.

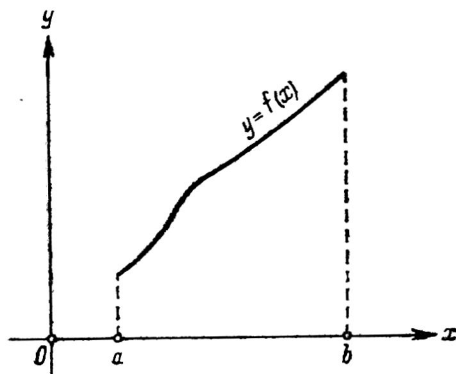
Priešingu atveju, kai teiginys C yra klaidingas, funkcija $f(x)$ nėra aprėžta iš viršaus. Bet jeigu teiginys C klaidingas, tai teiginys $\neg C$ (ne C) yra teisingas. Pritaikę teiginių ekvivalentumo taisykles, suformuluotas 16 puslapyje, galėsime parašyti

$$\neg C \equiv \neg(\exists b)\, B(b) \equiv (\forall b)\big(\neg B(b)\big) \equiv (\forall b)\, \neg(\forall x)\, A(x, b) \equiv$$
$$\equiv (\forall b)(\exists x)\, \neg A(x, b).$$

Taigi funkcija $f(x)$ nėra aprėžta iš viršaus, kai kiekvieną realųjį skaičių b atitinka (bent viena) x reikšmė iš funkcijos apibrėžimo srities, su kuria $f(x) \geqslant b$. Šis apibrėžimas ir pateiktas 16 pavyzdžio pradžioje.

2. Monotoniškumas. Funkciją vadiname *didėjančia* tam tikrame intervale (kuris visas yra šios funkcijos apibrėžimo srityje), kai, didėjant argumentui (šiame intervale), kartu didėja ir funkcijos reikšmė; funkciją vadiname *mažėjančia* tam tikrame intervale, kai, didėjant argumentui, funkcijos reikšmė mažėja.

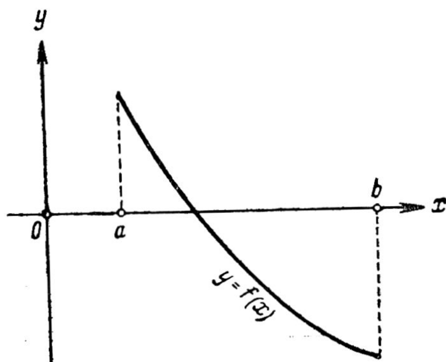
Kitaip tariant, funkciją $y=f(x)$ vadiname didėjančia intervale $a<x<b$ (kuris visas yra šios funkcijos apibrėžimo srityje), kai bet kokiems x_1 ir x_2, tenkinantiems nelygybes $a<x_1<x_2<b$, galioja nelygybė $f(x_1)<f(x_2)$; analogiškai funkciją $y=f(x)$ vadiname *mažėjančia* intervale $a<x<b$, kai bet kokiems x_1 ir x_2, tenkinantiems nelygybes $a<x_1<x_2<b$, galioja nelygybė $f(x_1)>f(x_2)$.



58 pav.

Kai funkcija $y=f(x)$ intervale $a<x<b$ yra didėjanti arba mažėjanti, tai ją vadiname *monotonine* šiame intervale, o patį intervalą $a<x<b$ vadiname funkcijos $y=f(x)$ *monotoniškumo intervalu.*

Funkcijos didėjimas intervale $a<x<b$ reiškia, kad, didėjant x, funkcijos grafikas šiame intervale kyla aukštyn (58 pav.), o mažėjimas reiškia, kad, didėjant x, grafikas leidžiasi žemyn (59 pav.). Funkcija $y=x^3-3x$, kurios grafikas pavaizduotas 60 pav., visoje skaičių tiesėje nėra nei didėjanti, nei mažėjanti. Tačiau taškai $x=-1$ ir $x=1$ visą skaičių ašį dalija į tris intervalus: $]-\infty; -1[$, $]-1; 1[$, $]1; \infty[$, kurių kiekvienas yra funkcijos monotoniškumo intervalas. 60 pav. matome, kad intervaluose $]-\infty; -1[$ ir $]1; \infty[$ ši funkcija didėja, o intervale $]-1; 1[$ mažėja. Panašią savybę turi visos funkcijos, kurios nagrinėjamos vidurinėje mokykloje; kiekvienos jų apibrėžimo sritį galima suskaidyti į monotoniškumo intervalus.



59 pav.

17 pavyzdys. Funkcija $y=2x+1$ (45 pav.) didėja intervale $]-\infty; \infty[$, t.y. visoje x ašyje. Funkcija $y=x^2-2x$ (46 pav.) nėra nei didėjanti, nei mažėjanti visoje skaičių ašyje. Tačiau taškas $x=1$ dalija skaičių ašį į du intervalus $]-\infty; 1[$ ir $]1; \infty[$, kurių kiekvienas yra šios funkcijos monotoniškumo intervalas: intervale $]-\infty; 1[$ funkcija $y=x^2-2x$ mažėja, o intervale $]1; \infty[$ didėja.

18 pavyzdys. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ didėja intervale]0; 1[ir mažėja intervale]1; ∞[.

Sprendimas. Pagal apibrėžimą turime įrodyti: 1) kai $0<x_1<x_2<1$, tai $f(x_1)<f(x_2)$, t.y.

$$\frac{2x_1}{1+x_1^2}<\frac{2x_2}{1+x_2^2}$$

ir 2) kai $1<x_1<x_2$, tai $f(x_1)>f(x_2)$, t.y.

$$\frac{2x_1}{1+x_1^2}>\frac{2x_2}{1+x_2^2}.$$

Panagrinėkime skirtumą

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2x_1}{1+x_1^2}-\frac{2x_2}{1+x_2^2}=\frac{2(x_1+x_1x_2^2-x_2-x_1^2x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}=$$

$$=\frac{2(x_2-x_1)(x_1x_2-1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}.$$

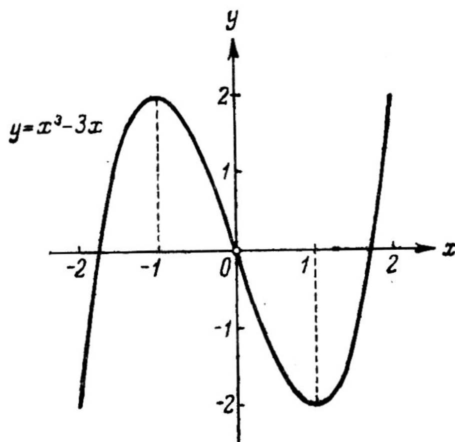
Iš čia matome, kad skirtumo $f(x_1)-f(x_2)$ ženklas, kai $x_2>x_1$, sutampa su reiškinio x_1x_2-1 ženklu.

Kai $0<x_1<x_2<1$, tai $x_1x_2<1$, $x_1x_2-1<0$ ir todėl $f(x_1)-f(x_2)<0$, t.y. $f(x_1)<f(x_2)$. Kai $1<x_1<x_2$, tai $x_1x_2>1$, $x_1x_2-1>0$ ir todėl $f(x_1)-f(x_2)>0$, t.y. $f(x_1)>f(x_2)$, o tai ir reikėjo įrodyti.

19 pavyzdys. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=x^4-x^2$ nėra monotoniškai didėjanti intervale]−2; 2[.

Įrodymas. Reikia įrodyti, kad egzistuoja taškai x_1 ir x_2, tenkinantys sąlygas $-2<x_1<x_2<2$ ir $f(x_1)\geqslant f(x_2)$.

Pastebėję, kad funkcijos $f(x)=x^4-x^2$ reikšmė taškuose $x_1=0$ ir $x_2=1$ yra lygi nuliui, gauname lygybę $f(x_1)=f(x_2)=0$, kuri ir įrodo reikiamą tvirtinimą.



60 pav.

3. Lyginės ir nelyginės funkcijos. Funkciją $y=f(x)$ vadiname *lygine*, kai ji turi šias dvi savybes: 1) šios funkcijos apibrėžimo sritis yra simetriška taško O atžvilgiu (t.y., kai taškas a priklauso apibrėžimo sričiai, tai kartu šiai sričiai priklauso ir taškas $-a$); 2) su bet kokia x reikšme iš šios funkcijos apibrėžimo srities yra teisinga lygybė $f(x)=f(-x)$.

Funkciją $y=f(x)$ vadiname *nelygine*: 1) kai šios funkcijos apibrėžimo sritis yra simetriška taško O atžvilgiu; 2) kai su bet kokia x reikšme iš šios funkcijos apibrėžimo srities yra teisinga lygybė $f(x)=-f(-x)$.

Lengva įsitikinti, kad funkcijos $y=|x|$ ir $y=x^{2n}$ yra lyginės, o funkcija $y=x^{2n+1}$ yra nelyginė, kai n – bet koks sveikasis skaičius. Taip pat nesunku įsitikinti, kad dviejų lyginių funkcijų suma, skirtumas, sandauga, dalmuo irgi yra lyginės funkcijos. Toliau dviejų nelyginių funkcijų suma ir skirtumas yra nelyginės funkcijos. Pagaliau dviejų nelyginių funkcijų sandauga ir dalmuo yra lyginės funkcijos, o lyginės ir nelyginės funkcijos sandauga ir dalmuo yra nelyginės funkcijos. Siūlome skaitytojams įrodyti visus šiuos teiginius.

Iš šių tvirtinimų išplaukia, pavyzdžiui, kad daugianaris, kurio visi rodikliai lyginiai, yra lyginė funkcija, o daugianaris, kurio visi rodikliai nelyginiai, yra nelyginė funkcija. Pavyzdžiui, funkcija $y=x^4+2x^2-1$ yra lyginė, o funkcija x^3-x^5 – nelyginė. Štai dar keli funkcijų pavyzdžiai: lyginių

$$y=\frac{1}{x^4+1},\quad y=\frac{|x|+1}{1+x^2+|x|},$$

$$y=\sqrt{x^4-|x|}\,(x^6-2x^4+3x^2+5) \text{ ir kt.},$$

nelyginių

$$y=x^5-2x^3+7x,\quad y=\frac{x^5+3x^3}{x^4+2x^2+3},$$

$$y=x^7-\frac{x^5-x}{\sqrt{|x|+x^2}} \text{ ir kt.}$$

Neverta galvoti, kad kiekviena funkcija būtinai yra arba lyginė, arba nelyginė: egzistuoja funkcijos, kurios nėra nei lyginės, nei nelyginės.

20 pavyzdys. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=2x+1$ nėra nei lyginė, nei nelyginė.

Sprendimas. Funkcijos apibrėžimo sritis yra visų skaičių ašis, t.y. lyginės ir nelyginės funkcijos apibrėžimo pirmoji sąlyga galioja. Norėdami įrodyti, kad funkcija $f(x)$ nėra lyginė, turime įrodyti, kad lyginės funkcijos apibrėžimo antroji sąlyga negalioja. Taigi reikia įrodyti, kad egzistuoja (bent viena) x reikšmė, su kuria $f(x)\neq f(-x)$. Paimkime $x=1$. Tada $f(1)=3$, $f(-1)=-1$, t.y. $f(1)\neq f(-1)$. Vadinasi, funkcija $f(x)$ nėra lyginė. Analogiškai, kadangi $f(1)\neq -f(-1)$, tai funkcija $f(x)=2x+1$ nėra nelyginė.

Pastaba. Šis pavyzdys rodo, kad teiginys „funkcija $f(x)$ yra nelyginė“ nėra teiginio „funkcija $f(x)$ yra lyginė“ neiginys. Kitaip tariant, teiginiai „funkcija $f(x)$ yra nelyginė“ ir „funkcija $f(x)$ nėra lyginė“ tvirtina ne vieną ir tą patį. Norėdami išaiškinti šių tvirtinimų loginę struktūrą, tarkime, kad duota tam tikra funkcija $f(x)$, ir išnagrinėkime šiuos teiginius:

$$A\equiv\{\text{funkcijos } f(x) \text{ apibrėžimo sritis yra simetriška taško } O \text{ atžvilgiu}\};$$

$$B(x)\equiv\{f(x)=f(-x)\},\quad C(x)\equiv\{f(x)=-f(-x)\}$$

(teiginiai su kintamaisiais $B(x)$ ir $C(x)$ nagrinėjami tik su tais x, su kuriais abu taškai x, $-x$ priklauso funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sričiai). Toliau raide P pažymėsime teiginį {funkcija $f(x)$ yra lyginė}, o raide N – teiginį

{funkcija $f(x)$ yra nelyginė}. Tuomet lyginės ir nelyginės funkcijų apibrėžimus galėsime parašyti taip:

$$P \equiv A \wedge ((\forall x) B(x)),$$
$$N \equiv A \wedge ((\forall x) C(x)).$$

Teiginį $\neg P \equiv$ {funkcija $f(x)$ nėra lyginė} pagal taisykles, aiškinamas 16 puslapyje, galėsime parašyti tokiu reiškiniu:

$$\neg P \equiv \neg \left(A \wedge ((\forall x) B(x))\right) \equiv (\neg A) \vee \neg (\forall x) B(x) \equiv (\neg A) \vee ((-\exists x) \neg B(x)).$$

Taigi teiginys „funkcija $f(x)$ nėra lyginė" reiškia, kad arba funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis yra nesimetriška, arba egzistuoja toks x, su kuriuo $f(x) \neq f(-x)$. Būtent šią teiginio $\neg P$ formą ir naudojome 20 pavyzdyje, įrodydami, kad funkcija $f(x) = 2x + 1$ nėra lyginė.

Tas faktas, kad funkcija yra lyginė arba nelyginė turi esminę įtaką šios funkcijos grafiko formai. Būtent, galioja šios dvi teoremos.

1 teorema. *Lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas y ašies atžvilgiu.*

Įrodymas. Tarkime, kad taškas $(x_0; y_0)$ priklauso lyginės funkcijos $y = f(x)$ grafikui, taigi $y_0 = f(x_0)$. Taškas, simetriškas grafiko $y = f(x)$ taškui y ašies atžvilgiu, turi koordinates $(-x_0; y_0)$. Reikia įrodyti, kad taškas $(-x_0; y_0)$ priklauso funkcijos $y = f(x)$ grafikui. Taigi reikia įrodyti, kad $y_0 = f(-x_0)$. Bet tai išplaukia iš lyginės funkcijos apibrėžimo: $f(-x_0) = f(x_0) = y_0$.

Siūlome panašiais samprotavimais skaitytojams įrodyti tokią teoremą.

2 teorema. *Nelyginės funkcijos grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios* (0; 0) *atžvilgiu.*

Pastaba. Iš šių teoremų išplaukia, kad, norint nubraižyti lyginės funkcijos grafiką, pakanka nubraižyti jo dalį, atitinkančią $x \geqslant 0$, o po to šią dalį simetriškai atvaizduoti y ašies atžvilgiu, t.y. kiekvienam grafiko taškui, kurio abscisė $x > 0$, reikia pažymėti tašką, simetrišką duotajam y ašies atžvilgiu. Kaip tik tokiu būdu galima nubraižyti funkcijos $y = f(|x|)$ grafiką, nes funkcija $f(|x|)$ yra lyginė. Norint nubraižyti nelyginės funkcijos grafiką, pakanka nubraižyti jo dalį, atitinkančią $x \geqslant 0$, o paskui šią dalį simetriškai atvaizduoti taško (0, 0) atžvilgiu, t.y. kiekvienam grafiko taškui, kurio abscisė $x > 0$, reikia pažymėti tašką, simetrišką duotajam koordinačių pradžios atžvilgiu. (Įsidėmėtina, kad kreivę, simetrišką duotajai koordinačių pradžios atžvilgiu, galima nubrėžti taip: iš pradžių duotąją kreivę K simetriškai atvaizduoti ordinačių ašies atžvilgiu, po to gautąją kreivę K' simetriškai atvaizduoti abscisių ašies atžvilgiu (61 pav.).

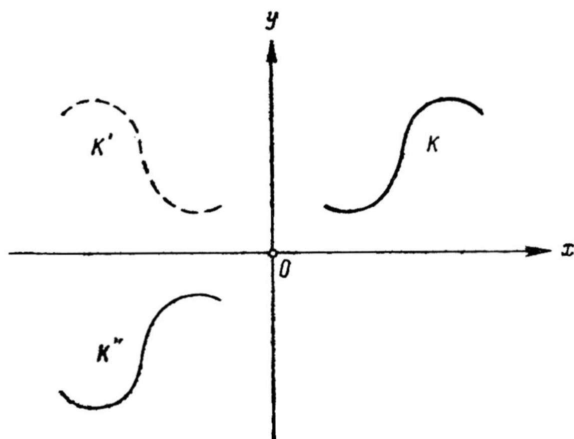
21 pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $y = x^2 - 2|x|$ grafiką.

Sprendimas. Pastebėję, kad ši funkcija yra lyginė, pirmiausia nubrėžiame jos grafiko dalį, atitinkančią $x \geqslant 0$. Su šiomis x reikšmėmis $y = x^2 - 2|x| = x^2 - 2x$. Todėl ieškomoji grafiko dalis — tai parabolės, pavaizduotos 46 pav., dalis, atitinkanti $x \geqslant 0$. Dabar nubrėžtąją grafiko dalį simetriškai atvaizduojame y ašies atžvilgiu (62 pav.).

22 pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $y=\frac{1}{x}$ grafiką.

Sprendimas. Funkcijai $y=\frac{1}{x}$ būdingos šios savybės:

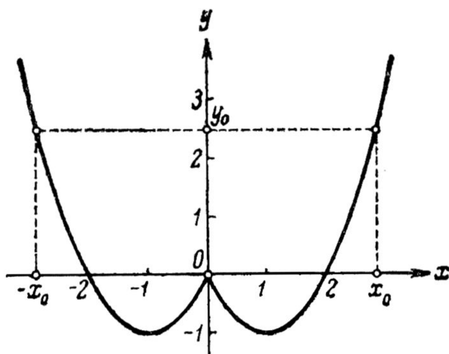
1. Reiškinys $\frac{1}{x}$ turi prasmę su bet kokiu $x \neq 0$, t.y. funkcijos $y=\frac{1}{x}$ apibrėžimo sritis yra visų realiųjų skaičių aibė be taško $x=0$ arba, kitaip tariant, dviejų begalinių intervalų $]-\infty; 0[$ ir $]0; \infty[$ sąjunga.



61 pav.

2. Funkcija $y=\frac{1}{x}$ yra nelyginė. Todėl visas kitas savybes nagrinėsime tik, kai $x>0$.

3. Su bet kokiomis $x>0$ reikšmėmis funkcija $y=\frac{1}{x}$ įgyja tik teigiamas reikšmes, t.y. funkcijos $y=\frac{1}{x}$ grafiko dalis, kai $x>0$, yra aukščiau x ašies.



62 pav.

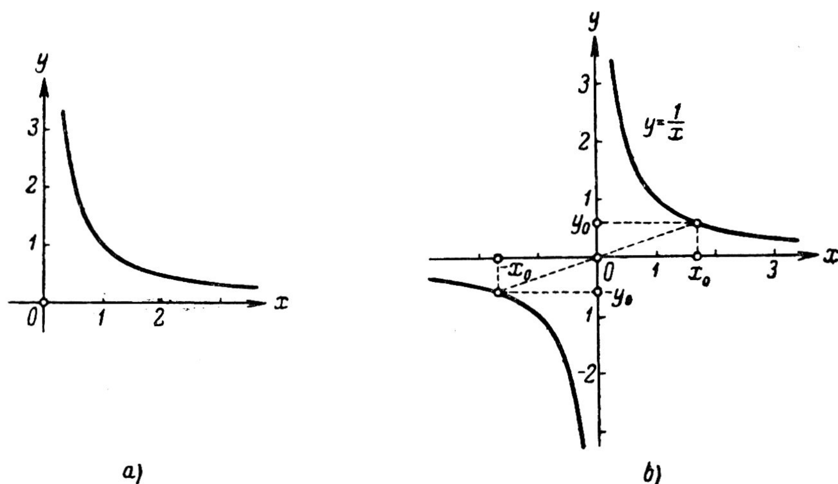
4. Kai $0<x_1<x_2$, tai $\frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}$. Taigi funkcija $y=\frac{1}{x}$ monotoniškai mažėja intervale $]0;+\infty[$.

5. Funkcijos $y=\frac{1}{x}$ reikšmės, kai argumento x reikšmės neaprėžtai didėja, vis labiau artėja prie nulio. Kai x reikšmės artėja prie nulio, tai funkcijos $y=\frac{1}{x}$ reikšmės neaprėžtai didėja.

6. Apskaičiavę funkcijos $y=\frac{1}{x}$ reikšmes, sudarome lentelę:

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Remdamiesi šiomis savybėmis, braižome funkcijos $y=\frac{1}{x}$ grafiko dalį, kai $x>0$ (63 pav., *a*), o paskui nubrėžtąją grafiko dalį simetriškai atvaizduojame koordinačių pradžios atžvilgiu (63 pav., *b*).



63 pav.

Įsidėmėkite, kad 1–6 savybių negalima nustatyti, nagrinėjant grafiką (63 pav., *a*), nes pats grafiko braižymas jau pagrįstas jomis. Tačiau iš grafiko galima nustatyti kai kurias funkcijos $y=\frac{1}{x}$ savybes, kai $x<0$. Pavyzdžiui, išnagrinėjus grafiką (63 pav., *b*), paaiškėja, kad funkcija $y=\frac{1}{x}$ monotoniškai mažėja intervale $]-\infty;0[$; toliau paaiškėja, kad funkcija

$y=\frac{1}{x}$, kai $x<0$, įgyja neigiamas reikšmes. Naudojantis grafiku, nesunku suformuluoti 5 savybę tam atvejui, kai $x<0$.

4. Periodiškumas. Funkcija $y=f(x)$ vadinamas *periodine*, kai egzistuoja toks skaičius $T>0$, kad su kiekviena x reikšme iš šios funkcijos apibrėžimo srities reikšmės $x+T$ ir $x-T$ irgi priklauso apibrėžimo sričiai ir galioja lygybė $f(x+T)=f(x)$. Skaičius T vadinamas funkcijos $y=f(x)$ *periodu.*

Iš šio apibrėžimo išplaukia, kad

$$f(x+2T)=f((x+T)+T)=f(x+T)=f(x),$$
$$f(x+3T)=f((x+2T)+T)=f(x+2T)=f(x),$$
$$f(x)=f((x-T)+T)=f(x-T)$$

ir t.t. Iš čia, pritaikę matematinės indukcijos metodą, gauname, kad su kiekvienu $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ yra teisinga lygybė $f(x+nT)=f(x)$. Taigi kiekvienas skaičius $nT\,(n=1, 2, 3, \ldots)$ irgi yra funkcijos $f(x)$ periodas.

Manome, kad skaitytojai gerai moka periodines funkcijas $\sin x$, $\cos x$ ir $\operatorname{tg} x$.

23 pavyzdys. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$ yra periodinė, o jos periodas lygus 2π.

Sprendimas. Nagrinėjamos funkcijos apibrėžimo sritis gaunama, pašalinus iš skaičių ašies tuos taškus, kuriuose vardiklis lygus nuliui, t.y. taškus $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (k – sveikasis skaičius). Iš to išplaukia, kad taškai $x+2\pi$ ir $x-2\pi$, kai x priklauso funkcijos $y=f(x)$ apibrėžimo sričiai, irgi priklauso jai. Lieka įsitikinti, kad lygybė $f(x+2\pi)=f(x)$ yra teisinga. Turime

$$f(x+2\pi)=\frac{\cos(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)}=\frac{\cos x}{1+\sin x}=f(x).$$

24 pavyzdys. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=|\sin x|$ yra periodinė, o jos periodas lygus π.

Sprendimas. Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis – visa skaičių ašis. Todėl, koks bebūtų x, taškai $x+\pi$ ir $x-\pi$ priklauso apibrėžimo sričiai. Patikrinsime, ar teisinga lygybė $f(x+\pi)=f(x)$:

$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=|\sin x|=f(x).$$

25 pavyzdys. Raskite mažiausiąjį funkcijos $f(x)=3\sin x+\sin 2x$ periodą.

Sprendimas. Sakykime, kad T – duotosios funkcijos periodas, t.y. su visomis x reikšmėmis yra teisinga lygybė

$$3\sin(x+T)+\sin 2(x+T)=3\sin x+\sin 2x.$$

Iš šios lygybės, kai $x=0$, gauname

$$3\sin T+\sin 2T=0,$$

arba

$$\sin T(3+2\cos T)=0.$$

Kadangi $3+2\cos T\neq 0$, tai $\sin T=0$. Taigi duotosios funkcijos periodas gali būti tik toks skaičius T, su kuriuo $\sin T=0$. Todėl periodo reikia ieškoti tarp skaičių $T=k\pi$ $(k=1, 2, 3, \ldots)$.

Tiesiogiai patikrinę, įsitikiname, kad skaičius π nėra duotosios funkcijos periodas. Pavyzdžiui, kai $x=\frac{\pi}{2}$, turime

$$f(x+\pi)=f\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=3\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)+\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)=-3,$$

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\sin\frac{\pi}{2}+\sin 2\cdot\frac{\pi}{2}=3,$$

t. y. $f(x+\pi)\neq f(x)$. Skaičius 2π yra duotosios funkcijos periodas, nes, koks bebūtų x, visada

$$3\sin(x+2\pi)+\sin 2(x+2\pi)=3\sin x+\sin 2x.$$

Vadinasi, $T=2\pi$ – mažiausias funkcijos $f(x)=3\sin x+\sin 2x$ periodas.

Stojantieji į aukštąsias mokyklas, įrodinėdami, kad tam tikra funkcija **nėra** periodinė, kartais klysta. Todėl verta išnagrinėti periodinės funkcijos apibrėžimo loginę struktūrą. Tarkime, kad duota funkcija $f(x)$. Jos apibrėžimo sritį pažymėsime A. Panagrinėkime teiginio funkcijas, kuriose x gali įgyti bet kurią reikšmę iš **aibės** A, o T – bet koks **teigiamas** skaičius:

$$B(x, T)\equiv\{\text{taškas } x+T \text{ priklauso aibei } A\},$$

$$C(x, T)\equiv\{\text{taškas } x-T \text{ priklauso aibei } A\},$$

$$D(x, T)\equiv\{f(x+T)=f(x)\}.$$

Taigi funkcija $f(x)$ esti periodinė, kai egzistuoja toks teigiamas skaičius T, kad su kiekvienu x (iš aibės A) bus teisingi teiginiai $B(x, T)$, $C(x, T)$ ir $D(x, T)$. Kitaip tariant, teiginį

$$P\equiv\{\text{funkcija } f(x) \text{ yra periodinė}\}$$

galima parašyti reiškiniu

$$P\equiv(\exists T)(\forall x)\big(B(x, T)\wedge C(x, T)\wedge D(x, T)\big).$$

Kaip galima įsitikinti, kad funkcija $f(x)$ nėra periodinė, būtent, kad yra teisingas teiginys $\neg P$? Neiginį $\neg P$ pagal taisykles, suformuluotas 16 puslapyje, galima parašyti taip:

$$\neg P\equiv\neg(\exists T)(\forall x)\big(B(x, T)\wedge C(x, T)\wedge D(x, T)\big)\equiv$$

$$\equiv(\forall T)\neg(\forall x)\big(B(x, T)\wedge C(x, T)\wedge D(x, T)\big)\equiv$$

$$\equiv(\forall T)(\exists x)\neg\big(B(x, T)\wedge C(x, T)\wedge D(x, T)\big)\equiv$$

$$\equiv(\forall T)(\exists x)\Big(\big(\neg B(x, T)\big)\vee\big(\neg C(x, T)\big)\vee\big(\neg D(x, T)\big)\Big).$$

Taigi, norėdami įrodyti, kad funkcija $f(x)$ nėra periodinė, turime įsitikinti, jog **kiekvieną** $T>0$ **atitinka** toks x (iš funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities), kuris neturi **bent vienos** iš savybių $B(x, T)$, $C(x, T)$, $D(x, T)$.

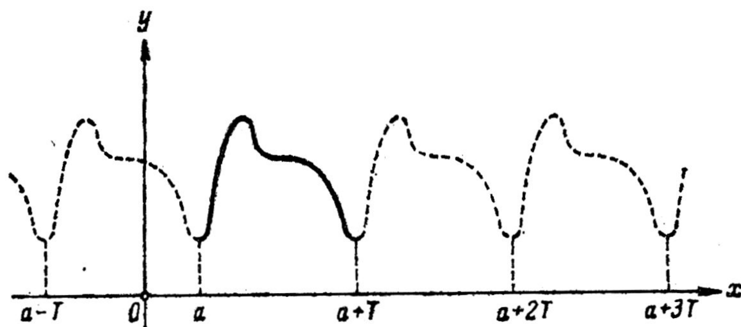
26 pavyzdys. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ nėra periodinė.

Sprendimas. Apibrėžimo sritį gauname, pašalinę iš skaičių ašies tašką $x=0$. Tarkime, kad T – bet koks teigiamas skaičius. Kadangi $-T\neq 0$, tai taškas $x_0=-T$ priklauso funkcijos apibrėžimo sričiai. Bet štai taškas $x_0+T=(-T)+T=0$ nepriklauso apibrėžimo sričiai. Taigi, koks bebūtų $T>0$, egzistuoja toks taškas $x=x_0$ (iš funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities), kad taškas $x+T$ nepriklauso apibrėžimo sričiai. Todėl funkcija $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ nėra periodinė.

27 pavyzdys. Įrodykite, kad funkcija $f(x)=x^3$ nėra periodinė.

Sprendimas. Apibrėžimo sritis yra visa skaičių tiesė. Todėl, koks bebūtų T, taškai $x+T$ ir $x-T$ priklauso apibrėžimo sričiai. Vadinasi, norėdami įsitikinti, kad funkcija yra neperiodinė, turime išnaudoti paskutinę galimybę: įrodyti, jog kiekvieną $T>0$ atitinka (bent viena) x reikšmė, su kuria $f(x+T)\neq f(T)$. Lengva pastebėti, kad tokia x reikšmė yra, pavyzdžiui, $x=0$. Tada $f(x)=f(0)=0$, $f(x+T)=f(T)=T^3>0$, t.y. $f(x+T)\neq$ $\neq f(x)$.

Dabar nagrinėsime periodinės funkcijos grafiko braižymą. Tarkime, kad funkcija $y=f(x)$ yra periodinė su periodu T. Kai taškas $(x_0; y_0)$ priklauso šios funkcijos grafikui, t.y. $y_0=f(x_0)$, tai taškai $(x_0+nT;\ y_0)$ $(n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$ irgi priklauso šiam grafikui, nes $f(x_0+nT)=f(x_0)=y_0$. Taigi, norint nubraižyti periodinės funkcijos grafiką, pakanka nubrėžti jo dalį, atitinkančią kurią nors atkarpą $a\leqslant x\leqslant a+T$, ir tada, pastūmę pastarąją grafiko dalį išilgai x ašies per $\pm T, \pm 2T, \ldots$ gausime visą grafiką (64 pav.).



64 pav.

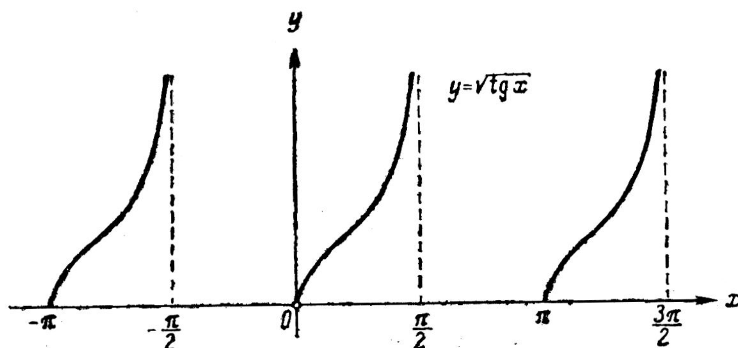
28 pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$ grafiką.

Sprendimas. Ši funkcija yra apibrėžta pusiau atviruose intervaluose $k\pi\leqslant x<\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Todėl, kai x priklauso apibrėžimo sričiai, tai taškai $x+\pi$ ir $x-\pi$ irgi priklauso apibrėžimo sričiai. Toliau, kokia bebūtų x reikšmė iš šios funkcijos apibrėžimo srities, visada $\sqrt{\operatorname{tg}(x+\pi)}=\sqrt{\operatorname{tg} x}$. Taigi funkcija $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$ yra periodinė, o jos periodas lygus π. Todėl kitas funkcijos savybes nagrinėsime tik tada, kai $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$.

Aišku, kad funkcija $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$ taške $x=0$ įgyja reikšmę 0 ir yra monotoniškai didėjanti pusiau atvirame intervale $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$. Kai x reikšmės, būdamos mažesnės už $\frac{\pi}{2}$, artėja prie $\frac{\pi}{2}$, tai funkcijos $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$ reikšmė neaprėžtai didėja. Kad būtų tiksliau, naudodamiesi lentele

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
y	0	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	1	$\sqrt[4]{3}$

lengvai galėsime nubrėžti funkcijos $y=\sqrt{\operatorname{tg} x}$ grafiko dalį, kai $0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}$ (65 pav.). Paskui, pastūmę ją išilgai x ašies per $k\pi$ ($k=\pm 1, \pm 2, \ldots$), gausime visą nagrinėjamos funkcijos grafiką.



65 pav.

Taigi, braižant funkcijos grafiką, patartina, kai tai įmanoma, išnagrinėti šias jos savybes:

1) apibrėžimo sritį;
2) reikšmių aibę (kartu ir aprėžtumą);
3) ar ji lyginė, ar nelyginė;
4) periodiškumą;
5) monotoniškumą;
6) funkcijos elgseną, kai argumento reikšmės artėja prie kraštinių funkcijos apibrėžimo srities taškų;
7) intervalus, kuriuose funkcija yra teigiama arba neigiama.

Kad būtų galima tiksliau jį nubraižyti, reikia apskaičiuoti funkcijos reikšmes keliuose taškuose (pageidautina surasti taškus, kuriuose grafikas kerta koordinačių ašis).

Suprantama, kad pasiūlytas grafiko braižymo receptas, sprendžiant konkrečius uždavinius, ne visada yra pats tinkamiausias. Kituose paragrafuose išnagrinėsime grafikus, kurie sudaromi, transformavus žinomus grafikus, ir parodysime, kaip tuo pačiu galima nustatyti kai kurias funkcijos savybes iš jos grafiko.

§ 4. Funkcijų kompozicija

Išnagrinėsime funkciją $y=f(x)$, apibrėžtą aibėje A. Aišku, kad nebūtina šios funkcijos argumentą žymėti raide x, o pačią funkciją – raide y. Pavyzdžiui, parašę $s=f(t)$, turėsime tą pačią funkciją f (su ta pačia apibrėžimo sritimi A), tik jos argumentas bus pažymėtas raide t, o pati funkcija – raide s. Dažnai po funkcijos ženklu vietoj argumento įrašoma ne tik kita raidė, bet ir koks nors sudėtingesnis reiškinys. Pavyzdžiui, kai duota funkcija $y=f(x)$, užrašas $f\left(\frac{t}{t^2+1}\right)$ reiškia, kad reikia atlikti veiksmus, kurie numatomi atitikties taisyklėje f, bet jau ne su argumentu x, o su reiškiniu $\frac{t}{t^2+1}$.

29 pavyzdys. Tarkime, kad $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$. Raskite $f\left(\frac{t}{t^2+1}\right)$.

Sprendimas. Abiejose lygybės $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$ pusėse vietoj x reikia įrašyti reiškinį $\frac{t}{t^2+1}$. Gauname

$$f\left(\frac{t}{t^2+1}\right)=\frac{\left(\frac{t}{t^2+1}\right)^2}{\left(\frac{t}{t^2+1}\right)+1}=\frac{\frac{t^2}{(t^2+1)^2}}{\frac{t+t^2+1}{t^2+1}}.$$

Kadangi $t^2+1\neq 0$, tai šios trupmenos skaitiklį ir vardiklį galima padauginti iš $(t^2+1)^2$. Gauname

$$f\left(\frac{t}{t^2+1}\right)=\frac{t^2}{(t^2+t+1)(t^2+1)}.$$

Šiame pavyzdyje po funkcijos ženklu f vietoj argumento x įrašėme naujo argumento t funkciją, būtent, $x=\frac{t}{t^2+1}$. Tokį keitimą apskritai galima apibūdinti taip. Tarkime, kad f ir g – dvi funkcijos. Funkcijoje $y=f(x)$ įrašę vietoj argumento x funkciją $x=g(t)$, gauname naują funkciją $y=f(g(t))$, kurios argumentas yra t. Funkcija $y=f(g(t))$ vadinama funkcijų f ir g *kompozicija* (kartais ir *superpozicija*).

30 pavyzdys. Pastovaus aukščio H kūgio tūris yra jo pagrindo ploto x funkcija: $y=f(x)=\frac{1}{3}Hx$. Savo ruožtu kūgio pagrindo plotas yra pagrindo spindulio t funkcija: $x=g(t)=\pi t^2$. Vadinasi, šių funkcijų kompozicija apibrėžia kūgio tūrio priklausomybę nuo jo pagrindo spindulio:

$$y=f(g(t))=\frac{1}{3}\pi Ht^2.$$

Labai svarbus klausimas, kokia funkcijos $y=f(g(t))$, kuri yra dviejų duotųjų funkcijų f ir g kompozicija, apibrėžimo sritis. Aišku, kai t nepriklauso funkcijos g apibrėžimo sričiai, funkcija $f(g(t))$ yra neapibrėžta: juk, apskaičiuodami šio reiškinio reikšmę, pirmiausia turime rasti $g(t)$. Tačiau, kai t priklauso funkcijos $g(t)$ apibrėžimo sričiai, reiškinys $f(g(t))$ visgi gali neturėti prasmės: taip esti tada, kai reikšmė $x=g(t)$ nepriklauso funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sričiai. Taigi funkcijos $y=f(g(t))$ apibrėžimo sritis priklauso funkcijos $g(t)$ apibrėžimo sričiai, nebūtinai sutapdama su ja.

31 pavyzdys. Tarkime, kad $y=f(x)=\frac{x+1}{x-2}$, $x=g(t)=t^2+1$. Raskite funkcijos $y=f(g(t))$ išraišką ir apibrėžimo sritį.

Sprendimas. Funkcija $g(t)$ yra apibrėžta visų realiųjų skaičių aibėje R. Turime

$$y=f(g(t))=\frac{g(t)+1}{g(t)-2}=\frac{(t^2+1)+1}{(t^2+1)-2}=\frac{t^2+2}{t^2-1}=\frac{t^2+2}{(t-1)(t+1)}.$$

Iš šio reiškinio matome, kad funkcijos $y=f(g(t))$ apibrėžimo sritis yra aibė R be dviejų taškų $t=-1$ ir $t=1$. Taigi funkcijos $f(g(t))$ apibrėžimo sritis nesutampa su funkcijos $g(t)$ apibrėžimo sritimi.

Spręsdami uždavinius, dažnai sakome: „funkcijoje $f(x)$ argumentą x pakeisime $g(x)$“ arba „funkcijoje $f(x)$ vietoj x įrašysime $g(x)$“. Taip sakydami, turime galvoje, kad nagrinėjame funkciją $y=f(g(x))$. Kitaip tariant, nagrinėjame funkcijų $y=f(x)$ ir $x=g(t)$ kompoziciją, t.y. funkciją $y=f(g(t))$, kurios argumentas pažymėtas ne raide t, o vėl raide x; taip gauname naują funkciją $y=f(g(x))$. Kad būtų trumpiau, posakį „nagrinėjame funkciją $y=f(g(t))$ ir jos argumentą žymime ne raide t, o raide x“ keičiame minėtomis trumpesnėmis frazėmis. Suprantama, nagrinėjant kompoziciją $y=f(g(x))$, visada reikia atidžiai sekti, kokia šios funkcijos apibrėžimo sritis.

32 pavyzdys. Funkcijos $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$ argumentą x pakeiskite reiškiniu $\frac{x}{x-1}$.

Sprendimas. Reikia išnagrinėti funkciją $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Turime

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{\frac{x}{x-1}+2}{\frac{x}{x-1}-1}=\frac{\frac{3x-2}{x-1}}{\frac{1}{x-1}}.$$

Šios funkcijos apibrėžimo sritis gaunama, iš visų realiųjų skaičių aibės R pašalinus tašką $x=1$. Taigi ši apibrėžimo sritis yra dviejų begalinių intervalų $]-\infty, 1[$ ir $]1, \infty[$ sąjunga. Kai x priklauso šiai apibrėžimo sričiai, t.y. $x\neq 1$, tai $x-1\neq 0$. Todėl trupmenos skaitiklį ir vardiklį galima padauginti iš $x-1$:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{3x-2}{1}=3x-2.$$

Taigi funkcija $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$ yra neapibrėžta taške $x=1$; visuose kituose taškuose ji sutampa su funkcija $y=3x-2$. Trumpiau tai galima išreikšti formule:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{(3x-2)(x-1)}{x-1}.$$

33 pavyzdys. Raskite funkcijos $f(x)$ išraišką, kai

$$f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=x^2+2x\ (x\neq 1).$$

Sprendimas. Pažymėkime $\frac{2x+1}{x-1}=t\ (x\neq 1)$. Tuomet $2x+1=t\ (x-1)$ ir todėl $x=\frac{t+1}{t-2}$. Vadinasi, tarę, kad $x=\frac{t+1}{t-2}$, kai $t\neq 2$, ir atlikę visus apskaičiavimus atvirkščia tvarka, gausime $t=\frac{2x+1}{x-1}$. Pakeitę duotojoje lygybėje $f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)=x^2+2x$ argumentą x reiškiniu $\frac{t+1}{t-2}$ (tai įmanoma su bet kokiu $t\neq 2$), gausime

$$f(t)=\left(\frac{t+1}{t-2}\right)^2+2\left(\frac{t+1}{t-2}\right)=\frac{3t^2-3}{(t-2)^2}\ (t\neq 2).$$

Dabar, t pakeitę x, turime

$$f(x)=\frac{3x^2-3}{(x-2)^2}\ (\text{kai } x\neq 2). \tag{8}$$

Pastaba. Skliaustuose įrašytoji nuoroda „kai $x\neq 2$“ yra esminė (8) formulei. Iš tiesų funkcija, kuri yra dešinėje (8) lygybės pusėje, taške $x=2$ yra neapibrėžta, t.y. jos apibrėžimo sritis – visų realiųjų skaičių aibė R be taško $x=2$. Kaip taške $x=2$ elgiasi funkcija $f(x)$, nieko nežinome. Nustatėme tik, kad funkcija $f(x)$, kai $x\neq 2$, sutampa su dešiniąja (8) lygybės puse. Kai duota tokia uždavinio sąlyga, sužinoti, ar funkcija $f(x)$ taške $x=2$ yra apibrėžta (ir jeigu apibrėžta, tai kokia jos reikšmė šiame taške), iš principo negalima. Todėl rašyti

$$f(x)=\frac{3x^2-2}{(x-2)^2},$$

nenurodant „kai $x\neq 2$“, neturime jokio pagrindo.

33 pavyzdį galima išspręsti kitaip (nors šį antrąjį sprendimo būdą sugalvoti nelengva). Spręsdami anksčiau, x keitėme trupmena $\frac{t+1}{t-2}$, o paskui, baigdami spręsti, t keitėme x. Vadinasi, buvo galima x iš karto keisti trupmena $\frac{x+1}{x-2}$. Tada sprendimas atrodytų taip:

Duotojoje lygybėje x pakeičiame trupmena $\frac{x+1}{x-2}$. Gauname

$$f\left(\frac{2\,\frac{x+1}{x-2}+1}{\frac{x+1}{x-2}-1}\right)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2+2\,\frac{x+1}{x-2}.$$

Kai $x \neq 2$, trupmenos, įrašytos po funkcijos f ženklu, skaitiklį ir vardiklį galima padauginti iš $x-2$:

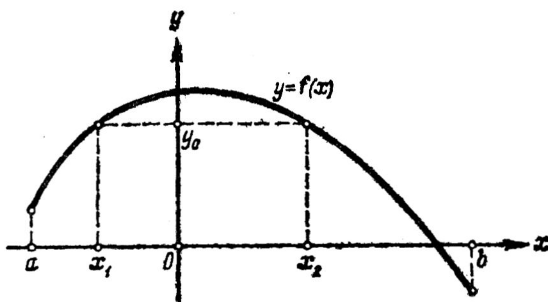
$$f\left(\frac{2(x+1)+x-2}{x+1-(x-2)}\right)=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2+2\,\frac{x+1}{x-2} \quad (\text{kai } x \neq 2).$$

Iš šios lygybės tiesiogiai gauname (8) lygybę.

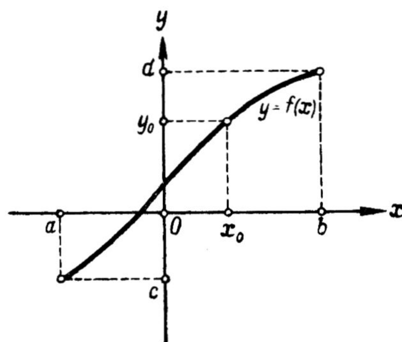
§ 5. Atvirkštinė funkcija

Tarkime, kad $f(x)$ – funkcija, apibrėžta atkarpoje $[a; b]$. Kai ši funkcija nemonotoninė, tai gali pasitaikyti, kad dvi skirtingas argumento reikšmes atitinka viena funkcijos reikšmė. 66 pav. grafiškai iliustruoja tokį atvejį: $f(x_1)=f(x_2)=y_0$. Suprantama, kad, žinant argumento reikšmę, visada galima vienareikšmiškai apskaičiuoti atitinkamą bet kurios funkcijos reikšmę (aišku, ir tos, kurios grafikas pavaizduotas 66 pav.). Tačiau šiuo atveju atvirkščias uždavinys (argumento reikšmės apskaičiavimas, kai žinoma funkcijos reikšmė) išsprendžiamas nevienareikšmiškai. Pavyzdžiui, reikšmę y_0 funkcija įgyja dviejuose taškuose x_1 ir x_2.

Norėdami vienareikšmiškai spręsti atvirkščią uždavinį (rasti argumento reikšmę, kai duota funkcijos reikšmė), apsiribojame tik monotoninėmis

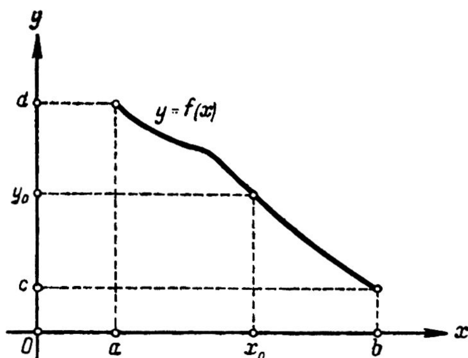


66 pav.



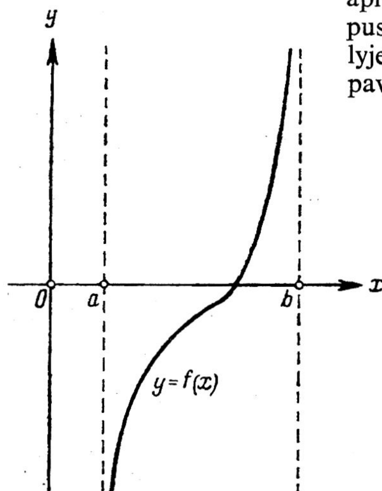
67 pav.

funkcijomis. Sakysime, pavyzdžiui, atkarpoje $[a; b]$ yra apibrėžta monotoniškai didėjanti funkcija $f(x)$, be to, kai x įgyja visas reikšmes iš atkarpos $a \leqslant x \leqslant b$, atitinkamos funkcijos $f(x)$ reikšmės užpildo atkarpą $c \leqslant y \leqslant d$ (67 pav.). Tokiu atveju kiekvieną funkcijos reikšmę iš atkarpos $c \leqslant y \leqslant d$

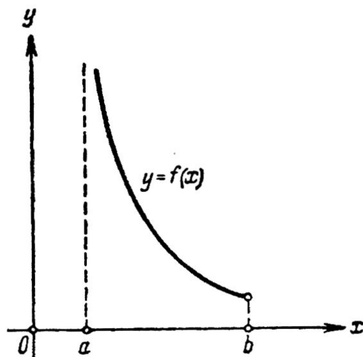


68 pav.

atitinka tik viena argumento reikšmė, t.y. vienareikšmiškai sprendžiamas atvirkščias uždavinys (atitinkama argumento reikšmė randama, kai duota funkcijos reikšmė). Taip pat bus ir tada, kai nagrinėjamoji funkcija yra monotoniškai mažėjanti (68 pav.) arba tada, kai monotoninė funkcija yra apibrėžta ne atkarpoje, o intervale (69 pav.), pusiau atvirame intervale (70 pav.), spindulyje (71 pav.) arba visoje skaičių tiesėje (72 pav.).



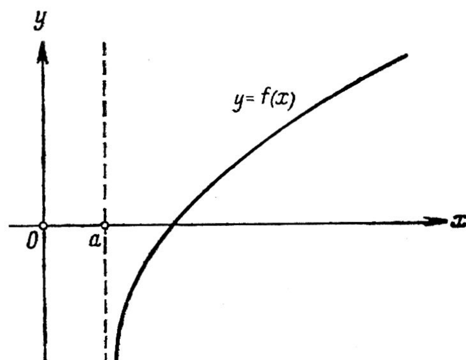
69 pav.



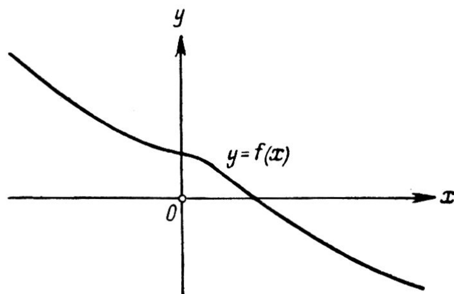
70 pav.

Išnagrinėjus atvirkščią uždavinį (argumento reikšmę radus, kai duota funkcijos reikšmė), galima pagal duotąją funkciją $y=f(x)$ sukonstruoti tam tikrą naują funkciją, vadinamą *atvirkštine* funkcija duotajai. Apibrėžtumo dėlei, kaip ir anksčiau, tarsime, kad duotoji funkcija $y=f(x)$ didėja,

yra apibrėžta atkarpoje $[a; b]$, o jos reikšmės yra visi atkarpos $[c; d]$ taškai (žr. 67 pav.). Pagal apibrėžimą atvirkštinė funkcija kiekvienam atkarpos $c \leqslant y \leqslant d$ taškui y_0 priskiria atkarpos $a \leqslant x \leqslant b$ tą tašką x_0, kuriame funkcija



71 pav.



72 pav.

$f(x)$ įgyja reikšmę y_0. Jeigu atvirkštinę funkciją sutarsime žymėti raide g, jos apibrėžimą galėsime suformuluoti taip: lygybė $x_0 = g(y_0)$ reiškia, kad taške x_0 duotoji funkcija įgyja reikšmę y_0, t.y. $y_0 = f(x_0)$:

$$\{x_0 = g(y_0)\} \Leftrightarrow \{y_0 = f(x_0)\}. \tag{9}$$

Galima pasakyti ir kitaip: simboliu $g(y_0)$ yra pažymėtas tas atkarpos $a \leqslant x \leqslant b$ taškas x_0, kuriame funkcijos $f(x)$ reikšmė lygi y_0, t.y.

$$g(y_0) \text{ yra lygties } f(x) = y_0 \text{ šaknis.} \tag{10}$$

Tokia lygtis, kaip jau žinome, monotoninės funkcijos atveju turi vienintelę šaknį.

Iš viso to, ką aptarėme, išplaukia pagrindinės atvirkštinių funkcijų savybės ir jų suradimo būdas.

Pirmiausia atkreipsime dėmesį į tai, kad (10) tvirtinimą galima parašyti taip: *norint rasti* $g(y_0)$, *reikia* x *atžvilgiu išspręsti lygtį* $f(x) = y_0$. Pakeisime raides: vietoj x įrašysime y, o paskui vietoj y_0 įrašysime x (juk

argumentą ir funkciją galima žymėti bet kokiomis raidėmis). Taigi, *norint rasti* $g(x)$, *reikia* y *atžvilgiu išspręsti lygtį* $f(y)=x$. Vadinasi, atvirkštinę funkciją galima taip sukonstruoti:

A. *Norint rasti funkciją, atvirkštinę monotoninei funkcijai* $y=f(x)$, *reikia sukeisti vietomis raides* x *ir* y, *t.y. parašyti* $x=f(y)$, *o paskui iš gautosios lygybės, kaip iš lygties, rasti* y. *Tai ir bus atvirkštinė funkcija* $y=g(x)$.

Dabar išnagrinėsime pagrindines atvirkštinių funkcijų savybes.

B. *Kai* $f(x)$ *– monotoninė funkcija, o* $g(x)$ *– jai atvirkštinė, tai funkcija* $g(x)$ *irgi yra monotoninė, be to, kai* f *– didėjanti funkcija, tai ir* g *– didėjanti, o kai* f *– mažėjanti, tai ir* g *– mažėjanti funkcija.*

Tarkime, kad f – didėjanti funkcija. Tada, kai $x_0<x_0'$, skaičiai $y_0=f(x_0)$ ir $y_0'=f(x_0')$ tenkina nelygybę $y_0<y_0'$. Iš atvirkščiojo uždavinio sprendimo vienareikšmiškumo išplaukia, kad ir, atvirkščiai, kai $y_0<y_0'$, tai $x_0<x_0'$. Iš sąlygų $x_0=g(y_0)$, $x_0'=g(y_0')$ (žr. (9) sąryšį) gauname: kai $y_0<y_0'$, tai $g(y_0)<g(y_0')$. Vadinasi, atvirkštinė funkcija g irgi yra didėjanti. Analogiškai nagrinėjamas mažėjančios funkcijos atvejis.

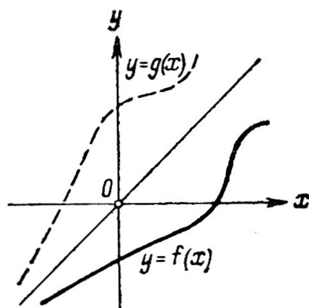
C. *Duotosios ir jai atvirkštinės funkcijos apibrėžimo sritis ir reikšmių aibė yra sukeistos vietomis.*

Pavyzdžiui, kai monotoninė funkcija $f(x)$ yra apibrėžta atkarpoje $[a; b]$, o jos reikšmės užpildo atkarpą $[c; d]$, tai atvirkštinė funkcija $g(x)$ yra apibrėžta atkarpoje $[c; d]$, o jos reikšmės užpildo atkarpą $[a; b]$.

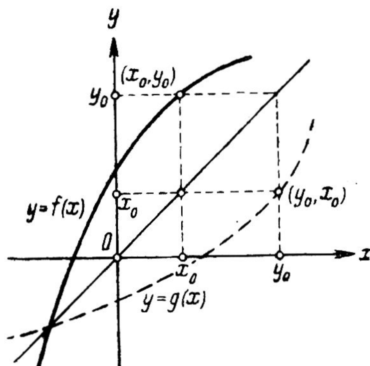
Ši savybė tiesiogiai išplaukia iš atvirkštinės funkcijos apibrėžimo.

D. *Viena kitai atvirkštinių funkcijų* $f(x)$ *ir* $g(x)$ *grafikai yra simetriški vienas kitam pirmojo ir trečiojo ketvirčių pusiaukampinės atžvilgiu* (73 pav.).

Iš tiesų tarkime, kad taškas $(x_0; y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui, t.y. $y_0=f(x_0)$. Tada $x_0=g(y_0)$ (žr. (9) sąryšį). Taigi, kai argumentas įgyja reikšmę y_0, atvirkštinė funkcija g įgyja reikšmę x_0. Bet tai reiškia, kad taškas $(y_0; x_0)$ priklauso atvirkštinės funkcijos grafikui. Dabar atkreip-



73 pav.



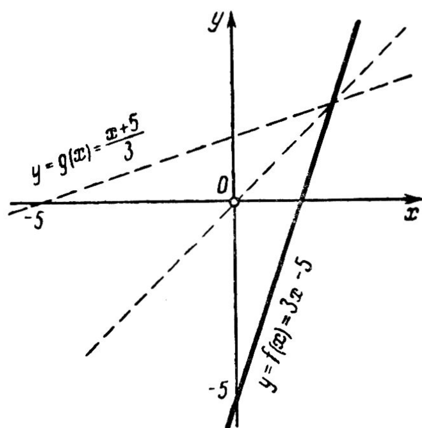
74 pav.

sime dėmesį į tai, kad taškai $(x_0; y_0)$ ir $(y_0; x_0)$ yra simetriški minėtosios pusiaukampinės atžvilgiu (74 pav.). Vadinasi, kai taškas priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui, tai jam simetriškas taškas priklauso atvirkštinės funkcijos $y=g(x)$ grafikui. Analogiškai įrodomas ir atvirkščias teiginys: kai

taškas priklauso funkcijos $y=g(x)$ grafikui, tai jam simetriškas taškas priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui.

E. *Su kiekvienu* x *iš funkcijos* $f(x)$ *apibrėžimo srities yra teisinga lygybė* $g(f(x))=x$; *lygiai taip pat su kiekvienu* x *iš atvirkštinės funkcijos* $g(x)$ *apibrėžimo srities yra teisinga lygybė* $f(g(x))=x$.

Tarkime, kad x_0 – taškas, priklausantis funkcijos $y=f(x)$ apibrėžimo sričiai, o y_0 – atitinkama funkcijos reikšmė, t.y. $y_0=f(x_0)$. Tada $x_0=g(y_0)$ (žr. (9) sąryšį). Pastarojoje lygybėje vietoj y_0 įrašę jo reikšmę $f(x_0)$, turėsime $x_0=$ $=g(y_0)=(g\,f(x_0))$. Vadinasi, bet kokiam taškui x_0 iš funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities galioja lygybė $x_0=g(f(x_0))$. Lygybė $f(g(x))=x$ įrodoma analogiškai.



75 pav.

34 pavyzdys. Raskite funkciją, atvirkštinę funkcijai $y=$ $=3x-5$.

Sprendimas. Duotoji funkcija $f(x)=3x-5$ yra didėjanti ir apibrėžta visoje skaičių tiesėje. Norint rasti atvirkštinę funkciją $y=g(x)$, lygybėje $y=3x-5$ reikia pagal A savybę sukeisti vietomis raides x ir y, t.y. parašyti $x=3y-5$ ir šią lygtį išspręsti y atžvilgiu. Išsprendę gauname $y=\frac{x+5}{3}$. Taigi atvirkštinė funkcija yra $g(x)=\frac{x+5}{3}$. Šis pavyzdys gražiai iliustruoja $B-E$ savybes. Atvirkštinė funkcija $y=\frac{x+5}{3}$, kaip ir duotoji funkcija $f(x)$, yra didėjanti (plg. su B savybe). Šiuo atveju C savybė yra triviali: abi funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra apibrėžtos visoje skaičių tiesėje ir įgyja visas realiąsias reikšmes. 75 pav. iliustruoja D savybę. Pagaliau nesunku patikrinti ir E savybę:

$$g(f(x))=\frac{f(x)+5}{3}=\frac{(3x-5)+5}{3}=x,$$

$$f(g(x))=3\cdot g(x)-5=3\cdot\frac{x+5}{3}-5=x.$$

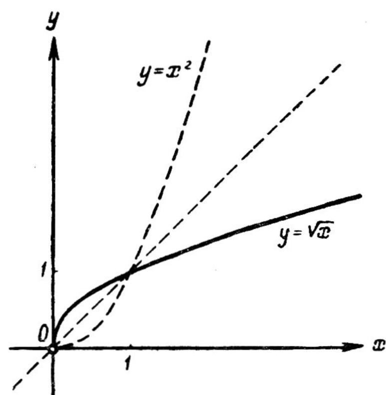
35 pavyzdys. Raskite funkciją, atvirkštinę funkcijai $y=\sqrt{x}$.

Sprendimas. Funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ (aritmetinė šaknis) apibrėžta, kai $x\geqslant 0$ ir įgyja neneigiamas reikšmes, t.y. jos apibrėžimo sritis ir reikšmių aibė yra begalinis intervalas $[0;\ \infty[$. Norint rasti atvirkštinę funkciją $y=g(x)$, lygybėje $y=\sqrt{x}$ reikia pagal A savybę x ir y sukeisti vietomis, t.y. parašyti $x=\sqrt{y}$, ir išspręsti šią lygtį y atžvilgiu. Išsprendę gauname $y=x^2$. Be to, reikia atsiminti, kad funkciją $y=x^2$ galima nagrinėti tik tada,

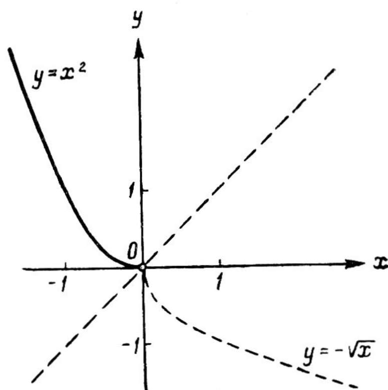
kai $x \geqslant 0$, nes duotosios funkcijos $y=f(x)$ reikšmių aibė buvo begalinis intervalas $[a;\ \infty[$. Taigi funkcija $y=x^2$, kai $x \geqslant 0$, yra atvirkštinė funkcijai $y=\sqrt{x}$ (76 pav.)

36 pavyzdys. Nagrinėsime funkciją $y=x^2$, kai $x \leqslant 0$. Kokia funkcija yra jai atvirkštinė?

Sprendimas. Duotosios funkcijos $f(x)=x^2$, kai $x \leqslant 0$, apibrėžimo sritis yra begalinis intervalas $]-\infty;\ 0]$, o reikšmių aibė – begalinis intervalas $[0;\ \infty[$. Vadinasi, pagal C savybę atvirkštinė funkcija $y=g(x)$ bus apibrėžta begaliniame intervale $[0;\ \infty[$ ir įgis reikšmes iš begalinio intervalo $]-\infty;\ 0]$. Dabar rasime šią atvirkštinę funkciją. Dėl to lygybėje $y=x^2$ reikia pagal A savybę raides x ir y sukeisti vietomis, t.y. parašyti $x=y^2$



76 pav.



77 pav.

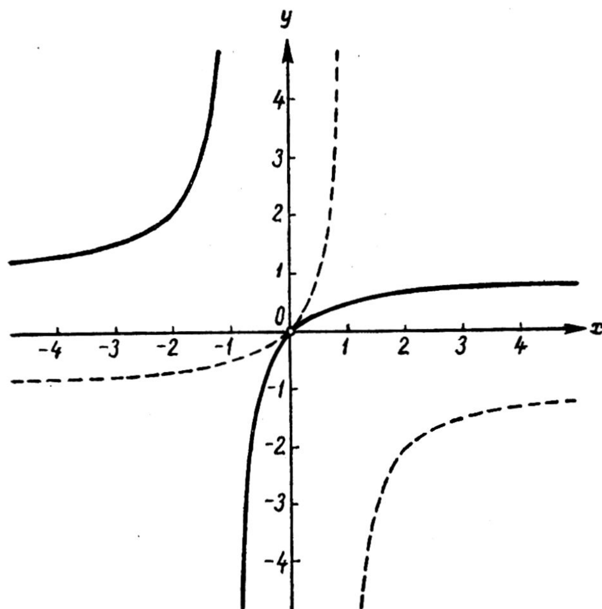
ir išspręsti šią lygtį y atžvilgiu. Išsprendę gauname dvi šaknis: $y=\pm\sqrt{x}$. Tačiau, prisiminę, kad atvirkštinė funkcija turi įgyti reikšmes iš begalinio intervalo $]-\infty;\ 0]$, paliekame tik reikšmę $y=-\sqrt{x}$. Taigi duotajai funkcijai atvirkštinė funkcija yra $g(x)=-\sqrt{x}$ (77 pav.).

Šis ir pirmesnieji pavyzdžiai yra gana pamokantys: jie rodo, kad, *nagrinėjant atvirkštines funkcijas, visada reikia atsiminti apibrėžimo srities ir reikšmių aibės vaidmenį.* Apie tai dar kalbėsime vėliau, nagrinėdami atvirkštines trigonometrines funkcijas.

Baigdami pridursime, kad duotosios funkcijos $y=f(x)$ monotoniškumas iš tiesų nėra būtina atvirkštinės funkcijos nagrinėjimo sąlyga. Atvirkštinę funkciją galima apibrėžti tada ir tik tada, kai atvirkščias uždavinys (argumento reikšmių apskaičiavimas pagal funkcijos reikšmes) yra išsprendžiamas vienareikšmiškai, t.y. kai kiekvieną funkcijos reikšmę atitinka tik viena argumento reikšmė. Monotoniškumas yra tik pakankama sąlyga: kai funkcija yra monotoninė, atvirkščias uždavinys visada išsprendžiamas vienareikšmiškai. Bet yra ir kitų funkcijų (ne monotoninių), kurioms galima vienareikšmiškai išspręsti atvirkštinį uždavinį, taigi ir rasti atvirkštinę funkciją.

37 pavyzdys. Raskite funkciją, atvirkštinę funkcijai $y=\frac{x}{x+1}$.

Sprendimas. Funkcija $f(x)=\frac{x}{x+1}$ yra apibrėžta aibėje R, iš kurios pašalintas taškas $x=-1$, t.y. jos apibrėžimo sritis yra dviejų begalinių intervalų $]-\infty; -1[$ ir $]-1; \infty[$ sąjunga. Ši funkcija nėra monotoninė. Pavyzdžiui, $f(-2)>f\left(-\frac{1}{2}\right)$ (funkcija f nėra didėjanti) ir tuo pačiu $f\left(-\frac{1}{2}\right)<f(1)$ (nes funkcija f nėra ir mažėjanti). Tačiau šiuo atveju atvirkštinis uždavinys išsprendžiamas vienareikšmiškai. Iš tikrųjų, pertvarkę lygybę $y=\frac{x}{x+1}$, gauname pirmojo laipsnio lygtį x atžvilgiu; todėl bet kokią y reikšmę atitiks tik viena x reikšmė.



78 pav.

Norint rasti atvirkštinę funkciją $y=g(x)$, lygybėje $y=\frac{x}{x+1}$ reikia pagal A savybę x ir y sukeisti vietomis, t.y. parašyti $x=\frac{y}{y+1}$, o paskui išspręsti šią lygtį y atžvilgiu. Pertvarkę turime $x(y+1)=y$, iš čia $y=\frac{x}{1-x}$. Taigi funkcijai $f(x)$ atvirkštinė funkcija yra $g(x)=\frac{x}{1-x}$. Jos apibrėžimo sritis – aibė R be taško $x=1$. 78 pav. pavaizduotas funkcijos $f(x)$ grafikas (ištisinė linija) ir atvirkštinės funkcijos $g(x)$ grafikas (punktyrinė linija).

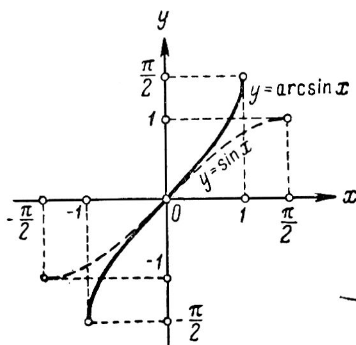
§ 6. Atvirkštinės trigonometrinės funkcijos

Nagrinėsime funkciją $y=\sin x$. Ši funkcija yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje $-\infty<x<\infty$, bet nėra monotoninė. Todėl, norėdami sukonstruoti atvirkštinę funkciją, pirmiausia turime išskirti funkcijos $y=\sin x$ monotoniškumo intervalą, pavyzdžiui, atkarpą $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, kurioje funkcija jau monotoninė. Kaip tik šioje atkarpoje ir nagrinėsime funkciją $y=\sin x$, t.y. pradine funkcija $y=f(x)$ laikysime funkciją $y=\sin x$, kai $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Jai atvirkštinė funkcija žymima $\arcsin x$. Taigi pagal A – E gauname tokias funkcijos $\arcsin x$ savybes.

Sąryšis $\alpha=\arcsin a$ reiškia, kad galioja sąryšiai $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=a$:

$$\{\alpha=\arcsin a\}\Leftrightarrow\left\{-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}\wedge\{\sin\alpha=a\}.$$

Funkcija $\arcsin x$ apibrėžta atkarpoje $-1\leqslant x\leqslant 1$ ir yra monotoniškai didėjanti, o jos reikšmės užpildo atkarpą $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$. Funkcijos $y=\arcsin x$ grafikas pavaizduotas 79 pav. Pagaliau, koks bebūtų x, priklausantis atkarpai $-1\leqslant x\leqslant 1$, yra teisinga lygybė $\sin(\arcsin x)=x$ ir, koks bebūtų x, priklausantis atkarpai $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, yra teisinga lygybė $\arcsin(\sin x)=x$.



79 pav.

Taigi išvardijome visas pagrindines funkcijos $\arcsin x$ savybes. Jos išplaukia iš bendrojo atvirkštinės funkcijos apibrėžimo (žr. A – E savybes, p. 160, 161).

38 pavyzdys. Apskaičiuokite reiškinio $\arcsin(\sin 3)$ reikšmę.

Sprendimas. Spręsdami panašius uždavinius, mokiniai ir stojantieji į aukštąsias mokyklas dažnai padaro standartinę klaidą: jie rašo $\arcsin(\sin 3)=3$. Šios klaidos priežastis – lygybės $\arcsin(\sin x)=x$ taikymas, neatsižvelgiant į tai, kad ši lygybė yra teisinga tik tada, kai $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. Kadangi skaičius 3 šiai atkarpai nepriklauso, tai, aišku, atsakymas yra klaidingas.

Norint teisingai išspręsti, reikia taikant redukcijos formules, pakeisti $\sin 3$ kito kampo x, tenkinančio sąlygą $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, sinusu. Pritaikę formulę $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$, turime

$$\sin 3=\sin(\pi-3)$$

ir todėl

$$\arcsin(\sin 3)=\arcsin(\sin(\pi-3)).$$

Kadangi skaičius $\pi-3\approx 0,14$ tenkina nelygybę $-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-3\leqslant\frac{\pi}{2}$, tai

$$\arcsin(\sin(\pi-3))=\pi-3.$$

Taigi teisingas uždavinio atsakymas yra toks:

$$\arcsin(\sin 3)=\pi-3.$$

39 pavyzdys. Apskaičiuokite reiškinio $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)$ reikšmę.

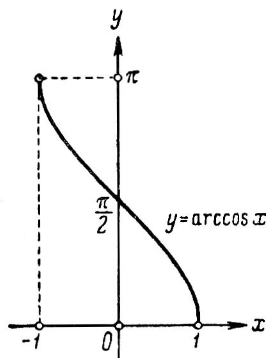
Sprendimas. Pažymėkime $\arcsin\frac{2}{3}=\alpha$. Toks užrašas reiškia, kad $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ ir $\sin\alpha=\frac{2}{3}$. Kadangi ketvirtajame ketvirtyje sinusas yra neigiamas, tai α yra pirmojo ketvirčio kampas, t.y. $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Dabar turime

$$|\cos\alpha|=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Kadangi kosinusas pirmajame ketvirtyje yra teigiamas, tai $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Apskaičiuojame $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{3}:\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Taigi galutinai turime

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{3}\right)=\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Analogiškai apibrėžiamos ir kitos atvirkštinės trigonometrinės funkcijos. Funkcija $y=\cos x$ nėra monotoninė visoje skaičių tiesėje, bet yra monotoninė, pavyzdžiui, atkarpoje $0\leqslant x\leqslant\pi$. Laikydami pradine funkcija $y=f(x)$ funkciją $\cos x$, apibrėžtą šioje atkarpoje, galėsime sukonstruoti jai atvirkštinę. Ši atvirkštinė funkcija ir žymima $\arccos x$. Iš A–E savybių (p. 160, 161) išplaukia tokios šios funkcijos savybės.



80 Pav.

Sąryšis $\alpha=\arccos a$ yra ekvivalentus šiems dviem sąryšiams:

$$0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\ \cos\alpha=a,\ \text{t.y.}$$

$$\{\alpha=\arccos a\}\Leftrightarrow\{0\leqslant\alpha\leqslant\pi\}\wedge\{\cos\alpha=a\}.$$

Funkcija $\arccos x$ apibrėžta atkarpoje $-1\leqslant x\leqslant 1$ ir yra monotoniškai mažėjanti, o jos reikšmės užpildo atkarpą $0\leqslant y\leqslant\pi$. Funkcijos $y=\arccos x$ grafikas pavaizduotas 80 pav. Pagaliau, koks bebūtų x, priklausantis atkarpai $-1\leqslant x\leqslant 1$, yra teisinga lygybė $\cos(\arccos x)=x$, ir, koks bebūtų x, priklausantis atkarpai $0\leqslant x\leqslant\pi$, yra teisinga lygybė $\arccos(\cos x)=x$.

Išvesime dar vieną formulę, siejančią funkcijas arcsin x ir arccos x. Tarkime, kad x – bet koks skaičius, tenkinantis nelygybes $-1 \leqslant x \leqslant 1$, t.y. x priklauso ir funkcijos arcsin x, ir arccos x apibrėžimo sričiai. Pažymėkime

$$\alpha = \arcsin x, \quad \beta = \arccos x.$$

Tuomet

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \ \sin \alpha = x, \ \cos \beta = x.$$

Pirmasis ir trečiasis sąryšiai reiškia, kad $0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha \leqslant \pi$ ir $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = x$. Vadinasi, $\frac{\pi}{2} - \alpha = \arccos x = \beta$, t.y. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Taigi, koks bebūtų x, tenkinantis nelygybes $-1 \leqslant x \leqslant 1$, yra teisinga formulė

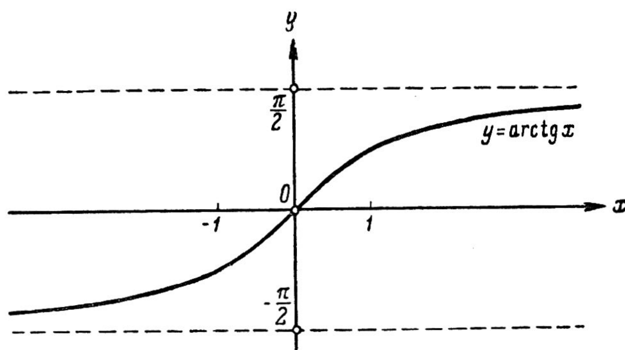
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Toliau funkcija $y = \operatorname{tg} x$ nėra monotoninė. Vienas jos monotoniškumo intervalų yra intervalas $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Laikydami pradine funkcija $y = f(x)$ funkciją tg x, apibrėžtą šiame intervale, galėsime sukonstruoti jai atvirkštinę funkciją. Ši atvirkštinė funkcija žymima arctg x.

Sąryšis $\alpha = \operatorname{arctg} a$ reiškia, kad

$$\{\alpha = \operatorname{arctg} a\} \Leftrightarrow \left\{-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right\} \wedge \{\operatorname{tg} \alpha = a\}.$$

Funkcija arctg x apibrėžta visoje skaičių tiesėje ir yra monotoniškai didėjanti, o jos reikšmės užpildo atvirą intervalą $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Funkcijos



81 pav.

$y = \operatorname{arctg} x$ grafikas pavaizduotas 81 pav. Pagaliau, koks bebūtų realusis x, visada $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ ir, koks bebūtų x, priklausantis atvirajam intervalui $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, visada $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$.

Štai tokios yra pagrindinės funkcijos arctg x savybės. Analogiškai apibrėžiama funkcija $y = \operatorname{arcctg} x$. Dar pridursime, kad funkcija arcctg x yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje, o su funkcija arcctg x yra susieta sąryšiu

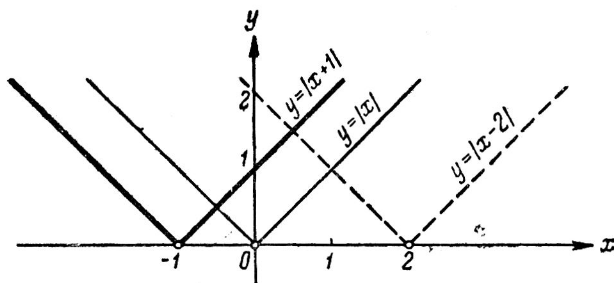
$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

§ 7. Grafiko tiesinis transformavimas

Šiame paragrafe nagrinėsime funkcijos $y = Af(ax+b)+B$ grafiko braižymą, kai duotas funkcijos $y=f(x)$ grafikas.

1^0. $y=f(x+c)$. Išnagrinėsime, kaip braižomas funkcijos $y=f(x+c)$ grafikas, kai jau nubraižytas funkcijos $y=f(x)$ grafikas.

Tarkime, kad taškas $(x_0;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui, t.y. $y_0=f(x_0)$. Tada taškas $(x_0-c;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x+c)$ grafikui, nes $f((x_0-c)+c)=f(x_0)=y_0$. Atvirkščiai, kai taškas $(x_0-c;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x+c)$ grafikui, tai taškas $(x_0;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui. Taigi funkcijos $y=f(x+c)$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko, pastūmus pastarojo kiekvieną tašką $(x_0;\ y_0)$ į tašką $(x_0-c;\ y_0)$, t.y. pastūmus visą funkcijos $y=f(x)$ grafiką išilgai x ašies per $(-c)$ vienetų. Postūmis per $(-c)$ vienetų reiškia postūmį per c vienetų į kairę, kai $c>0$, ir postūmį per $|c|$ vienetų į dešinę, kai $c<0$.



82 pav.

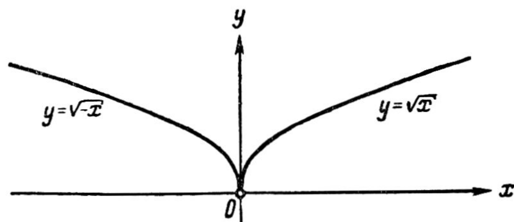
40 pavyzdys. 82 pav. pavaizduoti funkcijų $y=|x-2|$ ir $y=|x+1|$ grafikai. Jie gauti iš funkcijos $y=|x|$ grafiko (žr. 50 pav., b), pastūmus pastarąjį išilgai x ašies atitinkamai per du vienetus į dešinę ir per vienetą į kairę.

2^0. $y=f(ax)$. Išnagrinėsime funkcijos $y=f(ax)$ $(a\neq 0)$ grafiko braižymą, kai duotas funkcijos $y=f(x)$ grafikas.

Tarkime, kad taškas $(x_0;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui, t.y. $y_0=f(x_0)$. Tada taškas $\left(\frac{x_0}{a};\ y_0\right)$ priklausys funkcijos $y=f(ax)$ grafikui, nes $f\left(a\left(\frac{x_0}{a}\right)\right)=f(x_0)=y_0$. Atvirkščiai, kai taškas $\left(\frac{x_0}{a};\ y_0\right)$ priklauso funkcijos $y=f(ax)$ grafikui, tai taškas $(x_0;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui. Vadinasi, funkcijos $y=f(ax)$ grafiką galima gauti iš funkcijos

$y=f(x)$ grafiko, pakeitus kiekvieną pastarojo tašką $(x_0; y_0)$ tašku $\left(\frac{x_0}{a}; y_0\right)$. Šis keitimas reiškia: 1) grafiko suspaudimą išilgai x ašies y ašies atžvilgiu a kartų, kai $a>1$; 2) grafiko ištempimą $\Big($taip pat išilgai x ašies y ašies atžvilgiu $\frac{1}{a}$ kartų, kai $0<a<1$; 3$\Big)$simetriją y ašies atžvilgiu, kai $a=-1$; 4) simetriją y ašies atžvilgiu, kartu suspaudžiant $|a|$ kartų, kai $a<-1$; 5) simetriją y ašies atžvilgiu, kartu ištempiant $\frac{1}{|a|}$ kartų, kai $-1<a<0$.

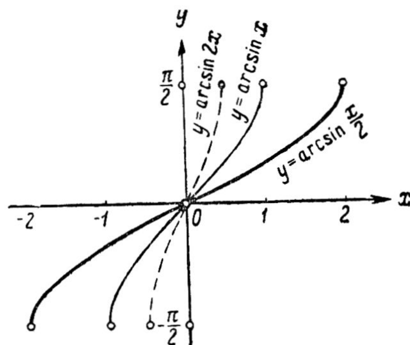
41 pavyzdys. Funkcijos $y=\sqrt{-x}$ grafikas gaunamas simetrija y ašies atžvilgiu iš funkcijos $y=\sqrt{x}$ grafiko (83 pav.).



83 pav.

Atkreipsime dėmesį, kad iš šio grafiko galima gauti keletą funkcijos $y=\sqrt{-x}$ savybių: ji yra apibrėžta, kai $x\leqslant 0$, įgyja neneigiamas reikšmes ir yra mažėjanti.

42 pavyzdys. 84 pav. pavaizduoti grafikai, kurie gauti iš funkcijos $y=\arcsin x$ grafiko (žr. 79 pav.): funkcijos $y=\arcsin 2x$ grafikas (suspaudžiant funkcijos $y=\arcsin x$ išilgai x ašies grafiką y ašies atžvilgiu 2 kartus) ir funkcijos $y=\arcsin \frac{x}{2}$ grafikas (ištempiant funkcijos $y=\arcsin x$ grafiką du kartus).



84 pav.

3⁰. $y=f(ax+b)$. Išnagrinėsime funkcijos $y=f(ax+b)$ (čia $a\neq 0$) grafiko braižymą, kai duotas funkcijos $y=f(x)$ grafikas.

Tarkime, kad taškas $(x_0; y_0)$ – funkcijos $y=f(x)$ grafiko taškas, t.y. $y_0=f(x_0)$. Tuomet funkcijos $y=f(ax+b)$ grafikui priklausys toks taškas $(x_1; y_0)$, kuriame $ax_1+b=x_0$, t. y.

$$x_1=\frac{x_0-b}{a}=\frac{x_0}{a}-\frac{b}{a}. \qquad (11)$$

Atvirkščiai, kai taškas $(x_1; y_0)$ – funkcijos $y=f(ax+b)$ grafiko taškas (čia x_1 apibrėžtas (11) lygybe), tai taškas $(x_0; y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui. (11) lygybės reiškia, kad tašką x_1 galima gauti iš taško x_0

kuriuo nors vienu šių būdų: 1) iš pradžių postūmiu per $(-b)$ vienetų, o paskui „suspaudimu“ a kartų; 2) iš pradžių „suspaudimu“ a kartų, o paskui postūmiu per $\left(-\frac{b}{a}\right)$ vienetų.

Vadinasi, funkcijos $y=f(ax+b)$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko bet kuriuo iš šių dviejų būdų:

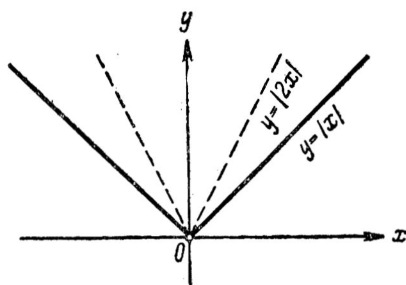
1) iš padžių, pastūmę funkcijos $y=f(x)$ grafiką išilgai x ašies per $(-b)$ vienetų, gauname funkcijos $y=f(x+b)=g(x)$ grafiką, o paskui, pasielgę taip, kaip nurodyta šio paragrafo 2^0 punkte, iš funkcijos $y=g(x)$ grafiko gauname funkcijos $y=g(ax)=f(ax+b)$ grafiką.

2) iš pradžių iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko gauname funkcijos $y=f(ax)$ grafiką (žr. 2^0 punktą), o paskui, pastūmę funkcijos $y=f(ax)$ grafiką išilgai x ašies per $\left(-\frac{b}{a}\right)$ vienetų (žr. 1^0 punktą), gauname funkcijos $y=f\left(a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right)=f(ax+b)$ grafiką.

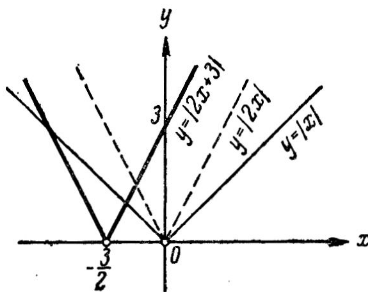
Vienodumo dėlei susitarsime ateityje naudoti tik antruoju būdu.

43. pavyzdys. Nubraižykite funkcijos $y=|2x+3|$ grafiką.

Sprendimas. Iš pradžių, suspaudę funkcijos $y=|x|$ grafiką (žr. 50 pav., b) du kartus y ašies atžvilgiu, nubraižome funkcijos $y=|2x|$



85 pav.



86 pav.

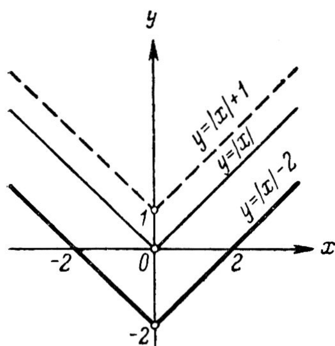
grafiką (85 pav.). Paskui, pastūmę gautąjį funkcijos $y=|2x|$ grafiką išilgai x ašies per $\frac{3}{2}$ vieneto į kairę, gauname funkcijos $y=\left|2\left(x+\frac{3}{2}\right)\right|=$ $=|2x+3|$ grafiką (86 pav.).

4^0. $y=f(x)+C$. Išnagrinėsime funkcijos $y=f(x)+C$ grafiko braižymą, kai duotas funkcijos $y=f(x)$ grafikas.

Tarkime, kad taškas $(x_0;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui, t.y. $y_0=f(x_0)$. Tada taškas $(x_0;\ y_0+C)$ priklausys funkcijos $y=f(x)+C$ grafikui, nes $f(x_0)+C=y_0+C$. Atvirkščiai, kai taškas $(x_0;\ y_0+C)$ yra funkcijos $y=f(x)+C$ grafiko taškas, tai taškas $(x_0;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui. Vadinasi, kiekvieną funkcijos $y=f(x)$ grafiko tašką $(x_0;\ y_0)$ pakeitę tašku $(x_0;\ y_0+C)$, iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko gausime funkcijos $y=f(x)+C$ grafiką. Kitaip tariant, jį gausime, pastūmę visą funkcijos $y=f(x)$ grafiką išilgai y ašies per C vienetų Postūmis per C

vienetų reiškia postūmį per C vienetų aukštyn, kai $C>0$, ir postūmį per $|C|$ vienetų žemyn, kai $C<0$.

44 pavyzdys. 87 pav. pavaizduoti grafikai, kurie gauti iš funkcijos $y=|x|$ grafiko (žr. 50, pav. b): funkcijos $y=|x|+1$ grafikas (pastūmus išilgai y ašies per vieną vienetą aukštyn) ir funkcijos $y=|x|-2$ grafikas (pastūmus per du vienetus žemyn).



87 pav.

5⁰. $y=Af(x)$. Išnagrinėsime, kaip braižomas funkcijos $y=Af(x)$ $(A\neq0)$ grafikas, kai duotas funkcijos $y=f(x)$ grafikas.

Tarkime, kad taškas $(x_0;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui, t.y. $y_0=$ $=f(x_0)$. Tada taškas $(x_0;\ Ay_0)$ priklausys funkcijos $y=Af(x)$ grafikui, nes $Af(x_0)=Ay_0$. Atvirkščiai, kai taškas $(x_0;\ Ay_0)$ yra funkcijos $y=Af(x)$ grafiko taškas, tai taškas $(x_0;\ y_0)$ priklauso funkcijos $y=f(x)$ grafikui. Vadinasi, pakeitę kiekvieną funkcijos $y=f(x)$ grafiko tašką $(x_0;\ y_0)$ tašku $(x_0,\ Ay_0)$, iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko gausime funkcijos $y=Af(x)$ grafiką. Toks pakeitimas reiškia: 1) grafiko ištempimą x ašies atžvilgiu A kartų, kai $A>1$; 2) suspaudimą $\frac{1}{A}$ kartų, kai $0<A<1$; 3) simetriją x ašies atžvilgiu, kai $A=-1$; 4) simetriją x ašies atžvilgiu su tolesniu ištempimu $|A|$ kartų, kai $A<-1$; 5) simetriją x ašies atžvilgiu su tolesniu suspaudimu $\frac{1}{|A|}$ kartų, kai $-1<A<0$.

45 pavyzdys. 88 pav. pavaizduoti grafikai, kurie gauti iš funkcijos $y=\cos x$ grafiko: funkcijos $y=3\cos x$ grafikas (ištempiant funkcijos $y=\cos x$ grafiką x ašies atžvilgiu 3 kartus) ir funkcijos $y=-\frac{1}{2}\cos x$ grafikas (simetrija x ašies atžvilgiu ir suspaudimu du kartus).

6⁰. $y=Af(x)+B$. Funkcijos $y=Af(x)+B$ $(A\neq0)$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko tokiu būdu: iš pradžių iš funkcijos $y=f(x)$, grafiko gauname funkcijos $y=Af(x)$ grafiką (žr. 5⁰ punktą), o paskui, pastūmę gautąjį funkcijos $y=Af(x)$ grafiką išilgai y ašies per B vienetų, nubraižome funkcijos $y=Af(x)+B$ grafiką (žr. 4⁰ punktą).

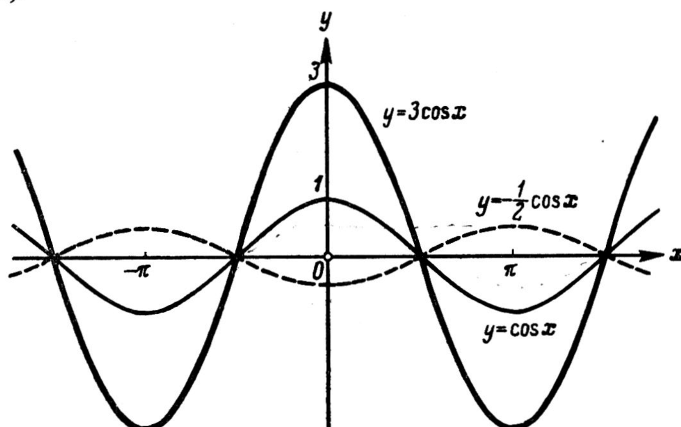
46 pavyzdys. Nubraižykite funkcijos

$$y=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin x$$

grafiką.

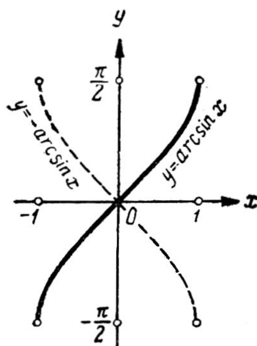
Sprendimas. Iš pradžių simetrija x ašies atžvilgiu iš funkcijos $y=\arcsin x$ grafiko (žr. 79 pav.) gauname funkcijos $y=-\arcsin x$ grafiką (89 pav.). Paskui, suspaudę funkcijos $y=-\arcsin x$ grafiką išilgai y ašies x ašies atžvilgiu du kartus, gauname funkcijos $y=-\frac{1}{2}\arcsin x$ grafiką.

Ir galiausiai, pastūmę funkcijos $y=-\frac{1}{2}\arcsin x$ grafiką išilgai y ašies per $\frac{\pi}{2}$ vienetų aukštyn, gauname funkcijos $y=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin x$ grafiką (90 pav.).

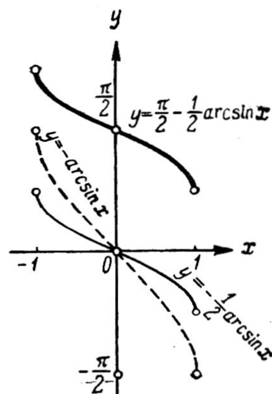


88 pav.

Apibendrinę šio paragrafo rezultatus, padarome tokią išvadą. Funkcijos $y=Af(ax+b)+B$ grafiką galima gauti iš funkcijos $y=f(x)$ grafiko tokiu būdu: turėdami funkcijos $y=f(x)$ grafiką, nubraižome funkcijos



89 pav.



90 pav.

$y=f(ax+b)$ grafiką (žr. 3° punktą), o paskui iš gauto funkcijos $y=f(ax+b)$ grafiko gauname funkcijos $y=Af(ax+b)+B$ grafiką (žr. 6° punktą). Šiame paragrafe išnagrinėtas funkcijos $y=Af(ax+b)+B$ grafiko braižymo būdas, kai duotas funkcijos $y=f(x)$ grafikas, vadinamas funkcijos $y=f(x)$ grafiko *tiesiniu transformavimu.*

§ 8. Lygčių ir nelygybių sprendimas, naudojantis funkcijomis ir grafikais

1°. Nagrinėsime, kaip, naudojantis funkcijų $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$ grafikais, sprendžiama lygtis $f_1(x)=f_2(x)$.

Kai x_0 – šios lygties sprendinys, tai pagal apibrėžimą taškas x_0 priklauso abiejų funkcijų $f_1(x)$, $f_2(x)$ apibrėžimo sritims ir tenkina sąlygą $f_1(x_0)=f_2(x_0)$. Skaičių $f_1(x_0)$ pažymėsime y_0. Tada $y_0=f_1(x_0)=f_2(x_0)$. Kadangi $y_0=f_1(x_0)$, tai taškas $(x_0; y_0)$ priklauso funkcijos $y=f_1(x)$ grafikui. Antra vertus, $y_0=f_2(x_0)$, todėl taškas $(x_0; y_0)$ priklauso ir funkcijos $y=f_2(x)$ grafikui. Taigi taškas $(x_0; y_0)$ yra funkcijų $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$ grafikų *susikirtimo taškas.*

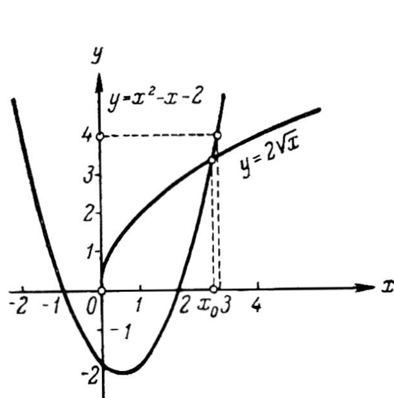
Atvirkščiai, sakykime, kad funkcijų $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$ grafikai susikerta taške $(x_0; y_0)$, t.y. $y_0=f_1(x_0)=f_2(x_0)$. Pastaroji lygybė reiškia, kad skaičius x_0 yra lygties $f_1(x)=f_2(x)$ sprendinys.

Vadinasi, *norint išspręsti lygtį $f_1(x)=f_2(x)$, reikia rasti funkcijų $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$ grafikų susikirtimo taškų abscises.* Toks lygčių sprendimo būdas vadinamas grafiniu. Spręsdami lygtį šiuo būdu, paprastai tikslaus atsakymo negauname, nes praktiškai naudojamės ne grafikais, o tik jų eskizais. Tačiau šiuo būdu galime ištirti, kiek duotoji lygtis turi sprendinių, ir įvertinti gautųjų sprendinių paklaidą.

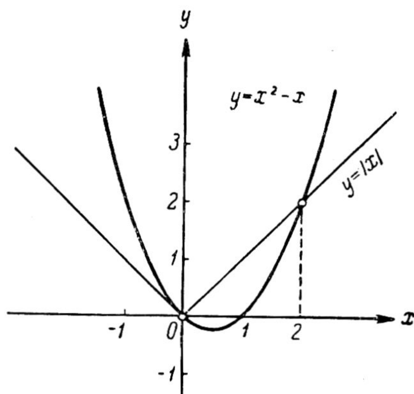
47 pavyzdys. Išnagrinėjus 91 pav. pavaizduotus funkcijų $y=f_1(x)=2\sqrt{x}$ ir $y=f_2(x)=x^2-x-2$ grafikus, paaiškėja, kad lygtis $2\sqrt{x}=x^2-x-2$ turi tik vieną šaknį $x_0\approx 2{,}9$.

Pastaba. Grafiškai taip pat galima išspręsti lygtį $f(x)=0$, kuri yra lygties $f_1(x)=f_2(x)$ atskiras atvejis, kai $f_2(x)\equiv 0$.

2°. 48 ir 49 pavyzdžiuose nagrinėjama, kaip, naudojantis funkcijų grafikais, sprendžiamos nelygybės.



91 pav.



92 pav.

48 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $|x|>x^2-x$.

Sprendimas. Nubraižome funkcijų $y=f_1(x)=|x|$ ir $y=f_2(x)=x^2-x$ grafikus (92 pav.).

Nelygybės $f_1(x)>f_2(x)$ sprendiniai yra visi realieji skaičiai x, su kuriais funkcijos $y=f_1(x)$ grafikas yra aukščiau už funkcijos $y=f_2(x)$ grafiką.

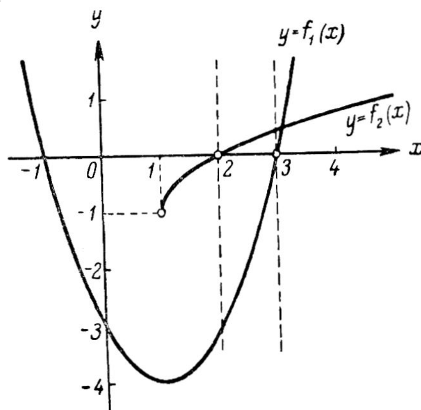
Išnagrinėję 92 pav., matome, kad nelygybės $|x|>x^2-x$ sprendiniai – tai visi skaičiai x iš atviro intervalo $0<x<2$.

49 pavyzdys. Išspręskite nelygybę

$$(x^2-2x-3)(\sqrt{x-1}-1)<0.$$

Sprendimas. Nubraižome funkcijų $y=f_1(x)=x^2-2x-3$ ir $y=f_2(x)=\sqrt{x-1}-1$ grafikus (93 pav.).

Nelygybės $f_1(x)f_2(x)<0$ sprendiniai yra visi realieji skaičiai x, su kuriais funkcijų $f_1(x)$ ir $f_2(x)$ reikšmės yra skirtingų ženklų (arba $f_1(x)<0$ ir $f_2(x)>0$, arba $f_1(x)>0$ ir $f_2(x)<0$). Tai reiškia, kad reikia rasti tokius skaičius x, kuriems funkcijų $y=f_1(x)$ ir $y=f_2(x)$ grafikų taškai būtų skirtingose x ašies pusėse. Išnagrinėję 93 pav., padarome išvadą, kad nelygybės $(x^2-2x-3)\cdot(\sqrt{x-1}-1)<0$ sprendiniai – tai visi skaičiai x iš atviro intervalo $2<x<3$.



93 pav.

3°. Būna atvejų, kai jokie algebriniai pertvarkymai nepagelbsti, sprendžiant lygtį arba nelygybę (arba sprendimas būna labai griozdiškas). Kartais tokiais atvejais verta panagrinėti funkcijų, esančių lygtyje arba nelygybėje, *apibrėžimo sritį* arba jų *reikšmių aibę*. Išspręsime tokius du pavyzdžius.

50 pavyzdys. Išspręskite nelygybę

$$\sqrt{2+x-x^2}>x^3-9.$$

Sprendimas. Suteikę nelygybei išraišką

$$\sqrt{-(x-2)(x+1)}>x^3-9,$$

gauname, kad funkcija, kuri yra nelygybės kairėje pusėje, apibrėžta uždarame intervale $-1\leqslant x\leqslant 2$, be to, visoje savo apibrėžimo srityje ji yra neneigiama, nes kiekviena jos reikšmė yra aritmetinė šaknis iš neneigiamo skaičiaus. Bet, kai $-1\leqslant x\leqslant 2$, tai dešinioji nelygybės pusė yra neigiama ir todėl duotoji nelygybė yra teisinga visiems x iš uždaro intervalo $-1\leqslant x\leqslant 2$. Taigi nelygybės sprendiniai yra visi uždaro intervalo $[-1, 2]$ skaičiai.

51 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$x^4-2x^2+2=1-\sqrt{x^3-|x|}.$$

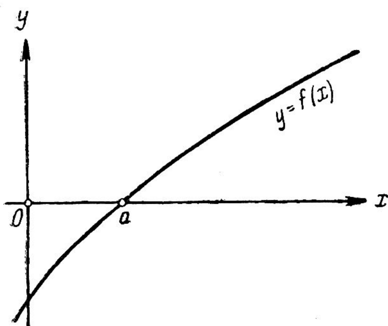
Sprendimas. Pažymėję

$$f_1(x)=x^4-2x^2+2,\ f_2(x)=1-\sqrt{x^3-|x|},$$

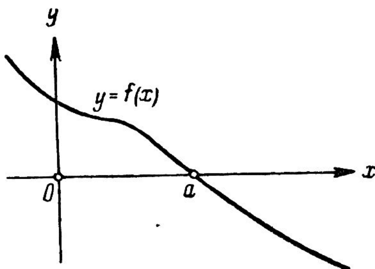
duotąją lygtį parašysime taip: $f_1(x)=f_2(x)$. Kadangi $f_1(x)=x^4-2x^2+2=(x^2-1)^2+1$, tai su visomis x reikšmėmis $f_1(x)\geqslant 1$, be to, reikšmę 1 funkcija $f_1(x)$ įgyja tik taškuose $x=\pm 1$. Tuo tarpu funkcija $f_2(x)$ su bet kokiu x iš jos apibrėžimo srities tenkina nelygybę $f_2(x)\leqslant 1$, nes aritmetinės kvadratinės šaknies reikšmė visada yra neneigiama. Vadinasi, lygybė $f_1(x)=f_2(x)$ galima tik tada, kai $f_1(x)=f_2(x)=1$, t.y. kai $x=\pm 1$. Patikrinę įsitikiname, kad $x=-1$ nėra duotosios lygties šaknis, o $x=+1$ yra šaknis. Taigi duotoji lygtis turi tik vieną šaknį $x=1$.

4°. Pabaigai išnagrinėsime vieną gana paplitusį nelygybių sprendimo būdą, kuris vadinamas *intervalų metodu*.

Pirmiausia pažymėsime, kad *jeigu monotoninė funkcija taške $x=a$ įgyja reikšmę, lygią nuliui, tai ji su visais $x<a$ yra pastovaus ženklo ir su visais $x>a$ taip pat yra pastovaus, bet priešingo ankstesniam, ženklo.* Tiksliau tariant, jeigu didėjančios funkcijos $f(x)$ reikšmė taške $x=a$ lygi nuliui, tai $f(x)<0$, kai $x<a$, ir $f(x)>0$, kai $x>a$ (94 pav.), o jeigu mažėjančios funkcijos $f(x)$ reikšmė taške $x=a$ lygi nuliui, tai $f(x)>0$, kai $x<a$, ir $f(x)<0$, kai $x>a$ (95 pav.).



94 pav.



95 pav.

Intervalų metodą dabar galėsime apibūdinti taip. Tarkime, kad $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_k(x)$ ir $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_l(x)$ – monotoninės visoje skaičių tiesėje apibrėžtos funkcijos, lygios nuliui skirtinguose taškuose. Taškus, kuriuose šių funkcijų reikšmės lygios nuliui, sunumeruosime jų didėjimo tvarka: $a_1, a_2, \ldots, a_{k+l}$ (t.y. kiekviename tokiame taške vienos iš funkcijų $f_i(x)$ arba $g_j(x)$ reikšmė lygi nuliui, be to, $a_1<a_2<\ldots<a_{k+l}$). Šie taškai skaičių tiesę suskaido į $k+l+1$ intervalų: $]-\infty;\ a_1[,\ ]a_1;\ a_2[,\ ]a_2;\ a_3[, \ldots,]a_{k+l-1};\ a_{k+l}[,\ ]a_{k+l};\ \infty[$. Tada funkcija

$$F(x)=\frac{f_1(x)f_2(x)\ldots f_k(x)}{g_1(x)g_2(x)\ldots g_l(x)}$$

kiekviename iš šių intervalų yra pastovaus ženklo, o pereinant nuo vieno intervalo prie kito, ženklą keičia į priešingą. Šį tvirtinimą, kuriuo pagrįstas intervalų metodas, įrodyti nesunku, jis dažnai taikomas, sprendžiant nelygybes.

Pastaba. Kartais tenka nagrinėti gerokai sudėtingesnę funkciją, apibrėžtą formule

$$F_1(x)=\frac{(f_1(x))^{p_1}(f_2(x))^{p_2}\dots(f_k(x))^{p_k}}{(g_1(x))^{q_1}(g_2(x))^{q_2}\dots(g_l(x))^{q_l}};$$

čia $p_1, p_2, \dots, p_k, q_1, q_2, \dots, q_l$ – natūriniai skaičiai. Sužinoti, koks šios funkcijos ženklas, taip pat nesunku. Būtent, kai skaičius p_1 yra lyginis, tai funkcija $(f_1(x))^{p_1}$ yra teigiama (visur, išskyrus tašką, kuriame jos reikšmė lygi nuliui) ir todėl ji neturi įtakos funkcijos $F_1(x)$ ženklui. Kai skaičius p_1 yra nelyginis, tai funkcijos $(f_1(x))^{p_1}$ ženklas toks pat, kaip ir funkcijos $f_1(x)$. Analogišką pastabą galima padaryti ir dėl kitų skaitiklio ir vardiklio dauginamųjų. Todėl, nustatant funkcijos $F_1(x)$ ženklą, reikia atsižvelgti tik į dauginamuosius, pakeltus nelyginiu laipsniu.

52 pavyzdys. Išspręskite nelygybę $x^5+x^4-5x^3+3x^2-4x-12>0$.

Sprendimas. Tiesiogiai patikrinę (plg. p. 124), įsitikiname, kad skaičiai -3, -1 ir 2 yra daugianario, parašyto kairėje nelygybės pusėje, šaknys. Vadinasi (žr. 12 teoremą, p. 123), šis daugianaris dalijasi iš $x+3$, iš $x+1$ ir iš $x-2$. Padalinę gauname

$$x^5+x^4-5x^3+3x^2-4x-12=(x+3)(x+1)(x-2)(x^2-x+2).$$

Todėl duotąją nelygybę galima parašyti taip:

$$(x+3)(x+1)(x-2)(x^2-x+2)>0.$$

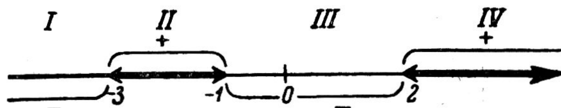
Kadangi kvadratinis trinaris x^2-x+2 su visais x yra teigiamas (jo šaknys yra kompleksinės), tai duotoji nelygybė yra ekvivalenti nelygybei

$$(x+3)(x+1)(x-2)>0.$$

Kiekviena funkcijų $x+3$, $x+1$, $x-2$ yra monotoninė, todėl galima taikyti intervalų metodą. Šios funkcijos lygios nuliui atitinkamai taškuose -3, -1, 2, kurie skaičių tiesę dalija į keturis atvirus intervalus $]-\infty; -3[$, $]-3; -1[$, $]-1; 2[$, $]2; \infty[$. Paskutiniajame (ketvirtajame) intervale visos trys funkcijos $x+3$, $x+1$, $x-2$ yra teigiamos, ir todėl funkcija

$$F(x)=(x+3)(x+1)(x-2)$$

šiame intervale irgi teigiama. Vadinasi, trečiajame intervale ji neigiama, antrajame teigiama ir pirmajame vėl neigiama (96 pav.). Taigi nelygybė



96 pav.

$F(x)>0$ yra teisinga atvirame intervale $]-3; -1[$ ir begaliniame intervale $]2; \infty[$. Todėl duotosios nelygybės sprendiniai yra visi skaičiai, tenkinantys nelygybes $-3<x<-1$ ir $x>2$.

53 pavyzdys. Išspręskite nelygybę

$$\frac{(x+7)^3 (x+4)^2 (x-1)}{(x+5)(x-2)^5} \leqslant 0.$$

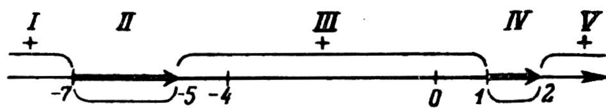
Sprendimas. Turime ištirti funkcijos

$$F_1(x) = \frac{(x+7)^3 (x+4)^2 (x-1)}{(x+5)(x-2)^5}$$

ženklą. Tirdami galime nekreipti dėmesio į dauginamąjį $(x+4)^2$, pakeltą lyginiu laipsniu (tačiau turime atsiminti, kad šis dauginamasis, kai $x=-4$, yra lygus nuliui). Kiti skaitiklio ir vardiklio dauginamieji yra monotoninės funkcijos, kurių reikšmės lygios nuliui atitinkamai taškuose -7, -5, 1, 2. Šie taškai skaičių tiesę suskaido į penkis intervalus:

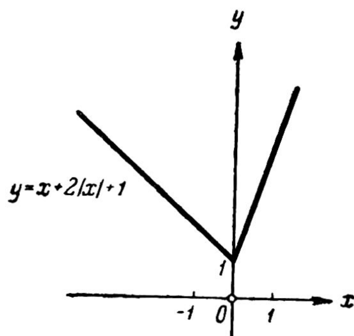
$$]-\infty; -7[,\ ]-7; -5[,\ ]-5; 1[,\ ]1; 2[,\ ]2; \infty[,$$

kurių paskutiniajame $F_1(x)>0$ (visi skaitiklio ir vardiklio dauginamieji yra teigiami). Todėl (97 pav.) pirmajame, trečiajame ir penktajame intervaluose $F_1(x)>0$, o antrajame ir ketvirtajame $F_1(x)<0$ (tik reikia atsi-

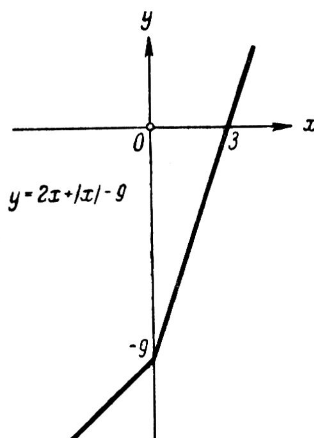


97 pav.

minti, kad taške $x=-4$ funkcijos $F_1(x)$ reikšmė lygi nuliui). Vadinasi, griežtos nelygybės $F_1(x)<0$ sprendiniai užpildo du atvirus intervalus: $]-7; -5[$ ir $]1; 2[$. Prie jų reikia dar prijungti taškus, kuriuose $F_1(x)=0$, t.y. taškus $x=-7$, $x=-4$ ir $x=1$. Taigi duotosios nelygybės $F_1(x)\leqslant 0$ sprendiniai yra visi pusiau atvirų intervalų $[-7; -5[$, $[1; 2[$ taškai, taip pat taškas $x=-4$.



98 pav.



99 pav.

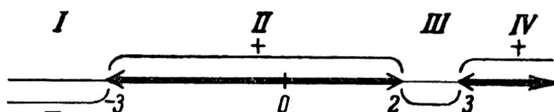
54 pavyzdys. Išspręskite nelygybę

$$\frac{(x+3)(2x+|x|-9)}{(x-2)(x+2|x|+1)}>0.$$

Sprendimas. Funkcija $x+2|x|+1$ su visais x yra teigiama (jos grafikas pavaizduotas 98 pav.), ir todėl į ją galime nekreipti dėmesio. Taigi reikia išspręsti nelygybę

$$F(x)=\frac{(x+3)(2x+|x|-9)}{x-2}>0.$$

Funkcijos $x+3$ ir $x-2$ yra monotoninės. Funkcija $2x+|x|-9$ (kurios grafikas pavaizduotas 99 pav.) taip pat yra monotoninė. Taigi trupmenos $F(x)$ skaitiklyje ir vardiklyje yra trys monotoninės funkcijos, kurių reikšmės lygios nuliui atitinkamai taškuose -3, 2, 3. Šie trys taškai skaičių tiesę suskaido į keturis intervalus:



100 pav.

$$]-\infty;\ -3[,\ ]-3;\ 2[,\ ]2;\ 3[,]\ 3;\ \infty[,$$

kurių paskutiniajame $F(x)>0$. Vadinasi (100 pav.), nelygybė $F(x)>0$ yra teisinga, kai $-3<x<2$ arba $3<x<\infty$.

VII skyriaus uždaviniai

Raskite duotųjų funkcijų apibrėžimo sritis ir apskaičiuokite šių funkcijų reikšmes nurodytuose taškuose (**7.1**–**7.5** *uždaviniai*).

7.1. $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3x+2}$; $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-3.$

7.2. $f(x)=\sqrt{x^3-4x}$; $x_1=-1,\ x_2=2,\ x_3=3.$

7.3. $f(x)=\frac{\sqrt{9-x^2}}{x+1}$; $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-2.$

7.4. $f(x)=\frac{\cos 2x}{\sin x}$; $x_1=\frac{\pi}{4}$; $x_2=\frac{7\pi}{2}$.

7.5. $f(x)=\frac{x}{\cos \pi x}$; $x_1=0$; $x_2=-1,\ x_3=100.$

Nubraižykite funkcijų grafikus (**7.6**–**7.14**):

7.6. $y=3x-1$. **7.7.** $y=x^2+2x-1$.

7.8. $y=\begin{cases}1, & \text{kai } x\leqslant 0,\\ (x-1)^2, & \text{kai } x>0.\end{cases}$

7.9. $y=\begin{cases} |x|, & \text{kai } |x|\leqslant 1, \\ 2-x^2, & \text{kai } |x|>1. \end{cases}$

7.10. $y=\begin{cases} 1, & \text{kai } -1<x<0, \\ x^2, & \text{kai } 0\leqslant x<1. \end{cases}$

7.11. $y=\begin{cases} 1, & \text{kai } -2\leqslant x\leqslant -1, \\ -x, & \text{kai } -1<x\leqslant 0, \\ 1, & \text{kai } 0<x<1. \end{cases}$

7.12. $y=\begin{cases} 3, & \text{kai } -2\leqslant x\leqslant -1, \\ -3x, & \text{kai } -1<x\leqslant 0, \\ 3x, & \text{kai } 0<x\leqslant 1, \\ 3, & \text{kai } 1<x\leqslant 4. \end{cases}$

7.13. $y=|x+1|-|x-1|$.

7.14. $y=\big|1-|x|\big|-|x|+1$.

7.15. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ yra aprėžta (žr. apibrėžimą 140 puslapyje) tada ir tik tada, kai egzistuoja skaičius $c>0$, kad su kiekviena x reikšme iš funkcijos apibrėžimo srities yra teisinga nelygybė $|f(x)|<c$.

7.16. Sugalvokite funkciją, apibrėžtą atkarpoje $0\leqslant x\leqslant 1$, kuri joje būtų neaprėžta.

7.17. Tarkime, kad funkcijos $f_1(x)$, $f_2(x)$ ir $f_3(x)$ apibrėžtos atkarpoje $[a; b]$, be to, funkcijos $f_1(x)$ ir $f_2(x)$ yra aprėžtos, o funkcija $f_3(x)$ – neaprėžta. Ištirkite, ar aprėžtos funkcijos $f_1(x)+f_2(x)$, $f_1(x)+f_3(x)$, $f_1(x)\,f_2(x)$, $f_1(x)\,f_3(x)$, $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, $\frac{f_1(x)}{f_3(x)}$.

Raskite funkcijų monotoniškumo intervalus (**7.18–7.23**):

7.18. $y=1-2x$. 7.19. $y=x^3$.

7.20. $y=3-2x-x^2$. 7.21. $y=\frac{1}{x+1}$.

7.22. $y=\cos x$. 7.23. $y=\operatorname{tg} x$.

Raskite didžiausiąją ir mažiausiąją funkcijų reikšmes (**7.24–7.27**):

7.24. $y=3\sin x-4\cos x$.

7.25. $y=3\sin^2 x+4\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x$.

7.26. $y=\sin^6 x+\cos^6 x$.

7.27. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

Raskite didžiausiąją funkcijų reikšmę (**7.28–7.29**):

7.28. $y=\frac{x}{1+x^2}$. 7.29. $y=\frac{x}{1+x+x^2}$.

7.30. Raskite funkcijos

$$y=\frac{x^2+3}{1+x}$$

mažiausiąją reikšmę, kai $x>-1$.

Ištirkite, ar duotoji funkcija yra lyginė, ar nelyginė arba nėra nei lyginė, nei nelyginė (**7.31**–**7.36**):

7.31. $y=\frac{x^2}{x^4-1}$, **7.32.** $y=x^3+2x$.

7.33. $y=\sqrt{x-1}$. **7.34.** $y=|x|+\cos x$.

7.35. $y=x+\operatorname{tg} x$. **7.36.** $y=x^2+\sin x$.

7.37. Tarkime, kad funkcija $f(x)$ yra lyginė, o funkcija $g(x)$ – nelyginė. Įrodykite, kad funkcijos $|f(x)|$, $|g(x)|$ ir $f(-x)+g(|x|)$ yra lyginės, o funkcijos $g(-x)$, $xf(x)+x^2g(x)$ ir $g(x|x|)$ – nelyginės.

7.38. Sakykime, kad funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis yra simetriška taško $x=0$ atžvilgiu. Įrodykite, kad funkcija $f_1(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)$ yra lyginė, o $f_2(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)$ – nelyginė. Kitaip tariant, įrodykite, kad funkciją $f(x)$ galima išreikšti lyginės funkcijos $f_1(x)$ ir nelyginės funkcijos $f_2(x)$ suma: $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

Raskite kiekvienos funkcijos mažiausiąjį periodą (**7.39**–**7.44**):

7.39. $\sin x \cdot \sin 3x$. **7.40.** $\sin x+\sin 2x$.

7.41. $\sin^2 x$. **7.42.** $\frac{\sin x}{1+\cos x}$.

7.43. $\operatorname{tg} x+\sin 2x$. **7.44.** $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

7.45. Įrodykite, kad funkcija $\sin x+\sin \pi x$ nėra periodinė.

Ištirkite, kurios šių funkcijų yra periodinės (**7.46**–**7.48**):

7.46. $y=\sqrt{\sin x}$. **7.47.** $y=\sin\sqrt{x}$. **7.48.** $y=\left|\sin|x|\right|$.

Nubraižykite funkcijų grafikus (**7.49**–**7.71**):

7.49. $y=x^3$. **7.50.** $y=|x|^3$.

7.51. $y=x^4-2x^2$. **7.52.** $y=x^2-3|x|+2$.

7.53. $y=\frac{1}{|x|}$. **7.54.** $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

7.55. $y=\frac{2|x|}{1+x^2}$. **7.56.** $y=|\sin x|$.

7.57. $y=\sin|x|$. **7.58.** $y=x+\frac{1}{x}$.

7.59. $y=x+\cos x$. **7.60.** $y=x^3-2x^2+x$.

7.61. $y=-x^5+2x^3-x.$

7.62. $y=\frac{2}{x^2-2x+3}.$

7.63. $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}.$

7.64. $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{|x|}.$

7.65. $y=\frac{x^2-1}{x^4+1}.$

7.66. $y=\frac{x+1}{x^3}.$

7.67. $y=\frac{1-x^2}{x^2+x^4}.$

7.68. $y=\frac{1}{x^2+2x-3}.$

7.69. $y=\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x}.$

7.70. $y=\frac{1}{x^4-4x^3+4x^2}.$

7.71. $y=\frac{|x|}{|x+1|}.$

7.72. Tarkime, kad $f(x)=\sqrt{x}$, $g(t)=\frac{t^2}{t-1}$. Raskite $f(g(t))$.

7.73. Duota $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$, $g(t)=\frac{2t^2-2t+1}{(t-1)^2}$. Raskite $f(g(t))$.

7.74. Duota $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$. Raskite $f\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

7.75. Tarkime, kad $f(x)=\sqrt{x^3-1}$. Raskite $f(\sqrt[3]{x^2+1})$.

7.76. Raskite $f(tg\,x)$, kai $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$.

7.77. Tarkime, kad $f\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)=\frac{x+1}{x-1}$, kai $x\neq-2;\ 1$. Raskite $f(x)$.

7.78. Tarkime, kad $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=x^2-1$, kai $x\neq 0$. Raskite $f(x)$.

7.79. Įrodykite, kad

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0,$$

kai $f(x)=ax^2+bx+c$.

7.80—7.86 *uždaviniuose raskite funkcijas $f(x)$ ir $g(x)$, tenkinančias duotąją lygčių sistemą.*

7.80. $\begin{cases} f(2x+1)+g(x-1)=x, \\ f(2x+1)-2g(x-1)=2x^2. \end{cases}$

7.81. $\begin{cases} f(2x+1)+2g(2x+1)=2x, \\ f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x. \end{cases}$

7.82. $\begin{cases} f(x+1)+xg(x+1)=2x, \\ f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x-1. \end{cases}$

7.83. $\begin{cases} f(2x+2)+2g(4x+7)=x-1, \\ f(x-1)+g(2x+1)=2x. \end{cases}$

7.84. $\begin{cases} f(4x+3)+xg(6x+4)=2, \\ f(2x+1)+g(3x+1)=x+1. \end{cases}$

7.85. $\begin{cases} f(3x-1)+g(6x-1)=3x, \\ f(x+1)+x^2 g(2x+3)=2x^2+x. \end{cases}$

7.86. $\begin{cases} f(2x-1)+g(1-x)=x+1, \\ f\left(\frac{x}{x+1}\right)+2g\left(\frac{1}{2x+2}\right)=3. \end{cases}$

Raskite funkciją $f(x)$, tenkinančią duotąją lygtį (**7.87–7.90**):

7.87. $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x.$

7.88. $(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}.$

7.89. $f(x)+xf\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2.$

7.90. $2f\left(\frac{x}{x-1}\right)-3f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)=\frac{13x-4}{2x-3x^2}.$

Raskite funkciją, atvirkštinę duotajai (**7.91–7.94**):

7.91. $y=x^3.$ **7.92.** $y=1+\frac{1}{x}.$

7.93. $y=\frac{ax+b}{cx-a}.$ **7.94.** $y=\sqrt[4]{x}.$

Tiesiškai transformavę funkcijos $y=|x|$ grafiką (žr. 50 pav., *b*), *nubraižykite šių funkcijų grafikus* (**7.95–7.97**):

7.95. $y=|x+4|.$ **7.96.** $y=2|x-1|+1.$

7.97. $y=|3x+1|.$

Tiesiškai transformavę funkcijos $y=x^3$ grafiką (žr. **7.49** uždavinį), *nubraižykite šių funkcijų grafikus* (**7.98, 7.99**):

7.98. $y=(x-1)^3.$ **7.99.** $y=1-x^3.$

Tiesiškai transformavę funkcijos $y=\sqrt{x}$ grafiką, nubraižykite šių funkcijų grafikus (**7.100, 7.101**):

7.100. $y=\sqrt{2x+3}.$ **7.101.** $y=1-2\sqrt{x}.$

Tiesiškai transformavę trigonometrinių funkcijų $y=\sin x$ ir $y=\operatorname{tg} x$ grafikus, nubraižykite šių funkcijų grafikus (**7.102–7.104**):

7.102. $y=\sin\left(\frac{x}{2}-1\right).$ **7.103.** $y=3\sin 2x-1.$

7.104. $y=1-\frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$

Tiesiškai transformavę atvirkštinių trigonometrinių funkcijų grafikus, nubraižykite šių funkcijų grafikus (**7.105**—**7.107**):

7.105. $y=\arcsin(2x+4)$. **7.106.** $y=\frac{1}{2}\arccos x-\frac{\pi}{4}$.

7.107. $y=2\,\mathrm{arctg}\,2x$.

Ištirkite, kiek realiųjų šaknų turi lygtis (**7.108**—**7.111**):

7.108. $1+x-x^2=|x|^3$. **7.109.** $x(x+1)(x+2)=0{,}01$.

7.110. $x=\mathrm{tg}\,x$. **7.111.** $x=100\sin x$.

Išspręskite lygtis (**7.112**—**7.114**):

7.112. $4+3x-x^2=|1+x|$.

7.113. $|x^2-2x-3|=x+1$.

7.114. $6x-1=2\cos\pi x$.

Išspręskite apytiksliai (*su paklaida, ne didesne už* 0,125) *lygtis* (**7.115**, **7.116**):

7.115. $x^2-x-2=2\sqrt{x}$. **7.116.** $x^2-2x=\sqrt{x}$.

Išspręskite nelygybes (**7.117**—**7.120**):

7.117. $x^2-2|x|<3$. **7.118.** $2-x^2>|x|+2|x-1|$.

7.119. $\frac{x^2-3x+2}{x^2-7x+12}<0$. **7.120.** $\frac{x^2+x}{x^2+x-2}>0$.

VIII SKYRIUS

LAIPSNINĖ, RODIKLINĖ IR LOGARITMINĖ FUNKCIJOS

§ 1. Laipsnis su natūriniu rodikliu

Iš pradžių laipsnį apibrėšime, kai jo rodiklis yra natūrinis skaičius, didesnis už vienetą; tokiu atveju laipsnio pagrindas gali būti bet koks realusis (arba netgi kompleksinis) skaičius. Būtent, kai n – natūrinis skaičius, didesnis už vienetą, ir a – bet koks realusis (arba kompleksinis) skaičius, tai laipsniu a^n vadiname n dauginamųjų, kurių kiekvienas lygus a, sandaugą:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n \text{ kartų}}. \quad (1)$$

Kai $n=1$, šis apibrėžimas netinka, nes „sandauga, susidedanti iš vieno dauginamojo" neturi prasmės. Tačiau sutarta, kad, koks bebūtų a, skaičius a^1 pagal apibrėžimą lygus a. Taigi gauname *laipsnio su natūriniu rodikliu* apibrėžimą: skaičius a^n yra lygus a, kai $n=1$, ir apibrėžiamas (1) formule, kai $n>1$.

Iš šio apibrėžimo lengvai gauname daugelį laipsnio savybių. Jas suskirstysime į dvi grupes.

I. Savybės, išreiškiamos lygybėmis:

a) *bet kokiam a ir bet kokiems natūriniams m ir n galioja lygybė* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

b) *bet kokiam a ir bet kokiems natūriniams m ir n galioja lygybė* $(a^m)^n = a^{mn}$;

c) *bet kokiems a, b ir bet kokiam natūriniam n galioja lygybė* $(ab)^n = a^n b^n$;

d) *bet kokiam $a \neq 0$ ir bet kokiems natūriniams m ir n, kai $n>m$, galioja lygybė* $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;

e) *bet kokiam a, bet kokiam $b \neq 0$ ir bet kokiam natūriniam n galioja lygybė* $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

f) *bet kokiam natūriniam n galioja lygybė* $0^n=0$, $1^n=1$;

g) *bet kokiam a ir bet kokiam natūriniam n galioja lygybė* $|a^n| = |a|^n$.

II. Savybės, išreiškiamos nelygybėmis:

h) *koks bebūtų natūrinis n, kai $0 \leqslant a < b$, tai $a^n < b^n$;*

i) *jeigu $a>1$, tai $a^m > a^n$, kai $m>n$;*

j) *jeigu $0<a<1$, tai $a^m < a^n$, kai $m>n$;*

k) *jeigu $a<0$, tai $a^n>0$, kai n – lyginis,* ir *$a^n<0$, kai n – nelyginis.*

Įsidėmėtina, kad savybės a) – g), išreiškiamos lygybėmis, yra teisingos bet kokiems *kompleksiniams* skaičiams a ir b, o savybės h) – k),

išreiškiamos nelygybėmis, yra teisingos bet kokiems *realiesiems* skaičiams a ir b. Toliau apsiribosime tik laipsniais, kurių pagrindas – realusis skaičius.

Išvardytųjų savybių įrodymai nesudėtingi. Pavyzdžiui, čia įrodysime h) savybę (plg. p. 59).

Reikia įrodyti, kad $b^n - a^n > 0$. Pagal (8) formulę (žr. p. 117) turime

$$b^n - a^n = (b-a)\,(b^{n-1} + b^{n-2}\,a + b^{n-3}\,a^2 + \dots + ba^{n-2} + a^{n-1}).$$

Kadangi $b > a$, tai reiškinys pirmuosiuose dešiniosios pusės skliaustuose yra teigiamas. Reiškinys antruosiuose skliaustuose irgi teigiamas, nes $a \geqslant 0, b > 0$. Vadinasi, dešinioji pusė yra teigiama, ir todėl $b^n - a^n > 0$.

1 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1$.

Sprendimas. Pirmiausia atkreipkite dėmesį į štai ką: kai $x = k\frac{\pi}{2}$ (k – sveikasis skaičius), tai viena iš funkcijų $\sin x$, $\cos x$ įgyja reikšmę 0, o kita – reikšmę ± 1. Todėl visi skaičiai $k\frac{\pi}{2}$ (čia $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) yra duotosios lygties šaknys.

Dabar tarkime, kad x nelygus $k\frac{\pi}{2}$. Tuomet ir funkcija $\sin x$, ir $\cos x$ įgyja reikšmes, nelygias 0 ir ± 1. Todėl $0 < \sin^2 x < 1$, $0 < \cos^2 x < 1$. Pagal j) savybę gauname $(\sin^2 x)^5 < (\sin^2 x)^1$, t.y. pagal b) savybę $\sin^{10} x < \sin^2 x$. Analogiškai $\cos^{10} x < \cos^2 x$. Taigi $\sin^{10} x + \cos^{10} x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, ir todėl $\sin^{10} x + \cos^{10} x \neq 1$. Tai reiškia, kad x nėra duotosios lygties šaknis.

Vadinasi, duotosios lygties šaknys yra skaičiai $k\frac{\pi}{2}$ (čia $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), ir tik jie.

2 pavyzdys. Tarkime, kad $0 < a < 1$. Koks bebūtų teigiamas skaičius ε, galima rasti tokį natūrinį skaičių n, kad $a^n < \varepsilon$. Įrodykite.

Sprendimas. Natūrinį skaičių k parinksime taip, kad $\frac{1}{k} < \varepsilon$ (žr. D) savybę, p. 44). Tada $k > \frac{1}{\varepsilon}$. Įrodę nelygybę $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{\varepsilon}$, tuo pačiu įrodysime ir nelygybę $a^n < \varepsilon$. Vadinasi, jeigu sugebėsime parinkti tokį n, kad $\frac{1}{a^n} > k$, tai gausime $\frac{1}{a^n} > k > \frac{1}{\varepsilon}$, o tai ir reikia įrodyti. Taigi pakanka parinkti tokį n, kad $\frac{1}{a^n} > k$. Pagal c) ir f) savybes, turime $\frac{1}{a^n} = \frac{1^n}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$. Vadinasi, uždaviniui išspręsti reikia parinkti tokį n, kad $\left(\frac{1}{a}\right)^n > k$.

Kadangi $0 < a < 1$, tai $\frac{1}{a} > 1$, t.y. skaičius $\frac{1}{a} - 1$ yra teigiamas. Todėl galima rasti tokį natūrinį skaičių q, kad $\frac{1}{q} < \frac{1}{a} - 1$, t.y. $\frac{1}{a} > 1 + \frac{1}{q}$. Pagal h) savybę turime $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^n$. Todėl pakanka parinkti tokį n, kad $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^n > k$. Bet $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^n > 1 + \frac{n}{q}$ (ši nelygybė lengvai įrodoma matematinės indukcijos metodu). Taigi pakanka parinkti tokį n, kad $1 + \frac{n}{q} >$

$>k$.Pastaroji nelygybė yra ekvivalenti nelygybei $\frac{n}{q}>k-1$, taigi ir nelygybei $n>q\ (k-1)$. Todėl pakanka paimti, pavyzdžiui, $n=q\,(k-1)+1$, ir turėsime reikiamą n reikšmę.

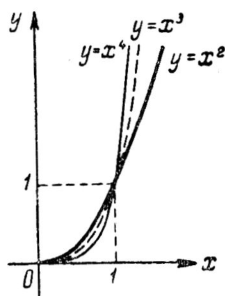
§ 2. Laipsninė funkcija su natūriniu rodikliu

Nagrinėsime funkciją

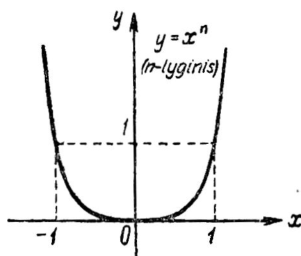
$$y=x^n;$$

čia n – natūrinis skaičius. Iš to, kas buvo pasakyta pirmajame paragrafe, išplaukia, kad šios funkcijos apibrėžimo sritis – visa realioji tiesė, t.y. funkcija x^n yra apibrėžta su bet kokia realiąja x reikšme. Toliau pagal f) ir h) savybes funkcija $y=x^n$ įgyja reikšmę 0, kai $x=0$, reikšmę 1, kai $x=1$, ir monotoniškai didėja spindulyje $x\geqslant 0$ (101 pav.). Pagaliau šios funkcijos pobūdis, kai $x<0$, priklauso nuo to, koks yra skaičius n – lyginis ar nelyginis. Būtent,

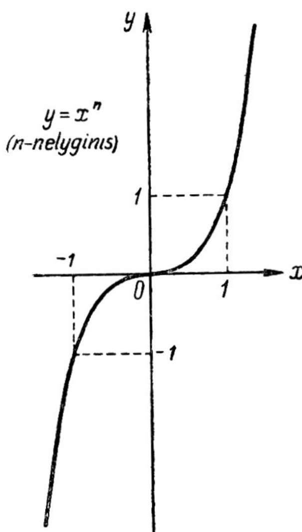
$$(-x)^n=(-1\cdot x)^n=(-1)^n x^n=\begin{cases} x^n, & \text{kai } n - \text{lyginis},\\ -x^n, & \text{kai } n - \text{nelyginis}.\end{cases}$$



101 pav.



102 pav.



103 pav.

Vadinasi, kai n – lyginis, funkcija $y=x^n$ yra lyginė; taigi jos grafikas simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu, ir todėl spindulyje $x\leqslant 0$ ši funkcija mažėja (102 pav.). Kai n – nelyginis, funkcija $y=x^n$ yra nelyginė; taigi jos grafikas simetriškas koordinačių pradžios atžvilgiu, ir todėl funkcija didėja visoje skaičių tieseje (103 pav.).

Dabar suformuluosime ir įrodysime dar vieną svarbią funkcijos $y=x^n$ savybę:

l) *Funkcija* $y=x^n$, *kai* $x>0$, *įgyja visas galimas teigiamas reikšmes.* Kitaip tariant, koks bebūtų teigiamas skaičius y_0, visada rasime tokį skaičių $x_0>0$, kad $(x_0)^n=y_0$. (Ši teorema mokykliniuose vadovėliuose neįrodoma.)

Įrodymas. Kai $n=1$, ši savybė yra aiški savaime ir todėl tarsime, kad $n\geqslant 2$. Raide q pažymėsime sveikąjį skaičių, didesnį už y_0. Kadangi $q\geqslant 1$, tai $q^{n-1}\geqslant 1$ (žr. h) ir f) savybes). Sudauginę nelygybes $q^{n-1}\geqslant 1$ ir $q>y_0$, gauname $q^n>y_0$. Taigi $0^n<y_0<q^n$.

Pritaikę h) savybę, turime

$$0^n<1^n<2^n<\ \ldots\ <(q-1)^n<q^n.$$

Kadangi y_0 yra tarp 0^n ir q^n, tai galėsime rasti tokį neneigiamą sveikąjį skaičių k (mažesnį už q), kad $k^n<y_0\leqslant(k+1)^n$. Šį skaičių k pažymėsime raide a_0, o skaičių $k+1$ – raide b_0. Taigi $a_0^n<y_0\leqslant b_0^n$, be to, $b_0-a_0=1$.

Toliau pagal h) savybę turime

$$a_0^n<\left(a_0+\frac{1}{10}\right)^n<\left(a_0+\frac{2}{10}\right)^n<\ldots<\left(a_0+\frac{9}{10}\right)^n<(a_0+1)^n=b_0^n.$$

Kadangi $a_0^n<y_0\leqslant b_0^n$, tai galėsime rasti tokį skaičių l' $(=0, 1, \ldots, 9)$, kad $\left(a_0+\frac{l'}{10}\right)^n<y_0\leqslant\left(a_0+\frac{l'+1}{10}\right)^n$. Skaičių $a_0+\frac{l'}{10}$ pažymėsime raide a_1, o skaičių $a_0+\frac{l'+1}{10}$ – raide b_1. Taigi $a_1^n<y_0\leqslant b_1^n$, be to, $a_0\leqslant a_1<b_1\leqslant b_0$ ir $b_1-a_1=\frac{1}{10}$.

Analogiškai galėsime rasti tokį skaičių l'' $(=0, 1, \ldots, 9)$, kad $\left(a_1+\frac{l''}{100}\right)^n<y_0\leqslant\left(a_1+\frac{l''+1}{100}\right)^n$. Skaičių $a_1+\frac{l''}{100}$ pažymėsime raide a_2, o skaičių $a_1+\frac{l''+1}{100}$ – raide b_2. Taigi $a_2^n<y_0\leqslant b_2^n$, be to, $a_0\leqslant a_1\leqslant a_2<b_2\leqslant b_1\leqslant b_0$ ir $b_2-a_2=\frac{1}{100}$.

Tęsdami šį procesą, gausime dvi skaičių sekas $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ ir $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$, be to, su bet kokiu natūriniu k galios sąryšiai $a_k^n<y_0\leqslant b_k^n$; $a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ \ldots\ \leqslant a_k<b_k\leqslant b_{k-1}\leqslant\ \ldots\ \leqslant b_1\leqslant b_0$ ir $b_k-a_k=\frac{1}{10^k}$.

Įsidėmėtina, kad bet kokiems natūriniams skaičiams k ir l yra teisinga nelygybė $a_k<b_l$. Iš tiesų, kai m – natūrinis skaičius, didesnis už k ir už l, tai $a_k\leqslant a_m$, $a_m<b_m$, $b_m\leqslant b_l$; iš šių nelygybių ir išplaukia, kad $a_k<b_l$.

Kadangi seka a_0, $a_1, a_2, \ldots$ yra nemažėjanti (t.y. $a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\ \ldots\ \leqslant a_k\leqslant\ \ldots$) ir aprėžta (nes su bet kokia k reikšme $a_k<b_0$), tai ji turi ribą. Šią ribą pažymėsime x_0. Kadangi seka a_0, a_1, $a_2, \ldots$ yra nemažėjanti, tai su bet kokia k reikšme $x_0\geqslant a_k$. Antra vertus, su bet kokia l reikšme $x_0\leqslant b_l$, nes kiekvienas šių skaičių a_0, $a_1, a_2, \ldots$ yra mažesnis už b_l. Taigi $a_k\leqslant x_0\leqslant b_l$. Iš šios nelygybės pagal h) savybę gauname nelygybę $a_k^n\leqslant x_0^n\leqslant b_l^n$,

kuri atskiru atveju įgyja išraišką $a_k^n \leqslant x_0^n \leqslant b_k^n$. Kadangi, be to, $a_k^n < y_0 \leqslant b_k^n$, tai su bet kokia k reikšme yra teisinga nelygybė

$$|y_0 - x_0^n| \leqslant b_k^n - a_k^n. \qquad (2)$$

Dabar jau nesunku įrodyti, kad $x_0^n = y_0$. Tarkime priešingai. Tada skaičius $\alpha = |y_0 - x_0^n|$ yra teigiamas. Toliau skirtumą $b_k^n - a_k^n$ galima įvertinti taip:

$$b_k^n - a_k^n = (b_k - a_k)(b_k^{n-1} + b_k^{n-2} a_k + \ldots + b_k a_k^{n-2} + a_k^{n-1}) =$$

$$= \frac{1}{10^k}(b_k^{n-1} + b_k^{n-2} a_k + \ldots + b_k a_k^{n-2} + a_k^{n-1}) <$$

$$< \frac{1}{10^k}(b_0^{n-1} + b_0^{n-1} + \ldots + b_0^{n-1}) = \frac{n b_0^{n-1}}{10^k}.$$

Taigi iš (2) nelygybės išplaukia nelygybė

$$0 < \alpha < \frac{n b_0^{n-1}}{10^k},$$

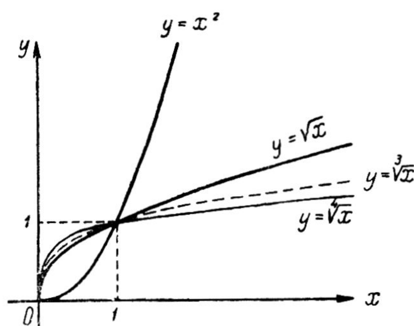
kuri yra teisinga su bet kokia natūrine k reikšme, t.y.

$$\left(\frac{1}{10}\right)^k > \frac{\alpha}{n b_0^{n-1}} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Bet tai prieštarauja teiginiui, įrodytam 2 pavyzdyje, p. 184. Gautas prieštaravimas įrodo, kad $x_0^n = y_0$, t.y. 1) savybė yra teisinga.

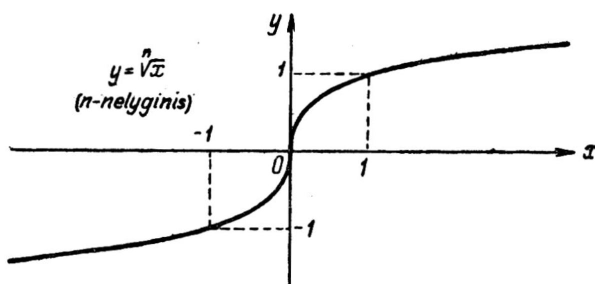
§ 3. Aritmetinė šaknis

Taigi funkcija $y = x^n$, kai $0 \leqslant x < \infty$, yra (su bet kokiu natūriniu n) didėjanti, o jos reikšmių aibė yra (pagal 1) savybę) visas spindulys $[0; \infty[$. Todėl galima nagrinėti funkciją, atvirkštinę jai. Ši atvirkštinė funkcija žymima simboliu $y = \sqrt[n]{x}$ ir vadinama n-tojo laipsnio *aritmetine šaknimi*. Pagal tai, kas pasakyta 160 puslapyje, funkcija $y = \sqrt[n]{x}$ yra apibrėžta visame spindulyje $[0; \infty[$, o jos reikšmių aibė irgi yra visas šis spindulys (C savybė., p. 160). Toliau funkcija $y = \sqrt[n]{x}$ yra didėjanti (B savybė, p. 160). Funkcijų $y = \sqrt[n]{x}$ grafikai pavaizduoti 104 pav. (žr. D savybę, p. 160). Pabrėžiame, kad n-tojo laipsnio aritmetinę šaknį $\sqrt[n]{y_0}$ galima ištraukti iš bet kokio neneigiamo skaičiaus y_0 (nes funkcija $\sqrt[n]{x}$ yra apibrėžta visame



104 pav.

spindulyje $0 \leqslant x < \infty$). Toliau sąryšis $x_0 = \sqrt[n]{y_0}$ reiškia (pagal A savybę, p. 160), kad $y_0 \geqslant 0$, $x_0 \geqslant 0$ ir $y_0 = x_0^n$. Dar pažymėsime, kad pagal E savybę (p. 160) $(\sqrt[n]{a})^n = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$, koks bebūtų teigiamas skaičius a.



105 pav.

Pastaba. Funkcija $y = x^n$, kai n – nelyginis, didėja *visoje tiesėje* $]-\infty; \infty[$, o ne tik spindulyje $[0; \infty[$. Šios funkcijos reikšmių aibė taip pat sutampa su visa skaičių tiese $]-\infty; \infty[$. Todėl, kai n – nelyginis, tai atvirkštinę funkciją $\sqrt[n]{x}$ galima nagrinėti visoje tiesėje $]-\infty; \infty[$, o ne tik spindulyje $[0, \infty[$[1]. Šią funkciją irgi įprasta žymėti simboliu $\sqrt[n]{x}$. Pavyzdžiui, funkcijas $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[7]{x}$, $\sqrt[39]{x}$ galima nagrinėti su bet kokia x reikšme (o ne tik tada, kai $x \geqslant 0$). Funkcija $\sqrt[n]{x}$, apibrėžta, kai n – nelyginis, visoje skaičių tiesėje, sutampa su aritmetine šaknimi, jeigu $x \geqslant 0$, ir įgyja neigiamas reikšmes, jeigu $x < 0$. Kadangi funkcija $y = x^n$, kai $n = 2k - 1$, yra nelyginė, tai ir funkcija $y = \sqrt[n]{x}$ irgi yra nelyginė, t.y. $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$ (n – nelyginis). Šį faktą iliustruoja 105 pav. Tačiau šiame skyriuje apsiribosime tik aritmetinėmis šaknimis, t.y. netgi tada, kai n – nelyginis, funkciją $y = \sqrt[n]{x}$ nagrinėsime tik su $x \geqslant 0$ reikšmėmis. Kodėl taip darome, paaiškinsime 5 paragrafe.

3 pavyzdys. Kai $0 < a < 1$, tai, koks bebūtų teigiamas skaičius $\varepsilon < 1$, galima rasti tokį n, kad $\sqrt[n]{a} > 1 - \varepsilon$. Įrodykite.

Sprendimas. Kadangi abu skaičiai $\sqrt[n]{a}$ ir $1 - \varepsilon$ yra teigiami, tai nelygybė $\sqrt[n]{a} > 1 - \varepsilon$ ekvivalenti nelygybei $(\sqrt[n]{a})^n > (1 - \varepsilon)^n$ (nes funkcija

[1] Matematikos vadovėliuose, parašytuose pagal naują matematikos programą, funkcija $y = \sqrt[n]{x}$ apibrėžta tik su $x \geqslant 0$ reikšmėmis.

$y=x^n$ – didėjanti), t.y. nelygybei $a>(1-\varepsilon)^n$. Kitaip tariant, reikia įrodyti, kad galima rasti natūrinį skaičių n, su kuriuo $(1-\varepsilon)^n<a$. Bet tai tiesiogiai išplaukia iš 2 pavyzdžio (p. 184), nes $0<1-\varepsilon<1$.

§ 4. Laipsnis su sveikuoju rodikliu

Apibrėžę laipsnį su natūriniu rodikliu, jau galime laipsnio sąvoką apibendrinti bet kokio sveikojo rodiklio atvejui. Kitaip tariant, turime apibrėžti reiškinius $a^0, a^{-1}, a^{-2}, \ldots$ ir, be to, taip, kad galiotų pagrindinės laipsnio savybės. Pirmiausia pareikalausime, kad išliktų a) savybė, suformuluota 183 puslapyje. Pasirodo, to jau pakanka, norint apibūdinti reiškinių a^0, a^{-1}, a^{-2} ir kt. prasmę. Iš tiesų tarkime, kad a – bet koks nelygus nuliui realusis skaičius. Tada pagal a) savybę turime

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m, \text{ ir todėl } a^0 = \frac{a^m}{a^m} = 1;$$

toliau

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{(-n)+n} = a^0 = 1, \text{ ir todėl } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Taigi

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (kai } a \neq 0). \tag{3}$$

Aišku, kad šių samprotavimų negalima laikyti (3) formulių įrodymu, nes kol kas dar neapibrėžėme reiškinių a^0 ir a^{-n} prasmės. Tačiau šie samprotavimai įrodo štai ką: jeigu norime laipsnius su bet kokiais sveikaisiais rodikliais apibrėžti taip, *kad išliktų* a) *savybė*, tai be (3) formulių neapsieisime.

Todėl (3) formulės laikomos laipsnių su nuliniu ir neigiamais rodikliais apibrėžimu. Tiksliau tariant, *kai* $a=0$, *laipsniai* a^0 *ir* a^{-n} (*čia* n – *natūrinis*) *neapibrėžiami*; *kai* $a\neq 0$, *šie laipsniai apibrėžiami* (3) *formulėmis*.

Taip sutarę apibrėžti laipsnius su nuliniu ir neigiamais rodikliais, galime patikrinti, ar galioja trečiajame paragrafe suformuluotos savybės. Pasirodo, kad visos savybės galioja, išskyrus savybę $0^n=0$, nes su nuliniu ir neigiamuoju rodikliu ši lygybė neturi prasmės. Taigi laipsniai su sveikaisiais rodikliais, kai $a\neq 0$, $b\neq 0$, turi šias savybes.

I. Savybės, išreiškiamos lygybėmis:

a) *bet kokiems sveikiesiems* m, n *yra teisinga lygybė* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

b) *bet kokiems sveikiesiems* m, n *yra teisinga lygybė* $(a^m)^n = a^{mn}$;

c) *bet kokiam sveikajam* n *yra teisinga lygybė* $(ab)^n = a^n b^n$;

d) *bet kokiems sveikiesiems* m *ir* n *yra teisinga lygybė* $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;

e) *bet kokiam sveikajam* n *yra teisinga lygybė* $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;

f) *bet kokiam sveikajam* n *yra teisinga lygybė* $1^n = 1$;

g) *bet kokiam sveikajam* n *yra teisinga lygybė* $|a^n| = |a|^n$.

II. Savybės, išreiškiamos nelygybėmis:

h) *jeigu* $0<a<b$, tai $a^n<b^n$, kai sveikasis skaičius $n>0$, *ir* $a^n>b^n$, *kai sveikasis skaičius* $n<0$;

i) *jeigu* $a>1$, *tai* $a^m>a^n$ *su visais sveikaisiais skaičiais* $m>n$;

j) *jeigu* $0<a<1$, *tai* $a^m<a^n$ *su visais sveikaisiais skaičiais* $m>n$;

k) *jeigu* $a<0$, *tai* $a^n>0$, *kai n lyginis, ir* $a^n<0$, kai *n nelyginis.*

Pavyzdžiui, įrodysime a) savybę.

Kai abu sveikieji skaičiai m, n teigiamieji, tai laipsnio rodikliai yra natūriniai, o tokiu atveju, kaip žinome, a) savybė yra teisinga.

Kai bent vienas iš rodiklių m, n lygus nuliui, tarkime, $m=0$, tai

$$a^m \cdot a^n=a^0 \cdot a^n=1 \cdot a^n=a^n=a^{0+n}=a^{m+n},$$

t.y. a) savybė yra teisinga.

Kai abu rodikliai m, n yra neigiamieji, t.y. $m=-k$, $n=-l$ (čia k, l – natūriniai skaičiai), tai

$$a^m \cdot a^n=a^{-k} \cdot a^{-l}=\frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^l}=\frac{1}{a^k a^l}=\frac{1}{a^{k+l}}=$$

$$=a^{-(k+l)}=a^{(-k)+(-l)}=a^{m+n},$$

t.y. a) savybė yra teisinga.

Dar reikia išnagrinėti atvejį, kai vienas rodiklis yra teigiamas, o kitas – tarkime m – neigiamas, t.y. $m=-k$ (k, n – natūriniai skaičiai). Čia galimi trys atvejai:

kai $k<n$, tai

$$a^m \cdot a^n=a^{-k} \cdot a^n=\frac{1}{a^k} \cdot a^n=\frac{a^n}{a^k}=a^{n-k}=a^{(-k)+n}=a^{m+n};$$

kai $k=n$, t.y. $m=-n$, turime

$$a^m \cdot a^n=a^{-n} \cdot a^n=\frac{1}{a^n} \cdot a^n=\frac{a^n}{a^n}=1=a^0=a^{n-n}=a^{(-n)+n}=a^{m+n};$$

kai $k>n$, tai

$$a^m \cdot a^n=a^{-k} \cdot a^n=\frac{1}{a^k} \cdot a^n=\frac{a^n}{a^k}=\frac{a^n}{a^n \cdot a^{k-n}}=\frac{1}{a^{k-n}}=$$

$$=a^{-(k-n)}=a^{(-k)+n}=a^{m+n}.$$

Taigi a) savybė yra teisinga visada. Kadangi išnagrinėjome visas galimybes, tai a) savybė įrodyta bet kokiems sveikiems rodikliams m, n.

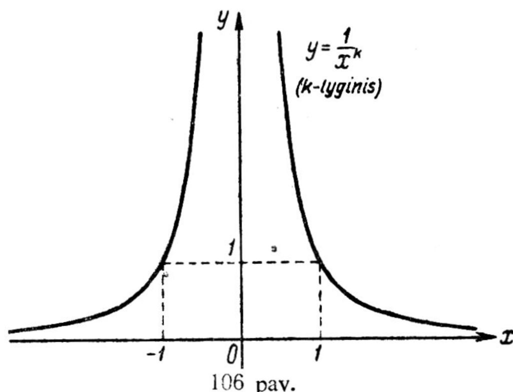
Analogiškai (išnagrinėjus visus galimus atvejus) įrodomos ir kitos savybės.

Baigdami šį paragrafą, trumpai išnagrinėsime funkcijos $y=x^n$ savybes, kai rodiklis n – sveikasis skaičius. Kai n – natūrinis, šios funkcijos savybes jau išnagrinėjome 2 paragrafe. Kai $n=0$, gauname funkciją $y=x^0$. Ši funkcija apibrėžta, kai $x\neq 0$, ir jos reikšmės visuose apibrėžimo srities

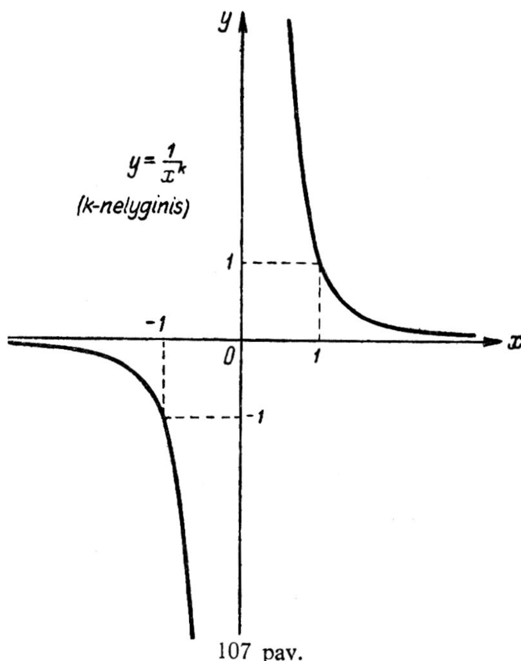
taškuose lygios 1. Pagaliau išnagrinėsime funkciją $y=x^n$, kai n – sveikas neigiamas skaičius, t.y. funkciją

$$y=x^{-k}=\frac{1}{x^k}\ ; \tag{4}$$

čia k – natūrinis skaičius. Šios funkcijos apibrėžimo sritis – skaičių tiesė be taško $x=0$. Kai $x>0$, (4) funkcija mažėja, nes x^k, kai $x>0$, didėja.



106 pav.



107 pav.

Kai $x<0$, (4) funkcija irgi yra monotoninė: spindulyje $]-\infty, 0[$ ji didėja, kai k lyginis, ir mažėja, kai k nelyginis (106, 107 pav.). Iš viso (t.y. visoje apibrėžimo srityje) (4) funkcija nė su vienu natūriniu k nėra monotoninė.

§ 5. Laipsnis su racionaliuoju rodikliu

Tolesnis etapas yra laipsnio sąvokos praplėtimas *racionaliųjų* rodiklių atvejui. Kaip ir § 4, turime apibrėžti laipsnio a^r, kai r – racionalusis skaičius, prasmę. Iš pradžių pabandysime suvokti, kokiu būdu galėtume šį laipsnį apibrėžti. Dabar, kaip ir § 4, remsimės tuo, kad sveikiesiems rodikliams laipsnis jau apibrėžtas, ir pabandysime apibrėžti laipsnio a^r su racionaliuoju rodikliu prasmę taip, kad išliktų b) savybė (p. 183 arba 189). Taigi išnagrinėsime orientuojančius samprotavimus, kurie padėtų parinkti protingą apibrėžimą.

Pirmiausia turime pastebėti, kad skaičius a^r gali būti tik teigiamas. Iš tiesų, kadangi skaičius r yra racionalusis, tai $\frac{r}{2}$ – irgi racionalusis, ir todėl pagal b) savybę gauname

$$a^r = a^{\frac{r}{2}\cdot 2} = (a^{\frac{r}{2}})^2.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad a^r yra neneigiamas skaičius. Toliau, kadangi skaičius r yra racionalusis, tai turi būti apibrėžtas ir laipsnis a^{-r}. Be to,

$$a^{-r} = a^{r\cdot(-1)} = (a^r)^{-1};$$

iš čia gauname, kad $a^r \neq 0$. Taigi, kad skaičius a^r būtų apibrėžtas bet kokiam racionaliajam rodikliui r ir galiotų b) savybė, turi būti $a^r > 0$.

Toliau, kai racionalusis skaičius r nelygus nuliui, tai apibrėžtas skaičius $\frac{1}{r}$ (kuris irgi yra racionalusis). Kaip jau minėjome, skaičius a^r yra teigiamas ir skaičius $(a^r)^{\frac{1}{r}}$ taip pat teigiamas. Bet $(a^r)^{\frac{1}{r}} = a^{r\cdot\frac{1}{r}} = a^1 = a$; taigi skaičius a turi būti teigiamas. Kad skaičius a būtų apibrėžtas bet kokiam racionaliajam rodikliui r ir galiotų b) savybė, laipsnio pagrindas a turi būti (kai $r \neq 0$) teigiamas ir pats laipsnis a^r taip pat turi būti teigiamas skaičius. Remdamiesi šiais įvadiniais samprotavimais, sutarsime ateičiai, kad *laipsnis a^r apibrėžiamas tik tada, kai a yra teigiamas skaičius ir pats laipsnis a^r irgi teigiamas skaičius* (laipsnio rodiklis r gali būti bet koks racionalusis skaičius).

Taigi išnagrinėjome, kokius turime padaryti apribojimus, norėdami apibrėžti laipsnį su racionaliuoju rodikliu. Bet kaip gauti patį laipsnio apibrėžimą? Nesunku, remiantis *b*) savybe, suvokti, koks turi būti šis apibrėžimas. Tarkime, kad r – bet koks racionalusis skaičius; jį galima išreikšti trupmena $r = \frac{m}{n}$; čia m – sveikasis skaičius, o n – natūrinis skaičius. Taigi su bet kokiu teigiamuoju a turime

$$(a^r)^n = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m.$$

Kadangi abu skaičiai a^r, a^m yra teigiami, tai iš lygybės $(a^r)^n = a^m$ išplaukia (pagal n-tojo laipsnio aritmetinės šaknies apibrėžimą), kad $a^r = \sqrt[n]{a^m}$.

Tokią išvadą padarėme, remdamiesi tik b) savybe. Vadinasi, laipsnį a^r su racionaliuoju rodikliu reikia apibrėžti formule

$$a^r = \sqrt[n]{a^m} \tag{5}$$

$\left(\text{čia } r = \frac{m}{n}\text{, be to, } m \text{ – sveikasis, } n \text{ – natūrinis skaičius}\right)$.

Taigi, norėdami, kad laipsnis su racionaliuoju rodikliu turėtų b) savybę, be (5) formulės neapsieisime. Todėl (5) formulę laikome laipsnio su racionaliuoju rodikliu apibrėžimu. Dar kartą akcentuojame, kad laipsnio pagrindas a visada laikomas teigiamu.

Tačiau (5) apibrėžimas turi vieną trūkumą. Paimkime, pavyzdžiui, racionalųjį skaičių $r = \frac{1}{2}$. Šį racionalųjį skaičių galima įvairiausiais būdais išreikšti trupmena $\frac{m}{n}$. Pavyzdžiui, galime rašyti $r = \frac{3}{6}$, $r = \frac{5}{10}$ ir t.t. Todėl laipsniui a^r $\left(\text{t.y. } a^{\frac{1}{2}}\right)$, taikant (5) formulę, galima suteikti be galo daug išraiškų:

$$a^r = a^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{a^3}, \quad a^r = a^{\frac{5}{10}} = \sqrt[10]{a^5} \text{ ir t.t.}$$

Laimė, kad šis (5) apibrėžimo trūkumas iš tiesų yra neesminis. Tiksliau tariant, *kai racionalusis skaičius r dviem būdais išreikštas trupmena* $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ *(čia m, p – sveikieji,* o *n, q – natūriniai skaičiai), tai yra teisinga lygybė* $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$. Ši lygybė (kurią dabar įrodysime) rodo, kad (5) apibrėžimas yra matematiškai korektiškas, t.y. (5) lygybė nepriklausomai nuo to, kaip racionalusis skaičius r išreikštas trupmena $\frac{m}{n}$, apibrėžia vieną ir tą patį skaičių.

Taigi įrodysime lygybę $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$. Kadangi $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, tai $mq = np$. Skaičių $\sqrt[n]{a^m}$ pažymėsime b, t.y. $b = \sqrt[n]{a^m}$. Skaičius b pagal apibrėžimą yra teigiamas; skaičius a (laipsnio pagrindas) irgi teigiamas. Lygybė $b = \sqrt[n]{a^m}$ reiškia pagal šaknies apibrėžimą, kad $b^n = a^m$. Pakėlę abi šios lygybės puses laipsniu q, gausime $(b^n)^q = (a^m)^q$, arba $b^{nq} = a^{mq}$. Bet $mq = np$, todėl $b^{nq} = a^{np}$. Šią lygybę, kai laipsnio rodikliai yra sveikieji, remiantis b) savybe, galima parašyti taip: $(b^q)^n = (a^p)^n$. Kadangi abu skaičiai b^q ir a^p yra teigiamieji, tai iš pastarosios lygybės išplaukia, kad $b^q = a^p$ (nes funkcija x^n, kai $x > 0$, yra monotoninė). Pagaliau, kadangi $b > 0$, tai lygybei $b^q = a^p$ galima suteikti išraišką $b = \sqrt[q]{a^p}$. Taigi $b = \sqrt[n]{a^m}$, $b = \sqrt[q]{a^p}$. Iš čia turime $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$.

Kartu įrodėme (5) apibrėžimo korektiškumą. Taigi (5) sąryšį laikome laipsnio su racionaliuoju rodikliu *apibrėžimu*, be to, visada tariame,

kad laipsnio pagrindas a yra teigiamas. Dabar jau galima paklausti, ar, taip apibrėžus laipsnį, galioja anksčiau nagrinėtos savybės (p. 189). Pasirodo, kad visos savybės, išskyrus k), galioja; be to, g) savybė pasidaro triviali. Kitaip tariant, laipsniams su racionaliaisiais rodikliais, kai $a>0$, $b>0$, r ir s – bet kokie racionalieji skaičiai, yra būdingos šios savybės.

I. Savybės, išreiškiamos lygybėmis:

A) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$;

B) $(a^r)^s = a^{rs}$;

C) $(ab)^r = a^r b^r$;

D) $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$;

E) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$;

F) $1^r = 1$, $a^0 = 1$.

Prie šių savybių dar prijungsime savybę, kuri išplaukia iš toliau formuluojamų I), J) savybių ir yra dažnai taikoma, sprendžiant uždavinius:

G) *kai* $a^r = a^s$ ir $a \neq 1$, *tai* $r = s$.

II. Savybės, išreiškiamos nelygybėmis:

H) *jeigu* $a<b$, *tai* $a^r<b^r$, *kai* $r>0$, ir $a^r>b^r$, *kai* $r<0$;

I) *jeigu* $a>1$, *tai* $a^r>a^s$, *kai* $r>s$;

J) *jeigu* $0<a<1$, *tai* $a^r<a^s$, *kai* $r>s$.

Pavyzdžiui, įrodysime A) savybę. Tarkime, kad $r = \dfrac{m}{n}$, $s = \dfrac{p}{q}$; čia m, p – sveikieji, o n, q – natūriniai skaičiai. Skaičių a^r pažymėsime raide b, o skaičių a^s – raide c, t.y. $b = a^r = \sqrt[n]{a^m}$, $c = a^s = \sqrt[q]{a^p}$. Abu skaičiai b, c yra teigiamieji. Tada pagal šaknies apibrėžimą $b^n = a^m$, $c^q = a^p$. Pirmąją šių lygybių pakėlę laipsniu q, o antrąją – laipsniu n, gauname $(b^n)^q = (a^m)^q$, $(c^q)^n = (a^p)^n$, arba $b^{nq} = a^{mq}$, $c^{nq} = a^{np}$. Sudauginę pastarąsias dvi lygybes, turime $b^{nq} \cdot c^{nq} = a^{mq} \cdot a^{np}$, iš kurios, pritaikę c) ir a) savybes (šias savybes, kaip žinome, turi laipsniai su sveikaisiais rodikliais), gauname $(bc)^{nq} = a^{mq+nq}$. Iš šios lygybės pagal aritmetinės šaknies apibrėžimą išplaukia, kad $bc = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$. Prisiminę laipsnio su racionaliuoju rodikliu (5) apibrėžimą, randame, kad

$$bc = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}.$$

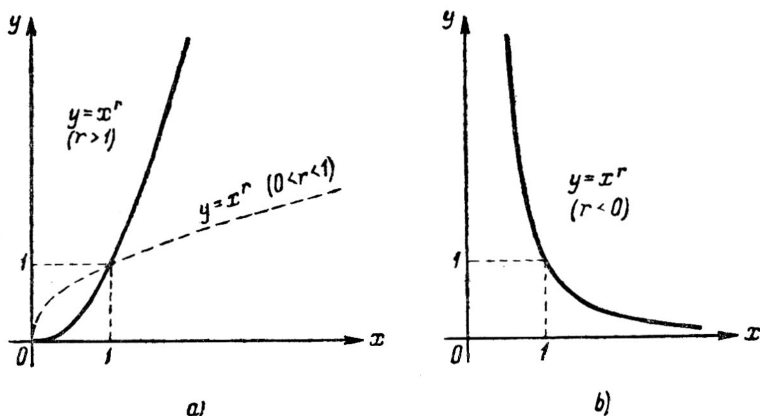
Pagaliau, prisiminę, kad $b = a^r$, $c = a^s$, gauname reikalingą lygybę $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

Baigdami šį paragrafą, išnagrinėsime laipsninės funkcijos

$$y = x^r \ (x>0) \qquad (6)$$

savybes, kai laipsnio rodiklis r yra bet koks racionalusis skaičius. Ši funkcija pagal laipsnio apibrėžimą (žr. (5) formulę) yra apibrėžta, kai $x>0$, t.y. jos apibrėžimo sritis yra spindulys $]0; \infty[$. Ši funkcija turi tokią savybę:

K) *Kai* $r \neq 0$, (6) *funkcija įgyja visas galimas teigiamas reikšmes. Ji yra didėjanti, kai* $r>0$, *ir mažėjanti, kai* $r<0$ (108 pav.).



108 pav.

Sakykime, kad y_0 – bet koks teigiamas skaičius. Parodysime, kad yra taškas x_0, kuriame (6) funkcijos reikšmė lygi y_0, t.y. $x_0^r = y_0$, kai $x_0>0$. Turime $y_0 = y_0^1 = y_0^{\frac{1}{r}\cdot r} = \left(y_0^{\frac{1}{r}}\right)^r$ (primename, kad $r \neq 0$). Lygybė $\left(y_0^{\frac{1}{r}}\right)^r = y_0$ rodo, kad, parinkę x_0 reikšmę $x_0 = y_0^{\frac{1}{r}}$, turime $x_0^r = y_0$. Taigi ši x_0 reikšmė – ieškomoji.

Tuo pačiu įrodėme, kad (6) funkcija įgyja visas galimas teigiamas reikšmes. Iš H) savybės tiesiogiai išplaukia, kad ši funkcija, kai $r>0$, yra didėjanti, o kai $r<0$, yra mažėjanti.

§ 6. Laipsnis su realiuoju rodikliu

Laipsnio sąvokos apibendrinimo baigiamasis etapas – šios sąvokos praplėtimas bet kokių realiųjų rodiklių atvejui. Kaip ir nagrinėdami laipsnius su racionaliaisiais rodikliais, apsiribosime tik atveju, kai laipsnio pagrindas yra *teigiamas*. Laipsnį su realiuoju rodikliu turime apibrėžti taip, kad šis laipsnis, kai rodiklis yra racionalusis, turėtų tą pačią prasmę, kaip ir § 5, ir, be to, taip, kad laipsniams su realiaisiais rodikliais galiotų visos savybės, suformuluotos ankstesniame paragrafe. Šį kartą, norėdami suvokti, kaip vertėtų apibrėžti laipsnį su realiuoju rodikliu, pasinaudosime F), I), J) savybėmis.

Tarkime, kad α – bet koks realusis skaičius. Išnagrinėsime *nemažėjančią* racionaliųjų skaičių seką $r_1, r_2, r_3, \ldots$, kurios riba lygi α. Taigi

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \ldots \leqslant \alpha, \tag{7}$$

be to, skirtumas $\alpha - r_k$, didėjant k, neaprėžtai mažėja. Pavyzdžiui, sekos $r_1, r_2, r_3, \ldots$ nariais galima parinkti vis tikslesnius skaičiaus α dešimtainius

artinius su trūkumu (žr. p. 41). Iš pradžių tarkime, kad $a>1$. Norėdami, kad laipsniai su realiaisiais rodikliais turėtų I) savybę, pagal (7) nelygybes turime parašyti

$$a^{r_1} \leqslant a^{r_2} \leqslant \ldots \leqslant a^{\alpha}.$$

Taigi skaičių seka $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ yra nemažėjanti. Kadangi skaičiai $r_1, r_2, r_3, \ldots$ vis labiau artėja prie α, tai natūralu manyti, kad skaičiai $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ vis labiau artės prie skaičiaus a^{α}, t.y., kad a^{α} yra sekos $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ *riba*. (Galima būtų įrodyti, kad I) savybė yra būtina sąlyga, kad ši seka turėtų ribą a^{α}. Tačiau čia to nedarysime, nes dabar nagrinėjame orientuojančius samprotavimus, kurie padės surasti laipsnio su realiuoju rodikliu apibrėžimą.) Kai $a<1$, iš (7) nelygybių pagal J) savybę išplaukia, kad

$$a^{r_1} \geqslant a^{r_2} \geqslant a^{r_3} \geqslant \ldots \geqslant a^{\alpha}.$$

Taigi seka $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ yra nedidėjanti, ir todėl vėl natūralu manyti, kad šios sekos riba lygi a^{α}. Pagaliau, kai $a=1$, kiekvienas skaičius $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ ir a^{α} yra lygus 1 (F) savybė). Šiuo atveju skaičius a^{α} irgi yra sekos $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ riba. Gavus tokius rezultatus, susikristalizuoja mintis, kad bet kuriuo atveju ($a>1$, $a<1$, $a=1$) laipsnį a^{α} galima *apibrėžti* kaip sekos $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ ribą. Tokio apibrėžimo ir laikysimės šioje knygoje.

Taigi tarkime, kad α – bet koks realusis skaičius ir $r_1, r_2, r_3, \ldots$ – nemažėjanti (arba nedidėjanti) racionaliųjų skaičių seka, turinti ribą α (t.y. $\lim\limits_{n\to\infty} r_n=\alpha$). Tada pagal apibrėžimą

$$a^{\alpha}=\lim_{n\to\infty} a^{r_n}. \tag{8}$$

Norint įsitikinti, kad šis apibrėžimas yra korektiškas matematiškai, reikia patikrinti du faktus. Pirma, įsitikinti, kad nemažėjanti (arba nedidėjanti) skaičių seka $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \ldots$ yra a p r ė ž t a ir, vadinasi, galima kalbėti apie jos ribą. Antra, įsitikinti, kad (8) riba nesikeičia, kai seka $r_1, r_2, r_3, \ldots$ pakeičiama k i t a nemažėjančia (arba nedidėjančia) racionaliųjų skaičių seka, kurios riba irgi yra skaičius α. Nors abu faktai įrodomi palyginti nesunkiai, bet jų įrodymo čia nepateiksime, nes mokykliniame kurse šie faktai neįrodomi (ir paprastai netgi neformuluojami). Tačiau manome, kad šiuos faktus aptarti svarbu, nes stojantieji į aukštąsias mokyklas (ypač į tas, kuriose matematika plačiau dėstoma) turi aiškiai suvokti, kokiais faktais pagrįstas laipsnio sąvokos apibrėžimas, kurie šių faktų įrodomi mokykliniame kurse, o kurie – neįrodomi.

Taigi (8) formulė *apibrėžia* laipsnį su realiuoju rodikliu. Pasirodo, kad, taip apibrėžus, visos laipsnių savybės, suformuluotos racionaliųjų rodiklių atvejui ir išnagrinėtos ankstesniame paragrafe, galioja ir laipsniams su realiaisiais rodikliais. Kitaip tariant, visos A) –J) savybės (p. 194), kai $a>0$, $b>0$ ir r, s – bet kokie realieji skaičiai, yra teisingos. Savybė K) (p. 195) irgi teisinga, t.y. funkcija

$$y=x^{\alpha},$$

kurios rodiklis α – bet koks realusis skaičius, yra apibrėžta spindulyje $]0, \infty[$ ir, kai $\alpha \neq 0$, įgyja visas galimas teigiamas reikšmes. Ji didėja, kai $\alpha > 0$, ir mažėja, kai $\alpha < 0$. Būtent, kai $a > 0$, su bet kokiu realiuoju α yra teisinga nelygybė $a^{\alpha} > 0$. Šių savybių čia neįrodysime.

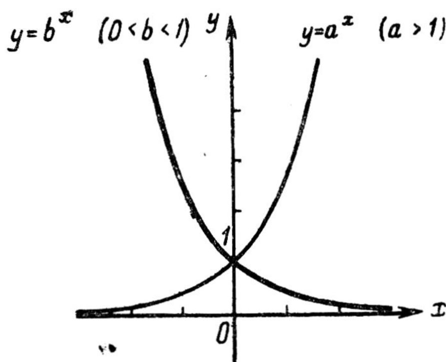
§ 7. Rodiklinė ir logaritminė funkcijos

Funkciją $y = a^x$ vadiname *rodikline funkcija.* Sutarta, kad skaičius a (pagrindas) visada teigiamas. Rodiklinė funkcija $y = a^x$ pagal laipsnio sąvokos apibrėžimą (§ 6) yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje $-\infty < x < \infty$. Iš to, kas pasakyta 6 paragrafe, tiesiogiai išplaukia tokios rodiklinės funkcijos savybės (žr. I), J) savybes).

Rodiklinė funkcija $y = a^x$ įgyja tik teigiamas reikšmes. Kai $a > 1$, ji yra didėjanti, kai $a < 1$, – mažėjanti, (109 pav.). Kai $a = 1$, tai $a^x \equiv 1$.

Yra dar viena svarbi rodiklinės funkcijos savybė:

L) *Kai $a \neq 1$, rodiklinė funkcija $y = a^x$ įgyja visas galimas teigiamas reikšmes*, t.y. šios funkcijos reikšmių aibė yra spindulys $]0; \infty[$.



109 pav.

Šios savybės įrodymas pagrįstas maždaug tomis pačiomis idėjomis, kaip ir K) savybės įrodymas (žr. p. 195). Tačiau šis įrodymas peržengia vidurinės mokyklos matematikos ribas, todėl jo čia nepateiksime.

Taigi, koks bebūtų teigiamas skaičius a, nelygus vienetui, funkcija $y = a^x$ yra apibrėžta visoje skaičių tiesėje $-\infty < x < \infty$, monotoninė (didėja, kai $a > 1$, ir mažėja, kai $a < 1$), o jos reikšmės užpildo begalinį intervalą $0 < y < \infty$. Vadinasi, galima nagrinėti funkciją, atvirkštinę jai (žr. VII sk. § 5), kuri žymima simboliu $y = \log_a x$ ir vadinama *logaritmine funkcija.* Dar kartą pabrėžiame, kad funkcija $y = \log_a x$ yra apibrėžta tik tada, kai $a > 0$, $a \neq 1$.

Iš atvirkštinės funkcijos savybių, kurias įrodėme VII skyriaus 5 paragrafe, išplaukia šios logaritminės funkcijos savybės.

1. Funkcija $y = \log_a x$ (pagal C savybę, p. 160) yra apibrėžta begaliniame intervale $0 < x < \infty$ (ir tik jame), o jos reikšmių aibė yra visa skaičių tiesė $-\infty < y < \infty$.

2. Funkcija $y = \log_a x$, kai $a > 1$, yra didėjanti, o kai $0 < a < 1$, – mažėjanti (B savybė, p. 160).

3. Funkcijos $y = \log_a x$ grafikas yra simetriškas funkcijos $y = a^x$ grafikui pirmojo ir trečiojo ketvirčių pusiaukampinės atžvilgiu (D savybė, p. 160). Įvairių funkcijų $y = \log_a x$ grafikai pavaizduoti 110 ir 111 pav.

4. Sąryšis $x_0 = \log_a y_0$ reiškia (pagal A savybę, p. 160), kad $y_0 > 0$ ir $y_0 = a^{x_0}$:

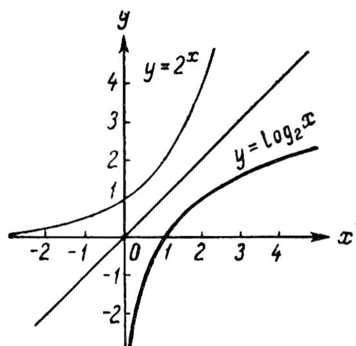
$$\{x_0 = \log_a y_0\} \Leftrightarrow \{y_0 > 0\} \wedge \{y_0 = a^{x_0}\}. \qquad (9)$$

5. Su bet kokiu $a > 0$, $a \neq 1$ (pagal E savybę, p. 160) yra teisingos lygybės

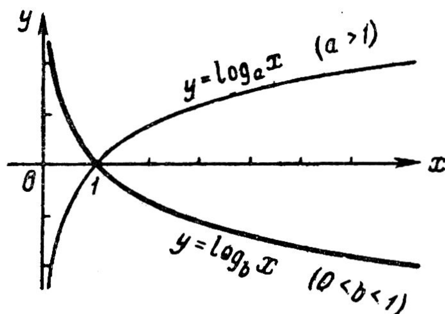
$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0), \qquad (10)$$

$$\log_a a^x = x. \qquad (11)$$

Šios savybės, kartu ir apibrėžtos (9), (10), (11) formulėmis, yra pagrindinės logaritmų savybės ((9) sąryšis vidurinės mokyklos matematikos kurse paprastai laikomas logaritmo apibrėžimu). Iš šių sąryšių išplaukia kitos logaritmų savybės, kurias nagrinėsime aštuntajame paragrafe.



110 pav.



111 pav.

4 pavyzdys. Apskaičiuokite $\log_3 9$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$, $\log_4 2$.

Sprendimas. Reiškinį $\log_3 9$ pažymėsime x. Lygybė $x = \log_3 9$ pagal 4 savybę yra ekvivalenti lygybei $3^x = 9$, kuri yra teisinga, kai $x = 2$ ir tik su šia x reikšme, nes funkcija 3^x yra monotoninė. Vadinasi, $\log_3 9 = 2$ (skaitome: devynių logaritmas, kurio pagrindas trys, yra lygus dviem).

Analogiškai apskaičiuojame

$$\log_{\frac{1}{2}} 4 = -2, \text{ nes } \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4;$$

$$\log_4 2 = \frac{1}{2}, \text{ nes } 4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

5 pavyzdys. Įrodykite, kad su bet kokiu $a > 0$, $a \neq 1$ yra teisingos lygybės

$$\log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0.$$

Sprendimas. Šios lygybės gaunamos iš (11) lygybės, kai $x = 1$ ir $x = 0$, nes su bet kokiu $a > 0$ turime $a^0 = 1$ (žr. (3) formulę, p. 189).

P a s t a b a. Iš lygybės $\log_a 1=0$ ir funkcijos $y=\log_a x$ monotoniškumo (žr. 2 savybę, p. 197) išplaukia tokios nelygybės: jeigu $a>1$, tai $\log_a x>0$, kai $x>1$, ir $\log_a x<0$, kai $0<x<1$; jeigu $a<1$, tai $\log_a x<0$, kai $x>1$, ir $\log_a x>0$, kai $0<x<1$ (žr. 110 ir 111 pav.).

Šias nelygybes dažnai taikome, spręsdami uždavinius. Jas lengva įsiminti štai tokiu būdu: kai skaičių tiesės taškai a ir x yra vienoje pusėje nuo vieneto, tai $\log_a x>0$, o kai a ir x yra skirtingose pusėse nuo vieneto, tai $\log_a x<0$.

§ 8. Logaritmų savybės

1°. *Dviejų teigiamųjų skaičių sandaugos logaritmas duotuoju pagrindu yra lygus šių skaičių logaritmų tuo pačiu pagrindu sumai, t.y. su bet kokiais skaičiais* $a>0$, $a\neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$ yra teisinga lygybė

$$\log_a (x_1 x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2. \tag{12}$$

Į r o d y m a s. Logaritmus $\log_a x_1$ ir $\log_a x_2$ pažymėsime y_1 ir y_2:

$$\log_a x_1=y_1, \quad \log_a x_2=y_2. \tag{13}$$

Tada pagal 4 savybę (p. 198)

$$x_1=a^{y_1}, \quad x_2=a^{y_2};$$

iš čia gauname (pagal A savybę, p. 194)

$$x_1 x_2=a^{y_1}\cdot a^{y_2}=a^{y_1+y_2}.$$

Dar kartą pritaikę 4 savybę (p. 198), randame

$$\log_a (x_1 x_2)=y_1+y_2. \tag{14}$$

Iš (13) ir (14) formulių išplaukia (12) lygybė.

2°. *Dviejų teigiamųjų skaičių dalmens logaritmas duotuoju pagrindu yra lygus dalinio ir daliklio logaritmų tuo pačiu pagrindu skirtumui, t.y. su bet kokiais skaičiais* $a>0$, $a\neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$ yra teisinga lygybė

$$\log_a \frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2. \tag{15}$$

Ši savybė įrodoma taip pat, kaip ir ankstesnė.

3°. *Bet kokiems skaičiams* $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$ *ir bet kokiam realiajam skaičiui* α *galioja lygybė*

$$\log_a x^\alpha=\alpha \log_a x. \tag{16}$$

Į r o d y m a s. Logaritmą $\log_a x$ pažymėsime y:

$$y=\log_a x. \tag{17}$$

Tada pagal 4 savybę (p. 198) turėsime

$$x=a^y.$$

Pakėlę abi šios lygybės puses laipsniu α, pagal B savybę (p. 194) gausime

$$x^{\alpha}=(a^{y})^{\alpha}=a^{\alpha y}.$$

Dar kartą pritaikę 4 savybę (p. 198), randame

$$\log_a x^{\alpha}=\alpha y. \qquad (18)$$

Iš (17) ir (18) formulių išplaukia (16) lygybė.

4°. *Bet kokiems skaičiams* $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $x>0$ *galioja lygybė*

$$\log_a x=\frac{1}{\log_b a}\cdot \log_b x. \qquad (19)$$

Įrodymas. Logaritmą $\log_a x$ pažymėsime y:

$$y=\log_a x. \qquad (20)$$

(20 lygybė pagal 4 savybę (p. 198) yra ekvivalenti lygybei

$$a^{y}=x,$$

iš kurios gauname

$$\log_b a^{y}=\log_b x.$$

Remiantis 3° savybe, šią lygybę galima parašyti taip:

$$y\log_b a=\log_b x. \qquad (21)$$

Iš (20) ir (21) formulių išplaukia (19) lygybė.

Pastaba. Pagal (19) formulę, kai žinomi skaičių logaritmai duotuoju pagrindu b, galima apskaičiuoti šių skaičių logaritmus bet kokiu pagrindu a. Skaičius $\frac{1}{\log_b a}$, kuris yra (19) formulėje, vadinamas logaritmų, kurių pagrindas yra a, *keitimo* logaritmais, kurių pagrindas yra b, moduliu. Kai $b=10$, (19) formulė įgyja išraišką

$$\log_a x=\frac{\lg x}{\lg a}.$$

Pagal šią formulę, naudojantis dešimtainių logaritmų lentelėmis, galima apskaičiuoti skaičių logaritmus, kurių pagrindas yra bet koks.

Toliau formuluosime kitas logaritmų savybes.

5°. *Bet kokiems skaičiams* $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $\alpha\neq 0$ *galioja lygybė*

$$\log_{a^{\alpha}} x=\frac{1}{\alpha}\log_a x. \qquad (22)$$

6°. *Bet kokiems skaičiams* $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$ *galioja lygybė*

$$\log_a b\cdot \log_b a=1. \qquad (23)$$

7°. *Jeigu pagrindą ir logaritmuojamąjį skaičių pakelsime tuo pačiu laipsniu, nelygiu nuliui, logaritmas nepasikeis, t.y. bet kokiems skaičiams* $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $\alpha\neq 0$ *galioja lygybė*

$$\log_{a^{\alpha}} x^{\alpha}=\log_a x. \qquad (24)$$

$5°-7°$ savybės išplaukia iš $1°-4°$ savybių. Jų įrodymas nesudėtingas, todėl siūlome tai padaryti skaitytojui.

6 pavyzdys. Įrodykite, kad su bet kokiais skaičiais $a>0$, $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ ir bet kokiu realiuoju skaičiumi β yra teisinga lygybė

$$\log_{a^\alpha}(a^\beta)=\frac{\beta}{\alpha}. \qquad (25)$$

Įrodymas. Logaritmą $\log_a a^\alpha (a^\beta)$ pažymėsime y:

$$y=\log_{a^\alpha}(a^\beta). \qquad (26)$$

(26) lygybė pagal 4 savybę (p. 198) yra ekvivalenti lygybei

$$(a^\alpha)^y=a^\beta. \qquad (27)$$

Iš (27) lygybės, pritaikę laipsnio savybes, gauname

$$a^{\alpha y}=a^\beta, \quad \alpha y=\beta, \quad y=\frac{\beta}{\alpha}.$$

Pagaliau, įrašę gautąją y reikšmę į (26) formulę, gauname (25) formulę.

Įsidėmėtina, kad (25) formulę galima išvesti ir kitu būdu, pavyzdžiui, nuosekliai taikant (16), (22) formules bei 5 pavyzdžio rezultatą.

Baigdami pateikiame visas veiksmų su logaritmais formules, kurias išvedėme šiame paragrafe:

$$\log_a(x_1 x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2, \qquad (12)$$

$$\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2, \qquad (15)$$

$$\log_a x^\alpha=\alpha\log_a x, \qquad (16)$$

$$\log_a x=\frac{1}{\log_b a}\cdot\log_b x, \qquad (19)$$

$$\log_{a^\alpha} x=\frac{1}{\alpha}\log_a x, \qquad (22)$$

$$\log_a b\ \log_b a=1, \qquad (23)$$

$$\log_{a^\alpha} x^\alpha=\log_a x. \qquad (24)$$

Dar kartą akcentuojame, kad visos šios lygybės yra teisingos tada ir tik tada, kai visi reiškiniai, esantys jose, turi prasmę, t.y. 1) logaritmo pagrindas turi būti teigiamas skaičius, nelygus vienetui, 2) reiškinys, kurį logaritmuojame, turi būti teigiamas skaičius.

VIII skyriaus uždaviniai

8.1. Apskaičiuokite reiškinių reikšmes:

1. $\log_2 4$. 4. $\log_5\frac{1}{25}$.

2. $\log_{\frac{1}{4}} 2$.   5. $\log_{27} 9$.

3. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$.   6. $\log_8 16$.

8.2. Apskaičiuokite reiškinių reikšmes (tarę, kad $a>0$, $a \neq 1$):

1. $\log_{a^3} a$.   3. $\log_{\frac{1}{a}} a^7$.

2. $\log_{a^4} a^{\frac{1}{3}}$.   4. $\log_{\sqrt{a}} \sqrt[3]{a}$.

8.3. Išspręskite lygtis:

1. $\log_{0,1} x = -2$.   3. $\log_x 7 = -1$.

2. $\log_{81} x = \frac{1}{2}$.   4. $\log_{\sqrt{x}} 8 = 3$.

8.4. Apskaičiuokite reiškinių reikšmes:

1. $4^{\log_2 3}$.   3. $9^{\log_{\sqrt{3}} 2}$.

2. $27^{\log_9 2}$.   4. $4^{\log_8 27}$.

8.5. Apskaičiuokite reiškinių reikšmes (tarę, kad $a>0$, $a \neq 1$):

1. $a^{\log_a 2}$.   3. $(2a)^{\log_{\sqrt{a}} 1}$.

2. $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.   4. $a^{4\log_{a^2} 5}$.

8.6. Išsiaiškinkite, kurie šių logaritmų yra teigiami, o kurie – neigiami:

1. $\log_2 5$.   3. $\log_{0,2} 0,8$.

2. $\log_5 2$.   4. $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7}$.

8.7. Sužinokite, kuris duotųjų skaičių yra didesnis už kitą:

1. $\log_3 4$ ar $\log_4 \frac{1}{3}$.

2. $\log_{0,1} \sqrt{2}$ ar $\log_{0,2} 0,34$.

3. $\log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{5}$ ar $\log_{\frac{5}{2}} \frac{3}{4}$.

4. $2^{\log_5 3}$ ar $3^{\log_5 \frac{1}{2}}$.

8.8. Įrodykite, kad bet kokiems skaičiams $a>0$, $a \neq 1$, $x_1<0$, $x_2<0$ galioja lygybės:

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a |x_1| + \log_a |x_2|,$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a |x_1| - \log_a |x_2|.$$

8.9. Įrodykite, kad bet kokiems skaičiams $a>0$, $a\neq 1$, $x_1>0$, $x_2>0$, ..., $x_k>0$ galioja lygybė

$$\log_a(x_1 x_2 \ldots x_k)=\log_a x_1+\log_a x_2+\ldots+\log_a x_k.$$

8.10. Įrodykite, kad su bet kokiais skaičiais $a>0$, $a\neq 1$, $x\neq 0$ ir bet kokiu sveikuoju lyginiu skaičiumi n yra teisinga lygybė

$$\log_a x^n=n\log_a|x|.$$

8.11. Apskaičiuokite $\log_{49} 32$, kai $\log_2 14=a$.

8.12. Apskaičiuokite $\log_{15} 49$, kai $\log_7 9=a$ ir $\log_7 45=b$.

Tarę, kad duotieji reiškiniai turi prasmę, įrodykite šias lygybes (**8.13–8.17**):

8.13. $\log_{ax}(bx)=\dfrac{\log_a b+\log_a x}{1+\log_a x}$.

8.14. $\dfrac{\log_a x}{\log_b x}=\log_a b$. **8.15.** $\dfrac{\log_a x_1}{\log_a x_2}=\log_{x_2} x_1$.

8.16. $\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_{a^2} x}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{a^k} x}=\dfrac{k(k+1)}{2\log_a x}$.

8.17. $\log_{a_1 a_2 \ldots a_k} x=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_{a_1} x}+\dfrac{1}{\log_{a_2} x}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{a_k} x}}$.

Nubraižykite funkcijų grafikus (**8.18–8.32**):

8.18. $y=2^{|x|}$.

8.19. $y=2^{-|x|}$.

8.20. $y=|\log_2 x|$.

8.21. $y=|x^3|+2^{-x}$.

8.22. $y=2^x-2x$.

8.23. $y=2^{\log_2 x}$.

8.24. $y=2\log_2 x$.

8.25. $y=\log_2 x^2$.

8.26. $y=|\log_2(x-1)|$.

8.27. $y=\log_2|x-1|$.

8.28. $y=\left|\log_2|x-1|\right|$.

8.29. $y=2^{\cos x}$.

8.30. $y=2^{\operatorname{tg} x}$.

8.31. $y=\lg\sin x$.

8.32. $y=\lg\operatorname{tg} x$.

IX SKYRIUS

LYGTYS

§ 1. Lygybė, tapatybė, lygtis

Lygybės ženklas matematikoje vartojamas labai dažnai, o prasmė, kuri jam suteikiama, toli gražu ne visada yra ta pati. Pavyzdžiui, lygybės ženklą dažnai rašome tarp dviejų skaičių:

$$\frac{651}{257}=2\,\frac{137}{257}, \tag{1}$$

$$1236=2^2\cdot 3\cdot 103, \tag{2}$$

$$(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}, \tag{3}$$

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^5=10. \tag{4}$$

Kiekvienas toks užrašas yra teiginys, kuris gali būti teisingas arba klaidingas. Iš pateiktųjų teiginių pirmieji trys yra teisingi, o ketvirtasis – klaidingas.

Norėdami įsitikinti, ar toks teiginys teisingas (ar klaidingas), turime atlikti vienokius ar kitokius veiksmus: sudėti trupmenas, išskaidyti daugiklamaisiais, dviejų skaičių sumą pakelti kvadratu ir kt. Tačiau visais šiais atvejais lygybės ženklo *prasmė* yra vienoda: tokio teiginio teisingumas reiškia, kad ir kairėje, ir dešinėje lygybės pusėje yra *vienas ir tas pats* skaičius (gal tik kitaip parašytas).

Tokius teiginius vadiname *skaitinėmis lygybėmis.* Kai skaitinė lygybė yra teisingas teiginys, tai trumpai sakome: „tai – teisinga lygybė“. Taip, (1) lygybė yra teisinga. Kai skaitinė lygybė yra klaidingas teiginys, tai trumpai sakome: „tai – klaidinga lygybė“. Taip, (4) lygybė yra klaidinga.

Ženklui = suteikiame kitą prasmę, kai nagrinėjame *funkcijų lygybę.* Priminsime, kad dvi funkcijas $f(x)$ ir $g(x)$ vadiname lygiomis (t.y. sutampančiomis), kai, pirma, šių funkcijų apibrėžimo sritys sutampa ir, antra, su bet kokia x_0 reikšme iš bendros šių funkcijų apibrėžimo srities funkcijų reikšmės taške x_0 sutampa, t.y. skaitinė lygybė $f(x_0)=g(x_0)$ yra teisinga. Funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ lygybė paprastai išreiškiama užrašu $f(x)=g(x)$. Pavyzdžiui, parašę

$$(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1,$$

tvirtiname, kad į kairę ir į dešinę nuo ženklo = yra lygios funkcijos (ir kairėje, ir dešinėje pusėje yra ta pati funkcija, gal tik skirtingai parašyta).

Rašydami dviejų funkcijų lygybę (t.y. sutapimą), dažnai vietoj ženklo = vartojame ženklą ≡, kuris vadinamas *tapačios lygybės ženklu*. Užrašas $f(x) \equiv g(x)$ rodo, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ sutampa. Dviejų funkcijų lygybės užrašas (t.y. sąryšis $f(x)=g(x)$ arba $f(x) \equiv g(x)$) taip pat vadinamas *tapatybe*. Dar kartą pabrėžiame: sakydami, kad $f(x)=g(x)$ yra tapatybė, turime galvoje, kad funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sritys sutampa ir, be to, su bet kokia x_0 reikšme iš šios apibrėžimo srities yra teisinga skaitinė lygybė $f(x_0)=g(x_0)$. Štai keli tapatybių pavyzdžiai:

$$(x+1)^2=x^2+2x+1,$$

$$\log_2 2^x=x,$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{x-1},$$

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x.$$

Kartais, nagrinėdami tapatybes, turime funkcijų apibrėžimo sritis siaurinti. Būtent, sakysime, kad aibėje M *lygybė* $f(x)=g(x)$ *yra tapatybė*, kai, pirma, aibė M priklauso kiekvienos funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričiai ir, antra, su kiekviena x_0 reikšme iš aibės M yra teisinga skaitinė lygybė $f(x_0)=g(x_0)$. Tokiu atveju rašome:

$$f(x) \equiv g(x) \text{ aibėje } M,$$

arba

$$f(x)=g(x), \text{ kai } x \in M.$$

1 pavyzdys. Neneigiamųjų skaičių aibėje lygybė $\sqrt{x^2}=x$ yra tapatybė, t.y.

$$\sqrt{x^2} \equiv x, \quad \text{kai} \quad x \geqslant 0.$$

Nors abi funkcijos $\sqrt{x^2}$ ir x yra apibrėžtos visų realiųjų skaičių aibėje, tačiau jų reikšmės sutampa tik neneigiamųjų skaičių aibėje. Visų realiųjų skaičių aibėje sąryšis $\sqrt{x^2}=x$ nėra tapatybė.

2 pavyzdys. Panagrinėkime lygybę

$$\arcsin(\sin x)=\sqrt{x^2}.$$

Abi funkcijos (ir kairėje, ir dešinėje lygybės pusėje) yra apibrėžtos visų realiųjų skaičių aibėje. Tačiau ši lygybė bus tapatybė tik atkarpoje $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, t.y. $\arcsin(\sin x) \equiv \sqrt{x^2}$, kai $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Suprantama, rašydami tapatybę, argumentą galime žymėti ir kitomis raidėmis, pavyzdžiui raide z, raide a arba bet kokiu kitu simboliu, o nebūtinai raide x. Taip sąryšiai

$$(z+1)^2=z^2+2z+1,$$

$$(a-1)(a^2+a+1)=a^3-1$$

yra tapatybės visų realiųjų skaičių aibėje (arba netgi visų kompleksinių skaičių aibėje).

Taip pat galima nagrinėti tapatybes, kuriose funkcijos priklauso nuo dviejų arba daugiau argumentų. Be abejo, ir tokiu atveju reikia nurodyti tas argumento reikšmes, su kuriomis parašytoji lygybė yra tapatybė. Pavyzdžiui, lygybė

$$\log_2 a^b = b \log_2 a$$

yra tapatybė, kai $a>0$, b – bet koks realusis skaičius; lygybė

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

yra tapatybė, kai $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2}+n\pi$, $x+y \neq \frac{\pi}{2}+m\pi$; čia k, n, m – bet kokie sveikieji skaičiai, ir t.t.

Taigi aptarėme du ženklo = vartojimo algebroje būdus: rašant skaitines lygybes ir rašant tapatybes (pastaruoju atveju jis kartais keičiamas ženklu $\equiv$). Ženklas = vartojamas visiškai kita prasme, nagrinėjant lygtis. *Lygtis su vienu nežinomuoju* x bendru atveju turi išraišką

$$f(x)=g(x); \tag{5}$$

čia $f(x)$ ir $g(x)$ – bet kokios funkcijos. Kaip matome, lygties išraiška tokia pat, kaip ir tapatybės: dvi funkcijos, sujungtos lygybės ženklu. Tačiau, traktuodami (5) sąryšį kaip lygtį, į (5) lygybę žiūrime kaip į *teiginio* funkciją, iš kurios su vienomis x reikšmėmis gaunami teisingi, o su kitomis – klaidingi teiginiai. Be to, nagrinėdami lygtį, domimės, kaip surasti jos šaknis, t.y. tokias x reikšmes, su kuriomis teiginio funkcija tampa teisingu teiginiu. Kalbant detaliau, lygties *šaknimi* (arba sprendiniu) vadinamas bet koks skaičius, kurį įrašius vietoj nežinomojo abiejose lygties pusėse, gaunama teisinga skaitinė lygybė. Bet ką reiškia posakis „gaunama teisinga skaitinė lygybė“? Jis reiškia, pirma, kad su šiuo skaičiumi, įrašius jį lygtyje vietoj nežinomojo, galima atlikti visus ir kairėje, ir dešinėje lygties pusėje nurodytus veiksmus ir, antra, kad, atlikus šiuos veiksmus, ir kairėje, ir dešinėje pusėje gaunamas tas pats skaičius. Kitaip tariant, skaičius a yra (5) lygties *šaknis*, kai, pirma, šis skaičius priklauso ir funkcijos $f(x)$, ir funkcijos $g(x)$ apibrėžimo sričiai ir, antra, šių funkcijų reikšmės taške a sutampa, t.y. $f(a)=g(a)$.

Taigi, pasakę, kad (5) lygybę traktuojame kaip lygtį, turime galvoje, kad reikės surasti šios lygties šaknis, t.y. tas x reikšmes, su kuriomis (5) sąryšis tampa teisinga skaitine lygybe.

3 pavyzdys. Bet koks kompleksinis skaičius yra lygties $(x-1)^2=x^2-2x+1$ šaknis, nes lygybė $(x_0-1)^2=x_0^2-2x_0+1$ yra teisinga su bet kokiu kompleksiniu skaičiumi x_0.

4 pavyzdys. Jeigu lygtį $|x|=x$ nagrinėtume visų realiųjų skaičių aibėje, tai kiekvienas neneigiamas skaičius būtų jos šaknis (kitų šaknų nėra).

5 pavyzdys. Lygtis $\lg x=\lg(-x)$ neturi sprendinių, nes kairioji jos pusė yra apibrėžta tik su teigiamomis, o dešinioji – tik su neigiamomis x reikšmėmis, t.y. ir kairiosios, ir dešiniosios pusės apibrėžimo sritys neturi bendrų taškų.

6 pavyzdys. Lygtis $\cos x=2$ realiųjų skaičių aibėje neturi sprendinių, nes su bet kokia realiąja x_0 reikšme $|\cos x_0|\leqslant 1$.

7 pavyzdys. Lygtis $x^2=-1$ realiųjų skaičių aibėje šaknų neturi, o kompleksinių skaičių aibėje turi dvi šaknis $x_1=i$, $x_2=-i$.

Suradę tam tikrą aibę x reikšmių, kurių kiekviena yra lygties $f(x)=g(x)$ šaknis, ne visada galėsime tvirtinti, kad išsprendėme lygtį.

Išspręsti lygtį – reiškia surasti visus jos sprendinius (arba įrodyti, kad lygtis neturi sprendinių).

Įsidėmėtina, kad klausimas „lygybė $f(x)=g(x)$ yra tapatybė ar lygtis“ neturi prasmės. Tą pačią lygybę $f(x)=g(x)$ galima įvairiomis sąlygomis nagrinėti ir kaip tapatybę, ir kaip lygtį. Jeigu sakome, kad „$f(x)=g(x)$ yra tapatybė“, tai būtinai turime nurodyti aibę, kurioje ši lygybė yra tapatybė. Posakis „aibėje M lygybė $f(x)=g(x)$ yra tapatybė“ yra tam tikras tvirtinimas, tam tikras teiginys. Jeigu sakome, kad nagrinėjame lygtį $f(x)=g(x)$, tai, kalbant iš esmės, čia turime klausiamąjį sakinį: keliame klausimą, kokios yra šios lygties šaknys, t.y. su kokiomis x reikšmėmis iš sąryšio $f(x)=g(x)$ gauname teisingą skaitinę lygybę.

8 pavyzdys. Lygybę $\sqrt{x^2}=x$ galima traktuoti ir kaip tapatybę, ir kaip lygtį. Jeigu ketiname šią lygybę nagrinėti kaip tapatybę, tai pilna jos formuluotė turėtų būti tokia: lygybė $\sqrt{x^2}=x$ yra tapatybė, kai $x\geqslant 0$. Jeigu šią lygybę laikome lygtimi, vadinasi, nagrinėjame uždavinį: išspręsti lygtį $\sqrt{x^2}=x$, t.y. keliame klausimą, kokios yra šios lygties šaknys. Atsakymas būtų toks: visi neneigiamieji skaičiai ir tik jie yra lygties $\sqrt{x^2}=x$ šaknys.

9 pavyzdys. Nėra prasmės klausti, kuo reikia laikyti sąryšį $0\cdot x+5=5$ – tapatybe ar lygtimi. Galima sakyti, kad šis sąryšis visų realiųjų skaičių aibėje yra tapatybė. Antra vertus, šį sąryšį galima traktuoti ir kaip lygtį, kurios šaknys yra visi realieji skaičiai.

Pastaba. Aptarėme kelis ženklo = vartojimo atvejus. Be šių atvejų, matematikoje esama ir kitokių. Pavyzdžiui, posakis „išnagrinėsime funkciją $f(x)=x^3-3x^2+5x-7$“ dažnai vartojamas kaip apibrėžimas. Šį kartą ženklas = reikš, kad visuose samprotavimuose simboliu $f(x)$ žymėsime būtent šią funkciją. Yra ir kitokių ženklo = vartojimo matematikoje atvejų, bet jų čia nenagrinėsime.

§ 2. Šaknų netekimas ir pašalinių šaknų atsiradimas, pertvarkant lygtis. Ekvivalenčios lygtys. Lygtis, kuri yra duotosios lygties išvada. Lygčių disjunkcija

Spręsdami lygtis, paprastai jas pertvarkome, t.y. duotąją lygtį nuosekliai keičiame kitomis paprastesnėmis lygtimis, kol galiausiai gauname lygtį, kurią sugebame išspręsti. Sunku išvardyti pertvarkymus, kuriuos darome, spręsdami lygtis, nes jų labai daug. Dar sunkiau išvardyti visus patarimus, kokiu atveju yra tikslingi vienokie ar kitokie pertvarkymai. Bet yra viena neginčijama taisyklė, kurią visada reikia prisiminti: negalima daryti pertvarkymų, dėl kurių netenkama šaknų. Juk jau sakėme, kad išspręsti lygtį – reiškia rasti visas jos šaknis, todėl sprendžiant netekti šaknų yra neleistina.

Yra ir kitas pavojus, kuris tyko, sprendžiant lygtis, tiesa, gerokai menkesnis, negu netekti šaknų. Būtent, pertvarkant lygtį, gali atsirasti naujų šaknų, t.y. gali pasitaikyti toks atvejis, kad nauja lygtis, kuri gaunama, pertvarkius ankstesniąją, turės daugiau šaknų, negu pastaroji. Kitaip tariant, nauja lygtis, be ankstesnės lygties šaknų, turi dar pašalinių, nereikalingų šaknų. Todėl šaknis būtinai reikia patikrinti. Taigi, kai, spręsdami lygtį, bent vieną kartą ją pertvarkėme taip, kad galėtų atsirasti pašalinių šaknų, tai, baigus spręsti, būtinai reikia patikrinti, kurios gautųjų šaknų tinka pradinei lygčiai, o kurios ne. Aišku, kad pastarąsias iš šaknų turime išmesti. Šaknų galima netikrinti tik tuo atveju, kai nė vienas pertvarkymas neleidžia atsirasti pašalinėms šaknims.

Patikslinsime terminų „šaknų netekimas“ ir „pašalinė šaknis“ prasmę. Tarkime, kad $f(x)=g(x)$ – duotoji lygtis, o $f_1(x)=g_1(x)$ – tam tikra nauja lygtis, kurią nagrinėjame vietoj duotosios (pavyzdžiui, ji gauta, pertvarkius duotąją lygtį). Sakome, kad, lygtį $f(x)=g(x)$ pakeitę lygtimi $f_1(x)=g_1(x)$, *netenkame šaknų*, kai egzistuoja skaičius x_0 (nors bent vienas), kuris yra lygties $f(x)=g(x)$ šaknis, bet nėra lygties $f_1(x)=g_1(x)$ šaknis. Toliau skaičių x_1 vadiname *pašaline* šaknimi, atsiradusia, lygtį $f(x)=g(x)$ pakeitus lygtimi $f_1(x)=g_1(x)$, kai šis skaičius yra lygties $f_1(x)=g_1(x)$ šaknis, bet nėra duotosios lygties $f(x)=g(x)$ šaknis.

Įsidėmėtina, kad, sutraukiant lygtyje panašiuosius narius, prastinant abi lygties puses iš bendrojo daugiklio, nerašant trupmenos skaitiklio ir vardiklio bendrojo daugiklio, galima netekti šaknų arba gauti pašalines šaknis. Išnagrinėsime kelis nesudėtingus pavyzdžius.

10 pavyzdys. Sutraukę lygties

$$x^2+6+\frac{1}{x-2}=5x+\frac{1}{x-2}$$

panašiuosius narius, gauname lygtį $x^2-5x+6=0$, turinčią šaknis $x_1=2$, $x_2=3$. Tačiau skaičius $x_1=2$ nepriklauso pradinės lygties kairiosios ir dešiniosios pusės apibrėžimo sričiai ir nėra jos šaknis, nes, kai $x=2$, reiškinys $\frac{1}{x-2}$ netenka prasmės. Sutraukdami šios lygties panašiuosius narius, praplėtėme funkcijų, esančių duotosios lygties kairiojoje ir dešiniojoje pusėje, apibrėžimo sritis. Todėl atsirado šaknis $x=2$, kuri duotajai lygčiai yra pašalinė.

11 pavyzdys. Padaliję abi lygties $x^3=x$ puses iš x, gauname lygtį $x^2=1$, turinčią šaknis $x_1=1$, $x_2=-1$. Tuo tarpu lygtis $x^3=x$, be šaknų $x_1=1$, $x_2=-1$, turi dar šaknį $x=0$. Taigi, suprastinę abi lygties puses iš x, netekome šaknies $x=0$.

12 pavyzdys. Panagrinėkime lygtį

$$\frac{\sin x \cdot \sin 2x}{\sin x}=0.$$

Padaliję lygties kairiosios pusės skaitiklį ir vardiklį iš $\sin x$, gauname lygtį $\sin 2x=0$, turinčią šaknis $x=\frac{\pi n}{2}$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Tačiau duotajai lygčiai tinka tik tos lygties $\sin 2x=0$ šaknys, kurias tenkina sąlyga $\sin x \neq 0$ ($x \neq \pi k$, k – sveikasis skaičius). Taigi, suprastinus kairiosios (arba dešiniosios) lygties pusės skaitiklį ir vardiklį iš bendrojo daugiklio, gali atsirasti pašalinių šaknų.

13 pavyzdys. Nagrinėsime lygtį

$$\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{\cos 3x}{\sin x}.$$

Atmetę trupmenų vardiklius, gauname lygtį $\cos x=\cos 3x$ arba

$$2 \sin x \cdot \sin 2x=0. \qquad (6)$$

Kadangi lygties $\sin x=0$ šaknys tinka lygčiai $\sin 2x=0$, tai (6) lygtis turi tokias pat šaknis, kaip ir lygtis $\sin 2x=0$, t.y.

$$x=\frac{\pi n}{2} \ (n-\text{sveikasis skaičius}). \qquad (7)$$

Tačiau pradinei lygčiai tinka tik tos x reikšmės, kurios gaunamos iš (7) formulės, kai n yra nelyginis skaičius, t.y. $x=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; čia k – sveikasis skaičius.

Jeigu (7) formulėje imtume lygines n reikšmes ($n=2k$), tai gautume $x=\pi k$, $\sin x=0$. Bet tokios x reikšmės nepriklauso lygties kairiosios ir dešiniosios pusės apibrėžimo sričiai. Taigi, atmetę trupmenos skaitiklį ir vardiklį, gavome pašalinių šaknų.

Pateikti pavyzdžiai įtikina, kad būtinai reikia išnagrinėti bendrąją lygčių teoriją, išsiaiškinti, kokią įtaką lygčiai turi vienokie ar kitokie pertvarkymai. Nagrinėdami šiuos klausimus, turėsime apibrėžti lygčių ekvivalentumo, disjunkcijos ir lygties išvados sąvokas.

Apibrėžimas. *Dvi lygtis*

$$f(x)=g(x) \qquad (8)$$

ir

$$f_1(x)=g_1(x) \qquad (9)$$

vadiname ekvivalenčiomis tam tikroje aibėje M, kai jos šioje aibėje turi vienodus sprendinius, t.y. kiekviena (8) *lygties šaknis, priklausanti*

aibei M, yra (9) lygties šaknis ir, atvirkščiai, kiekviena (9) lygties šaknis, priklausanti aibei M, yra (8) lygties šaknis.

Kad užrašai būtų trumpesni, tarp ekvivalenčių lygčių rašysime ženklą $\Leftrightarrow$. Kitaip tariant, užrašas

$$\{f(x)=g(x)\} \Leftrightarrow \{f_1(x)=g_1(x)\}$$

arba

$$(8) \Leftrightarrow (9)$$

reiškia, kad (8) ir (9) lygtys yra ekvivalenčios.

Pastaba. Ateityje, jei tik nebus pasakyta priešingai, aibe M laikysime visų realiųjų skaičių aibę ir vietoj posakio „lygtys yra ekvivalenčios realiųjų skaičių aibėje“ tiesiog sakysime „lygtys yra ekvivalenčios“, t.y. nuorodą į aibę M praleisime.

Išnagrinėsime kelis nesudėtingus pavyzdžius, iliustruojančius ekvivalentumo apibrėžimą.

14 pavyzdys. $\{x+4=3x\} \Leftrightarrow \{x-2=0\}$.

15 pavyzdys.

$$\{2\cos^2 x=1+\cos 2x\} \Leftrightarrow \{x^2-2x=(x-1)^2-1\}.$$

Bet koks realusis skaičius yra visų šių lygčių šaknis.

16 pavyzdys. $\{\lg x=\lg(-x)\} \Leftrightarrow \left\{2-x+\frac{1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}\right\}$. Abi lygtys neturi šaknų (kiekvienos šių lygčių šaknų aibė yra tuščia aibė).

17 pavyzdys. $\{x+1=0\} \Leftrightarrow \{(x+1)^3=0\}$.

Skaičius $x=-1$ yra pirmosios lygties paprastoji šaknis ir antrosios lygties 3-iojo kartotinumo šaknis (šaknies kartotinumas apibrėžtas 127 puslapyje). Tačiau šaknies kartotinumo sąvoka apibrėžiama tik algebrinėms lygtims, o bendrojo tipo lygtims, kurios nagrinėjamos šiame skyriuje, ji neapibrėžiama. Todėl visur šiame skyriuje nekreipsime dėmesio į šaknies kartotinumą ir dvi lygtis, turinčias vienodas šaknis (neatsižvelgiant į jų kartotinumą), laikysime ekvivalenčiomis.

18 pavyzdys. Lygtys $x^2=x$ ir $\frac{x^2+1}{x}=\frac{x+1}{x}$ neekvivalenčios: skaičius $x=0$ yra pirmosios lygties šaknis, bet netinka antrajai lygčiai, nes šios lygties kairioji ir dešinioji pusės, kai $x=0$, yra neapibrėžtos.

19 pavyzdys. Lygtys $x=0$ ir $x(x^2+1)=0$ yra ekvivalenčios realiųjų skaičių aibėje (abi turi tik vieną šaknį $x=0$), bet kompleksinių skaičių aibėje jos jau nėra ekvivalenčios, nes antroji lygtis, be šaknies $x_1=0$, turi dar dvi šaknis $x_2=i$, $x_3=-i$.

Kai, spręsdami tam tikrą lygtį, ją pakeičiame ekvivalenčia lygtimi, tai, suradę antrosios lygties šaknis, kartu randame ir duotosios lygties šaknis.

Tačiau toli gražu ne visada pavyksta duotąją lygtį pakeisti ekvivalenčia. Gana dažnai, pertvarkę duotąją lygtį, gauname naują lygtį, kuriai tinka visos duotosios lygties šaknys ir galbūt tam tikri kiti skaičiai, kurie nėra duotosios lygties šaknys. Kitaip tariant, turime galvoje pertvarkymus, kuriuos atlikę, šaknų neprarandame; tokiais atvejais atsikratyti pašalinių šaknų galėsime tikrindami.

Apibrėžimas. *Duota tam tikra lygtis*

$$f(x)=g(x). \tag{10}$$

Lygtį

$$f_1(x)=g_1(x) \tag{11}$$

vadiname (10) *lygties išvada, jeigu* (10) *lygtį pakeitę* (11) *lygtimi, neprarandame šaknų, t.y. jeigu visos* (10) *lygties šaknys yra ir* (11) *lygties šaknys.*

Kartais vietoj posakio „(11) lygtis yra (10) lygties išvada" vartojame posakį „(11) lygtis išplaukia iš (10) lygties".

Iš apibrėžimo išplaukia, kad (10) ir (11) lygtys yra ekvivalenčios tada ir tik tada, kai kiekviena šių lygčių yra kitos lygties išvada. Iš apibrėžimo taip pat aišku, kad (11) lygtis, kuri yra (10) lygties išvada, gali turėti daugiau sprendinių, negu jų turi (10) lygtis.

Kad užrašai būtų trumpesni, ženklu $\Rightarrow$ žymėsime tą faktą, kad antroji lygtis (parašyta dešiniau šio ženklo) yra pirmosios lygties išvada. Kitaip tariant, užrašas

$$\{f(x)=g(x)\} \Rightarrow \{f_1(x)=g_1(x)\}$$

arba

$$(10) \Rightarrow (11)$$

reiškia, kad (11) lygtis yra (10) lygties išvada.

20 pavyzdys. $\{x=1\} \Rightarrow \{x^2=1\}$. Skaičius $x=1$ yra vienintelė pirmosios lygties šaknis, kartu šis skaičius yra ir antrosios lygties šaknis.

21 pavyzdys. $\{3x=2x+1\} \Rightarrow \{\sin 3x=\sin(2x+1)\}$. Antroji lygtis yra pirmosios lygties išvada (atvirkščias teiginys neteisingas, t.y. antroji lygtis turi daugiau sprendinių negu pirmoji).

Baigdami šį paragrafą, išnagrinėsime lygčių *disjunkcijos* sąvoką.

Apibrėžimas. *Sakysime, kad lygtis*

$$f(x)=g(x) \tag{12}$$

yra ekvivalenti lygčių

$$f_1(x)=g_1(x),\ f_2(x)=g_2(x),\ \ldots,f_n(x)=g_n(x) \tag{13}$$

disjunkcijai, kai galioja šios sąlygos:

1) *kiekviena* (12) *lygties šaknis yra bent vienos iš* (13) *lygčių šaknis*;

2) *kiekviena bet kokios iš* (13) *lygčių šaknis yra* (12) *lygties šaknis.*

Tarkime, kad (12) lygtis ekvivalenti (13) lygčių disjunkcijai, (12) lygties šaknų aibę pažymėkime M, o lygčių $f_1(x)=g_1(x)$, $f_2(x)=g_2(x)$, ..., $f_n(x)=g_n(x)$ šaknų aibes – atitinkamai $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Tada iš apibrėžimo išplaukia, kad

$$M=M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n.$$

Kitaip tariant, norėdami rasti (12) lygties šaknis, turime išspręsti visas (13) lygtis ir sudaryti jų šaknų aibių sąjungą. Ši sąjunga ir bus visų (12) lygties šaknų aibė.

Tą faktą, kad (12) lygtis yra ekvivalenti (13) lygčių disjunkcijai, žymėsime taip:

$$\{f(x)=g(x)\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\Big(f_1(x)=g_1(x)\Big)\vee\Big(f_2(x)=g_2(x)\Big)\vee\ \ldots\ \vee\Big(f_n(x)=g_n(x)\Big)\right\}.$$

(Beje galėtume susitarti nerašyti riestinių ir didesnių apvaliųjų skliaustų.)

22 pavyzdys. $\{x^2-5x+6=0\}\Leftrightarrow\{(x-2=0)\vee(x-3=0)\}$.

23 pavyzdys. $\{\sin^2 x=\cos^4 x\}\Leftrightarrow\{(\sin x=\cos^2 x)\vee(\sin x+\cos^2 x=0)\}$.

Sprendžiant lygtis, dažnai duotoji keičiama paprastesnių lygčių disjunkcija. Lygtis paprastai sprendžiama pagal tokią schemą. Lygtis $f(x)=g(x)$ vieną (arba kelis kartus) keičiama nauja lygtimi arba lygčių disjunkcija:

$$\{f(x)=g(x)\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\Big(f_1(x)=g_1(x)\Big)\vee\Big(f_2(x)=g_2(x)\Big)\vee\ \ldots\ \vee\Big(f_n(x)=g_n(x)\Big)\right\}.$$

Keičiant lygtis, būtina laikytis šių taisyklių:

1) neprarasti šaknų, t.y., kai skaičius x_0 yra lygties $f(x)=g(x)$ šaknis, tai skaičius x_0 turi būti šaknis bent vienos iš lygčių

$$f_1(x)=g_1(x),\ f_2(x)=g_2(x),\ \ldots,f_n(x)=g_n(x);$$

2) norint išspręsti duotąją lygtį $f(x)=g(x)$, reikia išspręsti visas lygtis $f_1(x)=g_1(x)$, $f_2(x)=g_2(x)$, ..., $f_n(x)=g_n(x)$ ir sudaryti jų šaknų aibių sąjungą;

3) nesant tikriems, kad neatsirado pašalinių šaknų, reikia patikrinti kiekvieną skaičių, priklausantį gautajai šaknų aibių sąjungai, ar jis tinka pradinei lygčiai, ar netinka.

Tai atlikus, gaunama lygties $f(x)=g(x)$ šaknų aibė. Jeigu kurios nors lygties $f_k(x)=g_k(x)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ negalima išspręsti tiesiogiai, ji sprendžiama tokiu pat metodu. Beveik visa tolesnė likusioji skyriaus dalis (ir nagrinėjami pavyzdžiai) iliustruoja šį lygčių sprendimo metodą.

§ 3. Svarbiausieji lygčių pertvarkymo ir sprendimo metodai

1°. *Dėmenų perkėlimas iš vienos lygties pusės į kitą, t.y. lygties*

$$f(x)=\varphi(x)+g(x) \tag{14}$$

pakeitimas lygtimi

$$f(x)-\varphi(x)=g(x). \tag{15}$$

Taip pakeitus, visada gaunama ekvivalenti lygtis, vadinasi, kokios bebūtų funkcijos $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$, visada (14) $\Leftrightarrow$ (15). Iš tiesų tarkime, kad x_0 – (14) lygties šaknis, t.y. sąryšis

$$f(x_0)=\varphi(x_0)+g(x_0) \tag{16}$$

yra teisinga skaitinė lygybė. Tai reiškia, kad 1) taškas x_0 priklauso kiekvienos funkcijos $f(x)$, $\varphi(x)$, $g(x)$ apibrėžimo sričiai, t.y. skaičiai $f(x_0)$, $\varphi(x_0)$, $g(x_0)$ turi prasmę ir 2) šie skaičiai yra susieti (16) sąryšiu. Pridėję prie abiejų (16) lygybės pusių skaičių $-\varphi(x_0)$, gauname

$$f(x_0)-\varphi(x_0)=\varphi(x_0)-\varphi(x_0)+g(x_0)$$

arba

$$f(x_0)-\varphi(x_0)=g(x_0) \tag{17}$$

(kadangi, koks bebūtų skaičius a, pavyzdžiui, $a=\varphi(x_0)$, visada $a-a=0$). Taigi (17) sąryšis yra teisinga skaitinė lygybė. Bet tai reiškia, kad x_0 – (15) lygties šaknis. Vadinasi, įrodėme, kad kiekviena (14) lygties šaknis kartu yra (15) lygties šaknis. Todėl (14) $\Rightarrow$ (15). Analogiškai įrodoma, kad (15) $\Rightarrow$ (14).

Taigi įrodėme, kad, perkėlus bet kokį dėmenį iš vienos lygties pusės į kitą su priešingu ženklu, gaunama ekvivalenti lygtis.

Pavyzdžiui, galima, jeigu tik reikia, visus dėmenis sukelti į vieną lygties pusę. Kitaip tariant,

$$\{f(x)=\varphi(x)\} \Leftrightarrow \{f(x)-\varphi(x)=0\}$$

yra ekvivalentumo (14) $\Leftrightarrow$ (15) atskiras atvejis (kai $g(x)\equiv 0$). Matome, kad kiekvieną lygtį su vienu nežinomuoju galima pakeisti jai ekvivalenčia lygtimi $h(x)=0$, t.y. lygtimi, kurios kairėje pusėje yra tam tikra funkcija, o dešinėje – nulis.

Taip pertvarkyti lygtis (jų dėmenis perkelti iš vienos pusės į kitą) sprendžiant prireikia ypač dažnai. Pavyzdžiui, sprendžiant iracionaliąsias lygtis, „atskiriamas radikalas“, t.y. visi nariai, išskyrus vieną, kuris turi išraišką $\sqrt[n]{f(x)}$, perkeliami į kitą lygties pusę.

Pabrėžiame, kad kalbėjome tik apie narių perkėlimą iš vienos lygties pusės į kitą be panašiųjų narių sutraukimo (kai tokių yra). Panašiųjų narių sutraukimas yra naujas pertvarkymas (po kurio, kaip rodo 10 pavyzdys, gali atsirasti pašalinių šaknų). Panagrinėsime šį pertvarkymą.

2°. *Panašiųjų narių sutraukimas, t.y. lygties*

$$f(x)+\varphi(x)-\varphi(x)=g(x) \tag{18}$$

pakeitimas lygtimi

$$f(x)=g(x). \tag{19}$$

Pirmiau, negu pradėsime nagrinėti (18) lygties pakeitimą (19) lygtimi, padarysime tokią pastabą. Iš pirmojo punkto rezultatų išplaukia, kad (18) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$f(x)+\varphi(x)=g(x)+\varphi(x). \tag{20}$$

Todėl (18) lygties pakeitimas (19) lygtimi reiškia tą patį, kaip ir (20) lygties pakeitimas (19) lygtimi, t.y. pagal visus samprotavimus (18) lygtį galima pakeisti jai ekvivalenčia (20) lygtimi. Taigi šiame punkte kalbėsime

ne tik apie panašiųjų narių sutraukimą vienoje lygties pusėje, bet ir apie vienodų dėmenų abiejose lygties pusėse išbraukimą (panaikinimą).

Dabar, prieš formuluodami bendrą tvirtinimą apie (18) lygties pakeitimą (19) lygtimi arba, o tai yra tas pats, apie (20) lygties pakeitimą (19) lygtimi, išnagrinėsime du pavyzdžius.

24 pavyzdys. $\{x^4-x+2=x^2-x+2\} \Leftrightarrow \{x^4=x^2\}$.

Išbraukę abiejose lygties $x^4-x+2=x^2-x+2$ pusėse dėmenį $\varphi(x)= =-x+2$, gauname ekvivalenčią lygtį $x^4=x^2$.

25 pavyzdys. $\{x^2+\lg x=x+\lg x\} \Rightarrow \{x^2=x\}$.

Lygtis $x^2=x$ turi dvi šaknis $x_1=1$, $x_2=0$, o lygtis $x^2+\lg x=x+\lg x$ – tik vieną šaknį $x=1$ (skaičius $x=0$ nėra lygties $x^2+\lg x=x+\lg x$ šaknis, nes kairioji ir dešinioji šios lygties pusės, kai $x=0$, yra neapibrėžtos). Taigi lygtis $x^2=x$ neekvivalenti lygčiai $x^2+\lg x=x+\lg x$, o yra tik jos išvada.

Pašalinė šaknis $x=0$, keičiant lygtį $x^2+\lg x=x+\lg x$ lygtimi $x^2=x$, atsirado todėl, kad, taip pakeitę, praplėtėme aibes, kuriose buvo apibrėžtos funkcijos, esančios pirmosios lygties ir kairėje, ir dešinėje pusėje: lygties $x^2+\lg x=x+\lg x$ kairioji ir dešinioji pusės apibrėžtos, kai $x>0$, o lygties $x^2=x$ – su visomis x reikšmėmis.

Aišku, kad lygties $x^2=x$ negalima keisti lygtimi $x^2+\lg x=x+\lg x$, nes po tokio keitimo neteksime šaknies $x=0$.

Dabar suformuluosime bendrą tvirtinimą. *Kokios bebūtų funkcijos* $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, (19) *lygtis visada yra* (18) *lygties išvada* (arba kitaip: (19) lygtis yra (20) lygties išvada). Taigi, (18) lygtį pakeitę (19) lygtimi (arba (20) lygtį – (19) lygtimi), šaknų neprarandame, bet tokiu atveju, kaip rodo 10 ir 25 pavyzdžiai, gali atsirasti pašalinių šaknų. Šio teiginio įrodymas analogiškas 213 puslapyje esantiems samprotavimams; siūlome jį įrodyti patiems skaitytojams.

Taigi, kai spręsdami taip pertvarkome lygtį ((18) arba (20) lygtį keičiame (19) lygtimi), būtinai turime patikrinti gautąsias šaknis, nes gali atsirasti pašalinių šaknų.

Natūralu paklausti, kokiais atvejais po tokio pertvarkymo gausime ekvivalenčią lygtį (kaip tai buvo 24 pavyzdyje) ir, vadinasi, nereikės tikrinti šaknų. Į šį klausimą atsako toks tvirtinimas[1]. *Aibę, kurioje yra apibrėžtos funkcijos* $f(x)$ *ir* $g(x)$, *esančios ir kairėje, ir dešinėje* (19) *lygties pusėje* (*t.y. funkcijų* $f(x)$ *ir* $g(x)$ *apibrėžimo sričių sankirtą*), *pažymėsime* M. *Tada, kai aibė* M *priklauso funkcijos* $\varphi(x)$ *apibrėžimo sričiai*, (18) *lygtis yra ekvivalenti* (19) *lygčiai* ((20) *lygtis irgi yra ekvivalenti* (19) *lygčiai*).

Iš tikrųjų, kai x_0 – (19) lygties šaknis, tai taškas x_0 priklauso kiekvienos funkcijos $f(x)$, $g(x)$ apibrėžimo sričiai (t.y. aibei M) ir skaitinė lygybė $f(x_0)=g(x_0)$ yra teisinga. Kadangi x_0 priklauso aibei M, tai pagal prielaidą x_0 priklauso ir funkcijos $\varphi(x)$ apibrėžimo sričiai, t.y. skaičius $\varphi(x_0)$ yra apibrėžtas. Pridėję prie abiejų lygybės $f(x_0)=g(x_0)$ pusių skaičių $\varphi(x_0)$, gausime teisingą skaitinę lygybę $f(x_0)+\varphi(x_0)=g(x_0)+\varphi(x_0)$, kuri rodo, kad x_0 yra (20) lygties šaknis. Vadinasi, (19) $\Leftrightarrow$ (20). Atvirkš-

[1] Šis tvirtinimas yra tik pakankama (18) ir (19) lygčių ekvivalentumo sąlyga. Kitaip tariant, netgi tada, kai ši sąlyga negalioja, kartais gali būti, kad (18) $\Leftrightarrow$ (19). Pavyzdys: $\{x^2-5x+6+\lg x-\lg x=0\} \Leftrightarrow \{x^2-5x+6=0\}$.

čias tvirtinimas (t.y. (20) $\Rightarrow$ (19)), kaip žinome, yra teisingas visada. Vadinasi, (19) $\Leftrightarrow$ (20) (o todėl ir (18) $\Leftrightarrow$ (19)).

Taigi galima padaryti išvadas:

1) (18) $\Rightarrow$ (19);

2) kai funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričių sankirta priklauso funkcijos $\varphi(x)$ apibrėžimo sričiai, tai (18) $\Leftrightarrow$ (19);

3) jeigu nesame tikri, kad (18) ir (19) lygtys yra ekvivalenčios, tai (19) lygties negalima keisti (18) lygtimi, nes galime netekti šaknų.

Jeigu (18) lygtį visur pakeisime (20) lygtimi, tai išvados liks teisingos.

3°. *Abiejų lygties pusių dauginimas iš to paties reiškinio, t.y. lygties*

$$f(x)=g(x) \qquad (21)$$

keitimas lygtimi

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x). \qquad (22)$$

Apie tokį pakeitimą galima pasakyti štai ką:

1) kai kiekviename taške, kuriame apibrėžtos funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$, yra apibrėžta ir funkcija $\varphi(x)$ (kitaip tariant, kai funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričių sankirta priklauso funkcijos $\varphi(x)$ apibrėžimo sričiai), tai (22) lygtis yra (21) lygties išvada, t.y. (21) $\Rightarrow$ (22);

2) kai, galiojant 1) sąlygai, funkcija $\varphi(x)$ nelygi nuliui funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričių sankirtoje, tai (21) ir (22) lygtys yra ekvivalenčios, t.y. (21) $\Leftrightarrow$ (22).

Įrodyti šiuos du tvirtinimus paliekame skaitytojams. Atkreipiame dėmesį į tai, kad bendru atveju, (22) lygtį pakeitus (21) lygtimi, gali ir atsirasti pašalinių šaknų, ir išnykti šaknys.

26 pavyzdys. Išnagrinėsime lygtį

$$x^2-x=0.$$

Padauginę abi šios lygties puses iš $\frac{1}{x}$, gauname lygtį

$$\frac{x^2-x}{x}=0,$$

kuri nėra duotosios lygties išvada.

Iš tiesų duotoji lygtis turi šaknis $x_1=0$, $x_2=1$, o lygtis $\frac{x^2-x}{x}=0$ – tik šaknį $x=1$. Šaknies netekome todėl, kad funkcija $\frac{1}{x}$ taške $x=0$ yra neapibrėžta, o kaip tik ši x reikšmė ir yra duotosios lygties šaknis.

4°. *Lygties*

$$f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)=0 \qquad (23)$$

pakeitimas lygčių

$$f_1(x)=0,\ f_2(x)=0,\ \ldots, f_n(x)=0 \qquad (24)$$

disjunkcija.

Sprendžiant lygtis, tokio keitimo prireikia gana dažnai. Natūralus klausimas: ar galima tvirtinti, kad (23) lygtis yra ekvivalenti (24) lygčių disjunkcijai? Kitaip tariant, ar, išsprendę visas (24) lygtis ir sudarę jų šaknų sąjungą, galėsime gauti visų (23) lygties šaknų aibę? Į šį klausimą atsako tokia teorema.

1 teorema. *Kai visos funkcijos* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ yra apibrėžtos aibėje M *(t.y. kai aibė* M *priklauso kiekvienos funkcijos* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *apibrėžimo sričiai), tai šioje aibėje* (23) *lygtis yra ekvivalenti* (24) *lygčių disjunkcijai.*

Įrodymas. Sakykime, kad $x_0 \in M$ ir $x = x_0$ – kurios nors vienos (24) lygties šaknis. Nepamiršdami to, kas bendra, galime tarti, kad $x = x_0$ – lygties $f_1(x) = 0$ šaknis. Tada funkcija $f_1(x)$ yra apibrėžta taške $x = x_0$ ir $f_1(x_0) = 0$. Kadangi $x_0 \in M$, tai funkcijos $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ irgi yra apibrėžtos, kai $x = x_0$, ir

$$f_1(x_0) f_2(x_0) \ldots f_n(x_0) = 0,$$

nes šios sandaugos pirmasis dauginamasis lygus nuliui.

Taigi bet kokia (priklausanti aibei M) kiekvienos lygties

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$$

šaknis kartu yra ir (23) lygties šaknis.

Atvirkščiai, tarkime, kad $x = a$ – tokia (23) lygties šaknis, kad $a \in M$. Tada visos funkcijos $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ yra apibrėžtos taške $x = a$ ir

$$f_1(a) f_2(a) \ldots f_n(a) = 0.$$

Iš šios lygybės išplaukia, kad bent vienas iš skaičių $f_1(a), f_2(a), \ldots, f_n(a)$ lygus nuliui, o tai reiškia, kad $x = a$ yra bent vienos šių lygčių

$$f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$$

šaknis.

Šia teorema pagrįstas plačiai taikomas lygčių skaidymo dauginamaisiais metodas.

27 pavyzdys. Nesunku įsitikinti, kad $x^6 + 3x^5 - x^4 - 3x^3 = x^3(x^2 - 1)(x + 3)$. Todėl lygtis $x^6 + 3x^5 - x^4 - 3x^3 = 0$ ekvivalenti lygčių

$$x^3 = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad x + 3 = 0$$

disjunkcijai ir turi šaknis[1] $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -3$.

Pateiksime pavyzdį, iliustruojantį, kad bendru atveju lygtis

$$f_1(x) f_2(x) \ldots f_n(x) = 0$$

nėra ekvivalenti lygčių

$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$$

disjunkcijai.

---

[1] Dar kartą primename, kad šiame skyriuje į šaknų kartotinumą neatsižvelgiame.

28 pavyzdys. Tarkime, kad $f_1(x)=x^2-1$, $f_2(x)=\frac{1}{x-1}$. Lygtis $f_2(x)=0$ neturi šaknų, lygtis $f_1(x)=0$ turi dvi šaknis $x_1=1$, $x_2=-1$, o lygtis $f_1(x)f_2(x)=0$ turi tik vieną šaknį $x_1=-1$, nes kairioji jos pusė, kai, $x=1$, yra neapibrėžta.

2 teorema. *Kiekviena* (23) *lygties šaknis yra kurios nors vienos* (24) *lygties šaknis.*

Kitaip tariant, (24) *lygčių disjunkcija yra* (23) *lygties išvada*:

$$\{f_1(x)f_2(x)\ldots f_n(x)=0\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\Big\{\big(f_1(x)=0\big)\vee\big(f_2(x)=0\big)\vee\ldots\vee\big(f_n(x)=0\big)\Big\}.$$

Įrodyti šią teoremą paliekame skaitytojams. Iš jos išplaukia, kad visos (23) lygties šaknys priklauso (24) lygčių visų šaknų aibei ir galbūt šioje aibėje esama skaičių, kurie nėra (23) lygties šaknys. Pašalinės (23) lygčiai šaknys bus tos x reikšmės, gautos, sprendžiant (24) lygtis, su kuriomis bent viena iš funkcijų $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ bus neapibrėžta.

Pastaba. Minėjome, kad lygtį

$$f(x)\varphi(x)=g(x)\varphi(x) \qquad (25)$$

keisti lygtimi

$$f(x)=g(x)$$

apskritai yra neleistina.

Spręsdami (25) lygtį, paprastai darome taip. Pirmiausia (25) lygtį pakeičiame jai ekvivalenčia lygtimi

$$\big(f(x)-g(x)\big)\varphi(x)=0. \qquad (26)$$

Savo ruožtu lygčių

$$f(x)-g(x)=0,\quad \varphi(x)=0 \qquad (27)$$

disjunkcija yra (26) lygties išvada.

Taigi, išsprendę (27) lygtis, sudarę jų šaknų sąjungą, o paskui patikrinę (įrašydami gautųjų šaknų reikšmes (25) lygtyje) ir išbraukę pašalines šaknis, gausime visas (25) lygties šaknis.

29 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin x\cdot\operatorname{ctg}2x\cdot\arcsin(x-1)\cdot\lg(x-1)=0.$$

Sprendimas. Panagrinėkime lygtis $\sin x=0$, $\operatorname{ctg}2x=0$, $\arcsin(x-1)=$ $=0$, $\lg(x-1)=0$. Jos turi atitinkamas šaknis

$$x=\pi n,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),\ x=1,\ x=2.$$

Tos šaknys, kurios priklauso pradinės lygties kairiosios pusės apibrėžimo sričiai, yra duotosios lygties šaknys.

Šią apibrėžimo sritį pažymėsime M. Aibę M sudaro visos tos x reikšmės, su kuriomis yra apibrėžta kiekviena funkcija $\sin x$, $\operatorname{ctg}2x$, $\arcsin(x-1)$, $\lg(x-1)$. Funkcija $\sin x$ yra apibrėžta su visomis x reikš-

mėmis, o kitų trijų funkcijų apibrėžimo sritys apibūdinamos atitinkamai šiomis sąlygomis:

$$x \neq \frac{\pi k}{2} \ (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots), \ 0 \leqslant x \leqslant 2, \ x > 1.$$

Vadinasi, aibę M sudaro tos x reikšmės, kurios tenkina nelygybę $1 < x \leqslant 2$ ir sąlygą

$$x \neq \frac{\pi k}{2} \ (k=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \ldots),$$

t.y. aibę M gausime, kai iš pusiau atviro intervalo $1 < x \leqslant 2$ pašalinsime tašką $\frac{\pi}{2}$. Lygties $\sin x = 0$ šaknys $x = \pi n$ $(n=0, +1, +2, \ldots)$ nepriklauso aibei M, todėl pradinei lygčiai yra pašalinės šaknys. Lygties $\arcsin(x-1)=0$ šaknis $x=1$ taip pat nepriklauso aibei M, todėl irgi yra pašalinė šaknis. Toliau lygties $\lg(x-1)=0$ šaknis $x=2$ priklauso aibei M ir yra pradinės lygties šaknis.

Pagaliau nė vienas skaičių $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ $(n=0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots)$, tenkinančių lygtį $\operatorname{ctg} 2x = 0$, netenkina nelygybės $1 < x \leqslant 2$ ir todėl aibei M nepriklauso.

Taigi duotoji lygtis turi tik vieną šaknį $x_1 = 2$.

5°. *Lygties* $f(x) = g(x)$ *keitimas lygtimi* $(f(x))^n = (g(x))^n$. Taip keisti dažnai tenka, sprendžiant lygtis ypač iracionaliąsias.

Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos aibėje M (t.y. aibė M priklauso kiekvienos funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sričiai), o n – bet koks natūrinis skaičius. Dar tarkime, kad M – tam tikra realiųjų skaičių aibė, kurioje funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ įgyja realiąsias reikšmes.

Tada galima tvirtinti štai ką:

1) su bet kokiu natūriniu n lygtis

$$(f(x))^n = (g(x))^n \tag{28}$$

yra lygties

$$f(x) = g(x) \tag{29}$$

išvada;

2) kai n – nelyginis skaičius $(n=2k+1)$, tai aibėje M (28) lygtis yra ekvivalenti (29 lygčiai;

3) kai n – lyginis skaičius, tai aibėje M (28) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$|f(x)| = |g(x)|, \tag{30}$$

kuri savo ruožtu aibėje M yra ekvivalenti lygčių

$$f(x) = g(x) \text{ ir } f(x) = -g(x)$$

disjunkcijai. Jeigu pasitaikytų toks atvejis, kad antroji šių lygčių sprendinių neturi (pavyzdžiui, kai abi funkcijos $f(x)$, $g(x)$ aibėje M įgyja tik teigiamas reikšmes), tai (28) lygtis būtų ekvivalenti (29 lygčiai. (28) lygtį keisti (29) lygtimi, kai n yra lyginis skaičius, apskritai neleistina, nes galima netekti šaknų.

30 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{2x^2+5x-3}=x+1. \qquad (31)$$

Sprendimas. Pakėlę (31) lygties abi puses kvadratu, gausime lygtį

$$2x^2+5x-3=x^2+2x+1,$$

kuri yra (31) lygties išvada. Gautoji lygtis ekvivalenti lygčiai

$$x^2+3x-4=0,$$

turinčiai šaknis $x_1=-4$, $x_2=1$. Patikrinę, įsitikiname, kad šaknis $x_1=-4$ yra pašalinė (31) lygčiai, o šaknis $x_2=1$ jai tinka.

Taigi (31) lygtis turi tik vieną šaknį $x=1$.

Daug bendresnis, negu 5° punkte išnagrinėtasis, yra lygties

$$f(x)=g(x) \qquad (32)$$

keitimas lygtimi

$$\varphi(f(x))=\varphi(g(x)); \qquad (33)$$

čia $\varphi(t)$ – tam tikra duotoji funkcija.

Išsyk pareiškiame, kad taip keisti apskritai yra neleistina. Iš tiesų tarkime, kad E_1 ir E_2 – atitinkamos funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmių aibės, o E – aibių E_1 ir E_2 bendra dalis (t.y. jų sankirta). Kai funkcija $\varphi(t)$ yra neapibrėžta aibėje E, tai (33) lygtis sprendinių neturi, nors duotoji (32) lygtis sprendinius ir galėjo turėti. Kai aibė E priklauso funkcijos $\varphi(t)$ apibrėžimo sričiai, tai galėtume įrodyti, kad (32) $\Rightarrow$ (33). O jeigu, be to, funkcija $\varphi(t)$ dar yra monotoninė, tai (32) $\Leftrightarrow$ (33).

31 pavyzdys. Lygtis $-x^2=-x^4$ turi šaknis $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=-1$, o lygtis $\lg(-x^2)=\lg(-x^4)$ sprendinių neturi. Taip atsitiko dėl to, kad abi funkcijos $f(x)=-x^2$, $g(x)=-x^4$ įgyja reikšmes, priklausančias aibei $E=]-\infty;\ 0]$, kurioje funkcija $\lg x$ yra neapibrėžta.

Išnagrinėjome tik kai kuriuos lygčių pertvarkymo metodus. Suprantama, kad tai tik dalis tų įvairių pertvarkymų, kurių prireikia, sprendžiant lygtis. Pavyzdžiui, kol kas dar nenagrinėjome pertvarkymų, susijusių su logaritminės ir rodiklinės funkcijų savybėmis. Bet apie tai kalbėsime toliau (žr. § 5). Šio paragrafo pabaigoje dar išnagrinėsime vieną svarbų lygčių sprendimo metodą.

6°. *Nežinomojo keitimo metodas.* Šis metodas taikomas, sprendžiant tokio tipo lygtis, kaip

$$f(g(x))=0. \qquad (34)$$

Jis pagrįstas tokia teorema.

3 teorema. *Nagrinėsime lygtį*

$$f(t)=0; \qquad (35)$$

čia t – pagalbinis nežinomasis. Tarkime, kad $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – visos (35) *lygties šaknys. Tada, norint išspręsti* (34) *lygtį, pakanka surasti kiekvienos lygties*

$$g(x)=t_m \quad (m=1, 2, \ldots, k) \qquad (36)$$

visas šaknis ir sudaryti šių šaknų aibių sąjungą. Kitaip tariant,

$$\left\{f\left(g(x)\right)=0\right\}\Leftrightarrow\left\{\left(g(x)=t_1\right)\vee\left(g(x)=t_2\right)\vee\ldots\vee\left(g(x)=t_k\right)\right\}.$$

Įrodymas. Tarkime, kad $t=t_m$ – viena (35) lygties šaknis, o $x=x_0$ – lygties $g(x)=t_m$ šaknis. Tuomet $f(t_m)=0$, $g(x_0)=t_m$ ir todėl $f\left(g(x_0)\right)=0$, t.y. x_0 – (34) lygties šaknis. Atvirkščiai, tarkime, $x=x_0$ – (34) lygties šaknis, t.y. $f\left(g(x_0)\right)=0$. Tada aišku, kad x_0 priklauso funkcijos $g(x)$ apibrėžimo sričiai. Pažymėkime $g(x_0)=t_0$. Iš lygybės $f\left(g(x_0)\right)=0$ gauname $f(t_0)=0$, t.y. t_0 – viena (35) lygties šaknis, sakykime, $t_0=t_m$. Dabar aišku, kad x_0 – lygties $g(x)=t_m$ šaknis.

Taigi pagal šią teoremą (34) lygties sprendimą galima pakeisti paprastesnių (35), (36) lygčių sprendimu.

Paprastai įrodytoji teorema taikoma taip. Duota tam tikra lygtis $F(x)=0$. Norėdami ją išspręsti, turime funkciją $g(x)$ parinkti taip, kad galėtume įvesti naują nežinomąjį $t=g(x)$ ir sugebėtume funkciją $F(x)$ išreikšti nežinomuoju t, vadinasi, šią funkciją išreikšti lygybe $F(x)=f(g(x))$. Taip padarę, duotajai lygčiai suteiksime (34) išraišką ir, spręsdami ją, galėsime taikyti įrodytąją teoremą. Toks lygčių sprendimo būdas vadinamas *nežinomojo keitimo metodu* (nes iš pradžių sprendžiame (35) lygtį, kurioje nežinomasis x pakeistas nauju pagalbiniu nežinomuoju t).

32 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$x^2+\frac{4}{x^2}=x-\frac{2}{x}+4.$$

Sprendimas. Įvedę naują nežinomąjį $t=x-\frac{2}{x}$, gauname lygtį

$$t^2-t=0,$$

turinčią šaknis $t_1=0$, $t_2=1$. Taigi

$$\left\{x^2+\frac{4}{x^2}=x-\frac{2}{x}+4\right\}\Leftrightarrow\left\{\left(x-\frac{2}{x}=0\right)\vee\left(x-\frac{2}{x}=1\right)\right\}.$$

Išsprendę lygtis $x-\frac{2}{x}=0$ ir $x-\frac{2}{x}=1$, randame visas pradinės lygties šaknis:

$$x_1=\sqrt{2},\quad x_2=-\sqrt{2},\quad x_3=2,\quad x_4=-1.$$

§ 4. Paprasčiausios iracionaliosios lygtys

Iracionaliųjų lygčių sprendimo metodai paprastai pagrįsti galimybe iracionaliąją lygtį pakeisti (pertvarkant ją) racionaliąja lygtimi, kuri arba būtų ekvivalenti duotajai iracionaliajai lygčiai, arba jos išvada. Dažniausiai abi lygties pusės keliamos tuo pačiu laipsniu. Tada gaunama lygtis, kuri yra pradinės lygties išvada.

Sprendžiant iracionaliąsias lygtis, būtina atkreipti dėmesį į šias pastabas:

1) kai šaknies rodiklis – lyginis skaičius, tai pošaknis turi būti neneigiamas; tada šaknies reikšmė irgi yra neneigiama (plg. p. 187);

2) kai šaknies rodiklis – nelyginis skaičius, tai pošaknis gali būti bet koks realusis skaičius; šiuo atveju šaknies ženklas sutampa su pošaknio ženklu.

33 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x}=7.$$

Sprendimas. Pakėlę abi lygties puses kvadratu (§ 3, 5°), sutraukę panašiuosius narius (§ 3, 2°), perkėlę dėmenis iš vienos lygybės pusės į kitą (§ 3, 1°) ir padauginę abi puses iš $\frac{1}{2}$ (§ 3, 3°), gauname lygtį

$$\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{20-x}=12, \qquad (37)$$

kuri yra pradinės lygties išvada. Dar kartą pakėlę abi lygties puses kvadratu, turėsime lygtį

$$(x+5)(20-x)=144,$$

kurią (remdamiesi §3, 1° ir 2° punkto rezultatais) galėsime pakeisti lygtimi

$$x^2-15x+44=0.$$

Ši lygtis (ji irgi yra pradinės lygties išvada) turi šaknis $x_1=4$, $x_2=11$. Patikrinę įsitikiname, kad šios abi šaknys tinka pradinei lygčiai.

Ats. $x_1=4$, $x_2=11$.

34 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=4.$$

Sprendimas. Abi lygties puses pakeliame kvadratu:

$$2x+1+x-3+2\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-3}=16.$$

Iš jos, perkėlę dėmenis į kitą lygybės pusę bei sutraukę panašiuosius narius, gauname lygtį

$$2\sqrt{2x+1}\cdot\sqrt{x-3}=3(6-x). \qquad (38)$$

Gautosios lygties abi puses vėl keliame kvadratu:

$$8x^2-20x-12=324-108x+9x^2.$$

Sutraukę panašiuosius narius, gauname lygtį

$$x^2-88x+336=0,$$

kuri yra pradinės lygties išvada. Išsprendę ją, randame šaknis $x_1=4$, $x_2=84$. Šaknis $x_1=4$ tinka pradinei lygčiai, o šaknis $x_2=84$ yra jai pašalinė šaknis.

Ats. $x=4$.

Pastaba. Keldami lygtis kvadratu, mokiniai kartais (37), (38) išraiškos lygtyse sudaugina pošaknius, t.y. vietoj jų rašo lygtis

$$\sqrt{(x+5)(20-x)}=12, \qquad (37')$$

$$2\sqrt{(2x+1)(x-3)}=3(6-x). \qquad (38')$$

Klaidų dėl to neatsiranda, nes (37') ir (38') lygtys yra (37) ir (38) lygčių išvados:

$$(37) \Rightarrow (37'), \quad (38) \Rightarrow)(38').$$

Tačiau reikia įsidėmėti, kad, sudauginę pošaknius, bendru atveju gauname neekvivalenčias lygtis. Pailiustruosime pavyzdžiu. Imame lygtis $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-4}=2$ ir $\sqrt{(x-1)(x-4)}=2$; skaičius $x=0$ yra antrosios lygties šaknis, bet pirmajai lygčiai netinka. Apskritai šį faktą galima suformuluoti taip:

$$\{\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=a\} \Rightarrow \{\sqrt{f(x)g(x)}=a\}.$$

Pabrėžiame, kad čia yra vienpusė rodyklė (o ne ekvivalentumo simbolis), t.y. lygtį $\sqrt{f(x)g(x)}=a$ keisti lygtimi $\sqrt{f(x)}\cdot\sqrt{g(x)}=a$ neleistina, nes galima netekti šaknų. Teisingai keičiama taip:

$$\{\sqrt{f(x)g(x)}=a\} \Leftrightarrow \{(\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=a) \vee (\sqrt{-f(x)}\sqrt{-g(x)}=a)\}.$$

Spręsdami 33 ir 34 pavyzdžius, galėjome iš pradžių vieną radikalą nukelti į dešinę lygties pusę. Tuomet kairėje lygties pusėje būtų likęs vienas radikalas, o pakėlę abi lygties puses kvadratu, kairėje pusėje būtume gavę racionaliąją funkciją.

Tokiu būdu (atskiriant radikalą) gana dažnai sprendžiamos iracionaliosios lygtys.

35 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{x^2+5x+2}-\sqrt{x^2-3x+3}=3.$$

Sprendimas. Atskyrę pirmąjį radikalą, gauname lygtį

$$\sqrt{x^2+5x+2}=\sqrt{x^2-3x+3}+3,$$

ekvivalenčią duotajai (§ 3, 1°).

Pakėlę abi šios lygties puses kvadratu, gauname lygtį

$$x^2+5x+2=9+x^2-3x+3+6\sqrt{x^2-3x+3},$$

ekvivalenčią lygčiai

$$4x-5=3\sqrt{x^2-3x+3}. \qquad (39)$$

(39) lygtis yra pradinės lygties išvada. Pakėlę abi (39) lygties puses kvadratu, turime lygtį

$$16x^2-40x+25=9(x^2-3x+3),$$

arba

$$7x^2-13x-2=0.$$

Ši lygtis yra (39) lygties (vadinasi ir pradinės) išvada ir turi šaknis

$$x_1=2,\ x_2=-\frac{1}{7}.$$

Pirmoji šaknis tinka pradinei lygčiai, o antroji – ne.

Ats. $x=2$.

Jeigu abi duotosios lygties puses, neatskyrę radikalo, išsyk keltume kvadratu, tai turėtume atlikti griozdiškus pertvarkymus.

Spręsdami iracionaliąsias lygtis, be radikalo atskyrimo metodo, taikome ir kitus, atsižvelgdami į lygties išraišką. Pavyzdžiui, išnagrinėsime iracionaliąją lygtį, kuri sprendžiama nežinomojo keitimo metodu.

36 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\frac{x-1}{12-2x}}=\frac{5}{2}.$$

Sprendimas. Pažymėję

$$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=u,$$

duotąją lygtį pakeisime lygtimi

$$u+\frac{1}{u}=\frac{5}{2}.$$

Iš pastarosios gauname jos išvadą

$$2u^2-5u+2=0,$$

turinčią šaknis

$$u_1=2,\ u_2=\frac{1}{2}.$$

Taigi, norėdami surasti duotosios lygties šaknis, turime išspręsti dvi lygtis:

$$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=2, \qquad (40)$$

$$\sqrt[3]{\frac{12-2x}{x-1}}=\frac{1}{2}. \qquad (41)$$

Pakėlę abi (40) lygties puses kubu, gauname lygtį

$$\frac{12-2x}{x-1}=8,$$

turinčią šaknį $x_1=2$.

Analogiškai, išsprendę (41) lygtį, randame $x_2=\frac{97}{17}$.

Abi šios šaknys tinka pradinei lygčiai, nes, spręsdami ją, pertvarkėme (išskyrus nežinomojo keitimą) tik taip:

$$\{f(x)=g(x)\} \Rightarrow \left\{ \left(f(x)\right)^3 = \left(g(x)\right)^3 \right\}$$

ir, kaip jau minėjome (p. 218), gavome ekvivalenčią lygtį.

Ats. $x_1=2$, $x_2=\frac{97}{17}$.

§ 5. Logaritminės ir rodiklinės lygtys

Išnagrinėsime pertvarkymus, kurių dažniausiai prireikia, sprendžiant logaritmines ir rodiklines lygtis.

1°. *Potencijavimas* (antilogaritmavimas). Taip vadiname pertvarkymą kai lygtį

$$\log_{\varphi(x)} f(x)=\log_{\varphi(x)} g(x) \qquad (42)$$

pakeičiame lygtimi

$$f(x)=g(x). \qquad (43)$$

Čia nagrinėjame bendrą atvejį, kai nežinomasis x yra ir logaritmų pagrinde, ir logaritmuojamame reiškinyje. Potencijavimas yra leistina operacija, nes, taip pertvarkant, neprarandama šaknų. Tačiau gali atsirasti pašalinių šaknų. Iš tikrųjų, kai skaičius x_0 yra (42) lygties šaknis, tai (remiantis logaritmų savybėmis) turime:

1) $\varphi(x_0)$ – teigiamas skaičius, nelygus 1;

2) abu skaičiai $f(x_0)$ ir $g(x_0)$ yra teigiami;

3) $f(x_0)=g(x_0)$.

Bet pastaroji lygybė reiškia, kad x_0 – (43) lygties šaknis. Taigi kiekviena (42) lygties šaknis yra ir (43) lygties šaknis, t.y. (43) lygtis yra (42) lygties išvada, todėl prarasti šaknų negalima. Tačiau (43) lygtis gali turėti ir tokių šaknų, kurios netenkins nei pirmosios, nei antrosios sąlygos, t.y. šaknų, netinkančių (42) lygčiai.

37 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\log_2 x=\log_2(6-x^2).$$

Sprendimas. Potencijavę gauname lygtį

$$x=6-x^2,$$

turinčią šaknis $x_1=2$ ir $x_2=-3$.

Patikrinę įsitikiname, kad šaknis $x_1=2$ tinka pradinei lygčiai (įrašę joje, gauname $\log_2 2=\log_2 2$, t.y. $1=1$). Antroji šaknis yra pašalinė: įrašę ją pradinėje lygtyje, po logaritmo ženklu gauname neigiamą skaičių. Taigi pradinė lygtis turi tik vieną šaknį $x=2$; skaičius $x=-3$ nėra jos

šaknis. Kaip matome, potencijavę lygtį, gavome pašalinę šaknį, todėl būtinai reikėjo patikrinti.

2°. *Logaritmavimas.* Logaritmavimas ir potencijavimas – viena kitai atvirkštinės operacijos. Jeigu potencijavimas reiškia, kad (42) lygtis keičiama (43) lygtimi, tai, atvirkščiai, logaritmavimas reiškia, kad (43) lygtis keičiama (42) lygtimi. Kitaip tariant, abi (43) lygties puses logaritmuojame pagrindu $\varphi(x)$. Išsyk aišku, kad logaritmuoti apskritai neleistina. Juk jeigu, (42) lygtį keičiant (43) lygtimi, gali atsirasti pašalinių šaknų, tai, (43) lygtį keičiant (42) lygtimi, dalis (43) lygties šaknų gali išnykti.

38 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$(1+x^2)^{1+\sqrt{x}}=(1+x^2)^{2+\sqrt{x}}.$$

Išlogaritmavę abi lygties puses pagrindu $1+x^2$, gauname lygtį

$$1+\sqrt{x}=2+\sqrt{x},$$

neturinčią šaknų. Tuo tarpu pradinė lygtis, o tai nesunku patikrinti, turi šaknį $x=0$.

Taigi išlogaritmavę netekome šaknų. Vadinasi, šiuo atveju logaritmuoti negalima.

Kada visgi galima logaritmuoti abi lygties puses? Į šį klausimą lengva atsakyti, prisiminus anksčiau suformuluotas tris sąlygas.

Jeigu x_0 – (43) lygties šaknis, t.y. x_0 tenkina trečiąją iš minėtųjų sąlygų, tai skaičius x_0 bus (42) lygties šaknis tik tada, kai galios ir pirmosios dvi sąlygos. Kitaip tariant, (43) lygtį galima keisti (42) lygtimi tik tada, kai esame tikri, jog kiekviena (43) lygties šaknis tenkina pirmąsias dvi sąlygas. Pavyzdžiui, kai bent viena funkcijų $f(x)$, $g(x)$ įgyja tik teigiamas reikšmes, o funkcija $\varphi(x)$ – tik teigiamas ir nelygias 1 reikšmes, logaritmuoti (t.y. (43) lygtį keisti (42) lygtimi) galima, be to, tada (43) $\Leftrightarrow$ (42).

Būtent, kai a – teigiamas skaičius, nelygus 1, ir bent viena funkcijų $f(x)$, $g(x)$ įgyja tik teigiamas reikšmes, tai (43) lygtį galima pakeisti lygtimi

$$\log_a f(x)=\log_a g(x). \tag{44}$$

Šiuo atveju nei prarandame šaknų, nei gauname pašalinių šaknų, t.y. (44) lygtis yra ekvivalenti (43) lygčiai. Pavyzdžiui, lygtis

$$a^{f(x)}=a^{g(x)}, \tag{45}$$

kai a – teigiamas skaičius, nelygus 1, yra ekvivalenti lygčiai

$$f(x)=g(x).$$

39 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2^{x^2-3x}=\frac{1}{4}.$$

Sprendimas. Abi šios lygties pusės su visomis x reikšmėmis yra teigiamos. Jas išlogaritmavę pagrindu 2, gauname

$$x^2-3x=-2.$$

Ši lygtis turi šaknis $x_1=1$, $x_2=2$. Šaknų galima netikrinti. Pradinė lygtis turi dvi šaknis: $x_1=1$, $x_2=2$.

3°. *Pagrindinės logaritminės tapatybės taikymas.*

Pritaikę šią tapatybę, lygtį

$$\varphi(x)^{\log_{\varphi(x)} f(x)}=h(x)$$

pakeičiame lygtimi

$$f(x)=h(x).$$

Taip keisti galima visada, nes šaknų neprarandame. Bet gali atsirasti pašalinių šaknų (dėl tų pačių priežasčių, kaip ir potencijuojant).

40 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$x^{\log_x(x^2+3)}=4.$$

Pritaikę pagrindinę logaritminę tapatybę, gauname lygtį $x^2+3=4$, kurią išsprendę, randame $x_1=1$, $x_2=-1$. Tačiau skaičiai 1 ir -1 nėra pradinės lygties šaknys, nes nei 1, nei -1 negali būti logaritmo pagrindu.

Taigi, pritaikę pagrindinę logaritminę tapatybę, gavome pašalinių šaknų. Vadinasi, taip pakeitus, būtinai reikia patikrinti šaknis.

4°. *Logaritmo pagrindo keitimas.* Išnagrinėsime lygtį

$$\log_{\varphi(x)} f(x)=\log_{p(x)} g(x). \tag{46}$$

Jeigu (46) lygtyje logaritmų pagrindus pakeistume nauju pagrindu $h(x)$, tai gautume lygtį

$$\frac{\log_{h(x)} f(x)}{\log_{h(x)} \varphi(x)}=\frac{\log_{h(x)} g(x)}{\log_{h(x)} p(x)}. \tag{47}$$

Tarkime, kad x_0 – (46) lygties šaknis. Tai reiškia, kad galioja šios sąlygos:

1) funkcijos $\varphi(x)$, $f(x)$, $p(x)$, $g(x)$ apibrėžtos, kai $x=x_0$;

2) $\varphi(x_0)$, $f(x_0)$, $p(x_0)$, $g(x_0)$ – teigiamieji skaičiai, be to, $\varphi(x_0)\neq 1$, $p(x_0)\neq 1$;

3) $\log_{\varphi(x_0)} f(x_0)=\log_{p(x_0)} g(x_0)$.

Kai funkcija $h(x)$ apibrėžta taške $x=x_0$ ir tenkina sąlygas $h(x_0)>0$ ir $h(x_0)\neq 1$, tai reiškiniai $\log_{h(x_0)} f(x_0)$, $\log_{h(x_0)} \varphi(x_0)$, $\log_{h(x_0)} g(x_0)$ ir $\log_{h(x_0)} p(x_0)$ turi prasmę, be to,

$$\log_{h(x_0)} \varphi(x_0)\neq 0, \quad \log_{h(x_0)} p(x_0)\neq 0.$$

Šiuo atveju yra teisinga lygybė (žr. p. 200)

$$\frac{\log_{h(x_0)} f(x_0)}{\log_{h(x_0)} \varphi(x_0)}=\frac{\log_{h(x_0)} g(x_0)}{\log_{h(x_0)} p(x_0)},$$

kuri reiškia, kad x_0 – (47) lygties šaknis.

Taigi, kai funkcija $h(x)$ yra apibrėžta taškuose, kuriuose apibrėžtos (46) lygties kairioji ir dešinioji pusės, ir juose įgyja teigiamas, nelygias 1, reikšmes, tai, pakeitę logaritmų pagrindus nauju pagrindu $h(x)$, šaknų neprarandame. Aišku, kad šiuo atveju (47) lygtį pakeitę (46) lygtimi, šaknų taip pat neprarasime, t.y. (46) ir (47) lygtys yra ekvivalenčios.

Tačiau, kai pagrindą keičiame nauju pagrindu $h(x)$ formaliai, neatsižvelgdami į reikalavimą, kad $h(x)$ turi būti teigiama funkcija, neįgyjanti reikšmės, lygios 1, tai galime prarasti šaknis.

41 pavyzdys. Jeigu lygtyje $\log_{2x} x = \log_{\frac{x}{2}} x$ logaritmų pagrindus pakeistume nauju pagrindu x, tai gautume lygtį

$$\frac{\log_x x}{\log_x 2x} = \frac{\log_x x}{\log_x \frac{x}{2}},$$

kurios kairioji ir dešinioji pusės, kai $x=1$, būtų neapibrėžtos. Bet skaičius $x=1$ – pradinės lygties šaknis. Taigi, formaliai pakeitę logaritmų pagrindus, netenkame šaknies $x=1$. Kad taip neatsitiktų, reikia, kad naujas pagrindas būtų teigiamas skaičius, nelygus 1, o atvejis $x=1$ išnagrinėtas atskirai.

5°. *Logaritmų savybių taikymas.* Apsiribosime tik sandaugos logaritmo formulės taikymu, t.y. lygties

$$\log_{\varphi(x)} f(x) + \log_{\varphi(x)} g(x) = h(x) \tag{48}$$

pakeitimu lygtimi

$$\log_{\varphi(x)} \big(f(x)\, g(x)\big) = h(x). \tag{49}$$

Taip keisti leistina, nes neprarandama šaknų. Tačiau gali atsirasti pašalinių šaknų. Iš tiesų, kai skaičius x_0 – (48) lygties šaknis, tai reiškia, kad galioja šios sąlygos:

1) $\varphi(x_0)$ – teigiamas skaičius, nelygus 1;

2) abu skaičiai $f(x_0)$, $g(x_0)$ – teigiamieji;

3) skaičius x_0 tinka (48) lygčiai.

Taigi pagal logaritmų savybes išplaukia, kad

$$\log_{\varphi(x_0)} f(x_0) + \log_{\varphi(x_0)} g(x_0) = \log_{\varphi(x_0)} \big(f(x_0)\, g(x_0)\big).$$

Vadinasi, x_0 tinka ir (49) lygčiai. Taigi kiekviena (48) lygties šaknis kartu yra ir (49) lygties šaknis, t.y. (49) lygtis yra (48) lygties išvada, todėl šaknų neprarandame. Tuo tarpu (49) lygtis gali turėti tokių šaknų, kurios netenkina 2) sąlygos (nors, kaip ir anksčiau, $f(x_0)\, g(x_0) > 0$), o tenkina sąlygą:

2′) abu skaičiai $f(x_0)$, $g(x_0)$ – neigiamieji.

Tai ir yra priežastis, dėl kurios, pakeitus (48) lygtį (49) lygtimi, gali atsirasti pašalinių šaknų.

42 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\log_6 (x-1) + \log_6 (5x+3) = 2.$$

Sprendimas. Logaritmų sumą pakeitę sandaugos logaritmu, gauname lygtį

$$\log_6 (x-1)(5x+3)=2,$$

kurią potencijavę, turime

$$(x-1)(5x+3)=36.$$

Pastaroji lygtis turi šaknis $x_1=3$, $x_2=-\frac{13}{5}$. Patikrinę įsitikiname, kad x_1 – pradinės lygties šaknis, o x_2 – pašalinė šaknis. Pašalinė šaknis atsirado būtent dėl to, kad taikėme sandaugos logaritmo formulę, o ne dėl potencijavimo (nes x_2 yra tarpinės lygties šaknis).

Atkreipiame dėmesį į tai, kad atvirkščias pertvarkymas (t.y. (49) lygties keitimas (48) lygtimi) apskritai neleistinas, t.y. (49) lygtį pakeitę (48) lygtimi, galime prarasti šaknis. Kad taip neatsitiktų, reikia (49) lygtį pakeisti ne viena (48) lygtimi, o dviejų lygčių

$$\log_{\varphi(x)} f(x) + \log_{\varphi(x)} g(x) = h(x), \tag{50}$$

$$\log_{\varphi(x)} \big(-f(x)\big) + \log_{\varphi(x)} \big(-g(x)\big) = h(x) \tag{51}$$

disjunkcija.

Taip pertvarkę, neprarasime šaknų ir negausime pašalinių šaknų, t.y. (49) $\Leftrightarrow$ {(50) $\vee$ (51)}. Kitaip tariant, sudarę (50) ir (51) lygčių visų šaknų sąjungą, gautume visas (49) lygties šaknis.

Baigdami paragrafą, išnagrinėsime paprasčiausius rodiklinių ir logaritminių lygčių tipus.

A. Rodiklinės lygtys. 1. Tarkime, kad duota lygtis

$$a^{P(x)}=b; \tag{52}$$

čia $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $P(x)$ – tam tikras daugianaris (su realiaisiais koeficientais).

Kadangi abi (52) lygties pusės yra teigiamos, tai, išlogaritmavę jas pagrindu a ($a>0$, $a\neq 1$), gauname lygtį

$$P(x)=\log_a b,$$

ekvivalenčią (žr. 2°) (52) lygčiai.

Kai $b<0$ (jeigu $a>0$, $a\neq 1$), (52) lygtis neturi sprendinių.

43 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$4^{x^2+0,5x}=8.$$

Sprendimas. Turime

$$\{4^{x^2+0,5x}=8\} \Leftrightarrow \{x^2+0,5x=\log_4 8\},$$

iš čia randame $x_1=1$, $x_2=-1,5$.

2. Analogiškai sprendžiamos bendresnės išraiškos lygtys:

$$a_1^{P_1(x)} a_2^{P_2(x)} \ldots a_n^{P_n(x)}=b; \tag{53}$$

čia $a_1, a_2, \ldots, a_n$, b – tam tikri teigiamieji skaičiai, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... $P_n(x)$ – tam tikri daugianariai. Išlogaritmavę abi (53) lygties puses kuriuo nors pagrindu a ($a>0$, $a\neq 1$), gauname lygtį

$$P_1(x)\log_a a_1 + P_2(x)\log_a a_2 + \ldots + P_n(x)\log_a a_n = \log_a b,$$

ekvivalenčią (53) lygčiai.

44 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2^x 3^{x-1} 5^{x+2} = 4.$$

Sprendimas. Išlogaritmavę abi lygties puses pagrindu 2, gauname ekvivalenčią lygtį

$$x + (x-1)\log_2 3 + (x+2)\log_2 5 = 2.$$

Iš čia

$$x = \frac{2 + \log_2 3 - 2\log_2 5}{1 + \log_2 3 + \log_2 5}.$$

3. Išnagrinėsime rodiklinę lygtį

$$P(a^x) = 0; \tag{54}$$

čia a – tam tikras teigiamas skaičius, $a\neq 1$, $P(t)$ – tam tikras daugianaris.

Pakeitę nežinomąjį pagal formulę

$$t = a^x,$$

gauname lygtį

$$P(t) = 0. \tag{55}$$

Tarkime, kad $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – visos teigiamos (55) lygties šaknys . Kadangi lygtis

$$a^x = b \ (a>0,\ a\neq 1)$$

turi sprendinį tada ir tik tada, kai $b>0$, tai pradinės lygties šaknys bus visos lygčių $a^x = t_m$ šaknys, t.y. skaičiai $x = \log_a t_m$ ($m = 1, 2, \ldots, n$).

45 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$81^x - 2\cdot 9^x - 3 = 0.$$

Sprendimas. Pažymėję $t = 9^x$, gauname lygtį

$$t^2 - 2t - 3 = 0,$$

turinčią vieną teigiamą šaknį $t_1 = 3$.

Išsprendę lygtį $9^x = 3$, randame $x = \frac{1}{2}$. Vadinasi, duotoji lygtis turi vienintelę šaknį $x = \frac{1}{2}$. Tikrinti nereikia.

(B) Logaritminės lygtys. 1. Tarkime, kad duota lygtis

$$\log_a P(x) = b; \tag{56}$$

čia a, b – tam tikri skaičiai, $a>0$, $a\neq 1$, $P(x)$ – tam tikras daugianaris.

(56) lygtis, kaip jau minėjome (p. 228), yra ekvivalenti lygčiai

$$P(x)=a^b. \tag{57}$$

Visos (57) lygties šaknys ir tik jos yra (56) lygties šaknys.

46 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\log_{\frac{1}{9}}(2x^2-2x-1)=-\frac{1}{2}.$$

Sprendimas. Lygtis $2x^2-2x-1=\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$, ekvivalenti duotajai lygčiai, turi dvi šaknis: $x_1=-1$, $x_2=2$.

Ats. $x_1=-1$, $x_2=2$.

2. Išnagrinėsime bendresnės išraiškos lygtį

$$n_1\log_a P_1(x)+n_2\log_a P_2(x)+\ldots+n_k\log_a P_k(x)=b; \tag{58}$$

čia a, b – tam tikri skaičiai, $a>0$, $a\neq 1$; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – tam tikri sveikieji skaičiai; $P_1(x)$, $P_2(x)$, ... $P_k(x)$ – tam tikri daugianariai.

Potencijavę (58) lygtį pakeičiame lygtimi

$$(P_1(x))^{n_1}(P_2(x))^{n_2}\ldots(P_k(x))^{n_k}=a^b. \tag{59}$$

(59) lygtis, kaip jau minėjome (p. 224, 225 ir 227), yra (58) lygties išvada.

(58) lygties šaknys bus tos ir tik tos (59) lygties šaknys, su kuriomis kiekvienas daugianaris $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_k(x)$ įgyja teigiamą reikšmę.

47 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2\log_3(x-2)-\log_3\left(x^2-4x+\frac{28}{9}\right)=2. \tag{60}$$

Sprendimas. Potencijavę (60) lygtį, gauname lygtį

$$\frac{(x-2)^2}{x^2-4x+\frac{28}{9}}=9, \tag{61}$$

turinčią šaknis $x_1=1$, $x_2=3$.

(60) lygties šaknys bus tos iš gautųjų šaknų, kurios tenkina abi nelygybes

$$\begin{cases} x-2>0, \\ x^2-4x+\frac{28}{9}>0. \end{cases} \tag{62}$$

(62) nelygybes tenkina tik skaičius $x_2=3$; skaičius $x_1=1$ jų netenkina.

Ats. $x=3$.

3. Išnagrinėsime lygtį

$$\log_{P(x)} N=n; \tag{63}$$

čia N – tam tikras teigiamas skaičius, n – tam tikras sveikasis skaičius, $P(x)$ – tam tikras daugianaris.

Verta įsidėmėti, kad kairioji (63) lygties pusė turi prasmę tik su tomis x reikšmėmis, su kuriomis $P(x)>0$, $P(x)\neq 1$. Potencijavę (63) lygtį pakeičiame lygtimi

$$(P(x))^n = N, \tag{64}$$

kuri yra (63) lygties išvada.

(63) lygties šaknys bus tos ir tik tos (64) lygties šaknys, su kuriomis $P(x)>0$, $P(x)\neq 1$.

48 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\log_{x-1} 9 = 2.$$

Sprendimas. Išsprendę lygtį $(x-1)^2=9$, randame $x_1=4$, $x_2=-2$. Sąlygas $x-1>0$, $x-1\neq 1$ tenkina tik šaknis $x_1=4$.

Ats. $x=4$.

IX skyriaus uždaviniai

9.1. Ar galima tvirtinti, kad iš teisingos skaitinės lygybės gauname teisingą lygybę:

a) prie abiejų lygybės pusių pridėję tą patį skaičių;

b) abi lygybės puses padauginę iš to paties skaičiaus;

c) abi lygybės puses pakėlę tuo pačiu laipsniu n (n – natūrinis skaičius)?

9.2. Ar galima tvirtinti, kad, atlikę pirmajame uždavinyje nurodytus pertvarkymus, iš neteisingų skaitinių lygybių gausime neteisingas lygybes?

9.3. Tarkime, kad $a^2=b^2$ – neteisinga lygybė. Ar galima tvirtinti, kad $a=b$ irgi yra neteisinga lygybė?

9.4. Įrodykite, kad lygčių ekvivalentumo sąvoka turi tranzityvumo savybę: kai lygtis A ekvivalenti lygčiai B, o lygtis B ekvivalenti lygčiai C, tai A ir C – ekvivalenčios lygtys, t.y. kai $A\Leftrightarrow B$, $B\Leftrightarrow C$, tai $A\Leftrightarrow C$.

9.5. Įrodykite, kad lygčių išvados sąvoka turi tranzityvumo savybę: kai lygtims A, B ir C galioja sąryšiai $A\Rightarrow B$, $B\Rightarrow C$, tai $A\Rightarrow C$.

9.6. Tarkime, kad lygtims A, B ir C galioja sąryšiai $A\Leftrightarrow B$, $B\Rightarrow C$. Įrodykite, kad $A\Rightarrow C$.

9.7. Įrodykite, kad visų realiųjų skaičių aibėje lygtys $x^2=2x-1$ ir $x^2(x^4+1)=(2x-1)(x^4+1)$ yra ekvivalenčios.

9.8. Tarkime, kad funkcijos $f(x)$, $g(x)$, $f_1(x)$, $g_1(x)$ ir $\varphi(x)$ apibrėžtos realiųjų skaičių aibėje M. Patikrinkite, ar žemiau surašytos lygčių poros yra ekvivalenčios šioje aibėje. Kuri iš dviejų kiekvienos poros lygčių yra kitos lygties išvada?

a) $f(x)=g(x)$ ir $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{g(x)}$;

b) $f(x)=g(x)$ ir $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$;

c) $f(x)=g(x)$ ir $\sin f(x)=\sin g(x)$;

d) $f(x)=g(x)$ ir $\arcsin f(x)=\arcsin g(x)$;

e) $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ ir $f(x)\,g_1(x)=f_1(x)\,g(x)$;

f) $\sqrt{f(x)}\,\sqrt{g(x)}=\varphi(x)$ ir $\sqrt{f(x)\,g(x)}=\varphi(x)$.

9.9. Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos realiųjų skaičių aibėje M ir įgyja joje realias vienodo ženklo reikšmes. Įrodykite, kad aibėje M $\{f(x)=g(x)\} \Leftrightarrow \{(f(x))^2=(g(x))^2\}$.

9.10. Įrodykite, kad lygtis $(f(x))^2=(g(x))^2$ gali turėti šaknis, nelygias lygties $f(x)=g(x)$ šaknims, ir kad šios šaknys, jei tik jos yra, tinka lygčiai $f(x)+g(x)=0$.

9.11. Tarkime, kad funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžtos aibėje M, o E_1 ir E_2 – atitinkamai funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmių aibės. Dar tarkime, kad funkcija $\varphi(t)$ apibrėžta aibėje $E=E_1 \cap E_2$. Įrodykite, kad aibėje M lygtis $\varphi(f(x))=\varphi(g(x))$ yra lygties $f(x)=g(x)$ išvada.

9.12. Nežinomojo keitimo metodu išspręskite lygtis:

a) $(x^2-2x)^2-2x^2+4x-3=0$;

b) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$.

Išspręskite iracionaliąsias lygtis (**9.13–9.22**):

9.13. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=9$.

9.14. $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7}=4$.

9.15. $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16}=-1$.

9.16. $\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{2x^2+3x-5}=1$.

9.17. $2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9}=1$.

9.18. $\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}=2$.

9.19. $\sqrt[3]{5+x}-2\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[6]{25-x^2}$.

9.20. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=0$.

9.21. $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}}=1$.

9.22. $\sqrt[4]{78+x}+\sqrt[4]{259-x}=7$.

Išspręskite rodiklines lygtis (**9.23–9.41**):

9.23. $3^{9x+1}=9^{3x-1}$. **9.24.** $4^{x^2-x+1}=8^x$.

9.25. $2\left(2^{3+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=16^{\frac{1}{\sqrt{x}-1}}$.

9.26. $2\cdot 3^{x+3}+7\cdot 3^{x-2}=493$.

9.27. $5^{2x-1}-5^x=100$. **9.28.** $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$.

9.29. $3\cdot 4^{x-1}+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+1}=6\cdot 2^{2x}-\frac{1}{2}\cdot 3^{2x}$.

9.30. $2^{2x}\cdot 9^{x}-2\cdot 6^{3x-1}+4^{2x-1}\cdot 3^{4x-2}=0$.

9.31. $2^{3x}\cdot 3^{x}-2^{3x-1}\cdot 3^{x+1}+288=0$.

9.32. $3\cdot 4^{x}+2\cdot 9^{x}=5\cdot 6^{x}$.

9.33. $5^{1+\frac{2}{x}}-7\cdot 10^{\frac{1}{x}}+2\cdot 4^{\frac{1}{x}}=0$.

9.34. $4\sqrt[x]{81}-12\sqrt[x]{36}+9\sqrt[x]{16}=0$.

9.35. $\left(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}}\right)^{x}+\left(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}\right)^{x}=6$.

9.36. $5^{2x}-3^{x}-15\cdot 25^{x}+15\cdot 3^{x}=0$.

9.37. $5^{3x}+5^{3(1-x)}+15\,(5^{x}+5^{1-x})=216$.

9.38. $8^{x+1}+8\cdot(0{,}5)^{3x}+3\cdot 2^{x+3}=125-24\cdot(0{,}5)^{x}$.

9.39. $\sqrt[n]{x^{x}}=x^{\sqrt[n]{x}}$ (n – natūrinis skaičius).

9.40. $x^{x^{n}}=\sqrt[n]{x^{x}}$ (n – natūrinis skaičius).

9.41. $(x^{x})^{n}=x^{\sqrt[n]{x}}$ (n – natūrinis skaičius).

Išspręskite logaritmines lygtis **(9.42–9.47)**:

9.42. $\log_4(\log_3(\log_2 x))=\frac{1}{2}$.

9.43. $\lg(x^2+19)-\lg(x-8)=2$.

9.44. $\sqrt{5\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}$.

9.45. $\log_x 3\cdot\log_{\frac{x}{3}}3+\log_{\frac{x}{81}}3=0$.

9.46. $\log_{16x}x^3+\log_{\frac{x}{2}}\sqrt{x}=2$.

9.47. $\log_a(ax)\cdot\log_x(ax)=\log_{a^2}\frac{1}{a}$, $a>0$, $a\neq 1$.

9.48. Su kuriomis k reikšmėmis lygtis $\frac{\lg(kx)}{\lg(x+1)}=2$ turi tik vieną šaknį?

9.49. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis $\frac{\lg x}{\lg(x-a-a^2)}=2$ turi bent vieną sprendinį? Raskite visus sprendinius.

Išspręskite lygtis **(9.50–9.55)**:

9.50. $\lg(x^2-x-6)+x=\lg(x+2)+4$.

9.51. $2x-\lg(5^{2x}+x-2)=\lg 4^{x}$.

9.52. $\log_3(4\cdot 3^{x}-1)=2x+1$.

9.53. $\log_2(2^{x}+1)\cdot\log_2(2^{x+1}+2)=2$.

9.54. $90\cdot 3^{\log_x 4}-\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_x\frac{1}{8}}=81^{\log_x 2}$.

9.55. $(0{,}1)\cdot x^{\lg x-1}=10$.

X SKYRIUS

LYGČIŲ SISTEMOS

§ 1. Ekvivalenčios lygčių sistemos. Sistema, kuri yra duotosios sistemos išvada

Šiame skyriuje paprastumo dėlei nagrinėsime lygčių su dviem nežinomaisiais sistemas. Tačiau pagrindiniai rezultatai yra teisingi ir lygčių su didesniu nežinomųjų skaičiumi sistemoms.

Dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemą rašysime taip:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y). \end{cases} \tag{1}$$

(1) *sistemos sprendiniu vadiname porą skaičių* $(x_0;\ y_0)$, *kuriuos įrašę atitinkamai vietoj x ir y, iš kiekvienos* (1) *sistemos lygties gauname teisingą skaitinę lygybę, t.y.*

$$f_1(x_0, y_0) = g_1(x_0, y_0),\ f_2(x_0, y_0) = g_2(x_0, y_0).$$

Išspręsti sistemą – reiškia rasti visus jos sprendinius.

Riestiniai skliaustai, rašomi sistemose (žr. (1)), pakeičia *konjunkcijos ženklą*. Iš tiesų, spręsdami sistemą, ieškome tokių porų skaičių $(x_0;y_0)$, kuriuos įrašę ir pirmojoje, ir antrojoje sistemos lygtyje, gauname teisingas skaitines lygybes.

Dvi lygčių sistemas

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

ir

$$\begin{cases} f_3(x, y) = g_3(x, y), \\ f_4(x, y) = g_4(x, y) \end{cases} \tag{3}$$

vadiname ekvivalenčiomis, kai jos turi vienus ir tuos pačius sprendinius, t.y. kiekvienas (2) *sistemos sprendinys yra* (3) *sistemos sprendinys ir, atvirkščiai, kiekvienas* (3) *sistemos sprendinys yra* (2) *sistemos sprendinys.*

Sistemų ekvivalentumo sąvoka priklauso nuo to, kokioje aibėje jos sprendžiamos. Štai sistema

$$\begin{cases} (x^2 + y^2 + 1)(x + y) = 0, \\ x - y = 0, \end{cases}$$

kai ieškome tik realiųjų jos sprendinių, yra ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x+y=0, \\ x-y=0, \end{cases}$$

ir neekvivalenti jai, jeigu duotąją sistemą sprendžiame kompleksinių skaičių aibėje.

Iš sistemų ekvivalentumo apibrėžimo išplaukia, kad bet kokios dvi sistemos, neturinčios sprendinių (nesuderintos sistemos), yra ekvivalenčios.

Iš sistemų ekvivalentumo apibrėžimo taip pat išplaukia, kad, pakeitę bet kurią sistemos lygtį jai ekvivalenčia lygtimi, gausime sistemą, ekvivalenčią pradinei. Pavyzdžiui, (1) sistema yra ekvivalenti tokiai sistemai:

$$\begin{cases} f_1(x, y)-g_1(x, y)=0, \\ f_2(x, y)-g_2(x, y)=0. \end{cases}$$

Taigi bet kokiai dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemai galima suteikti išraišką

$$\begin{cases} F_1(x, y)=0, \\ F_2(x, y)=0. \end{cases}$$

Lygčių sistemą

$$\begin{cases} f_5(x, y)=g_5(x, y), \\ f_6(x, y)=g_6(x, y) \end{cases} \tag{4}$$

vadiname (1) sistemos *išvada*, kai kiekvienas (1) sistemos sprendinys yra (4) sistemos sprendinys. Analogiškai lygtis

$$F(x, y)=G(x, y) \tag{5}$$

yra (1) sistemos išvada, kai kiekvienas (1) sistemos sprendinys tinka (5) lygčiai.

Iš ekvivalentumo bei išvados apibrėžimo tiesiogiai išplaukia, kad *prie sistemos galima prijungti bet kokią lygtį, kuri yra jos išvada*; *taip padarius, sistemos sprendinių aibė nesikeičia.* Kitaip tariant, kai (5) lygtis yra (1) sistemos išvada, tai (1) sistema yra ekvivalenti trijų lygčių (1), (5) sistemai.

1 pavyzdys. Raskite realiuosius lygčių sistemos

$$\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x} \end{cases}$$

sprendinius.

Sprendimas. Sudauginę lygtis, gauname

$$(xy+24)(xy-6)=x^2y^2,$$

arba

$$xy=8. \tag{6}$$

(6) lygtis yra pradinės sistemos išvada. Todėl, prijungę (6) lygtį prie duotosios sistemos, gauname sistemą

$$\begin{cases} xy=8, \\ xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}, \end{cases}$$

ekvivalenčią duotajai. Panaudoję šios sistemos pirmąją lygtį, galėsime lengvai suprastinti antrąją ir trečiąją lygtis. Taigi turėsime sistemą

$$\begin{cases} xy=8, \\ \dfrac{x^3}{y}=32, \\ \dfrac{y^3}{x}=2. \end{cases}$$

Jeigu dabar panariui sudaugintume pirmąją ir antrąją šios sistemos lygtis, tai gautume lygtį $x^4=8\cdot32=2^8$, kuri yra šios sistemos išvada. Lygiai taip pat, sudauginę pirmąją ir trečiąją lygtis, gautume lygtį $y^4=16=2^4$. Taigi turime sistemą

$$\begin{cases} x^4=2^8, \\ y^4=2^4, \end{cases}$$

kuri yra duotosios sistemos išvada.

Kadangi ieškome tik realiųjų sprendinių, tai iš šios sistemos randame

$$x=\pm4, \; y=\pm2.$$

Panaudoję (6) lygtį, gauname du realiuosius sprendinius: $(-4;\ -2)$ ir ir $(4;\ 2)$. Patikrinę įsitikiname, kad abu sprendiniai tinka pradinei sistemai.

§ 2. Pagrindiniai sistemų sprendimo būdai ir metodai

Spręsdami lygčių sistemas, naudojame įvairius būdus ir metodus: sistemos tiesinio transformavimo metodą, sistemos keitimą paprastesnių sistemų disjunkcija, keitimo metodą, nežinomųjų eliminavimo metodą, nežinomųjų keitimo metodą ir kt.

Naudodami šiuos metodus (esant apibrėžtoms sąlygoms), duotąją sistemą keičiame jai ekvivalenčia paprastesne sistema, o paskui sprendžiame šią paprastesnę sistemą (arba paprastesnių sistemų visumą).

Nagrinėsime išvardytus lygčių sistemų sprendimo metodus.

1°. Sistemos tiesinio transformavimo metodas. Duota lygčių sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y)=0, \\ f_2(x, y)=0. \end{cases} \qquad (7)$$

Sakysime, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} a_1 f_1(x, y)+a_2 f_2(x, y)=0, \\ b_1 f_1(x, y)+b_2 f_2(x, y)=0 \end{cases} \qquad (8)$$

gauta iš (7) sistemos *tiesiniu transformavimu* (a_1, a_2, b_1, b_2 – tam tikri skaičiai), o skaičių

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=a_1 b_2-a_2 b_1$$

vadinsime šio tiesinio transformavimo *determinantu.*

Tokių pertvarkymų dažnai prireikia, sprendžiant sistemas. Pavyzdžiui, panagrinėsime lygčių sistemą

$$\begin{cases} f_1(x, y)+f_2(x, y)=0, \\ f_1(x, y)-f_2(x, y)=0, \end{cases}$$

kuri gaunama iš (7) sistemos, sudėjus ir atėmus jos lygtis. Nesunku patikrinti, kad ši sistema yra ekvivalenti (7) sistemai.

Kyla natūralus klausimas: kokiu atveju (8) sistema, gauta tiesiniu transformavimu iš (7) sistemos, yra ekvivalenti (7) sistemai? Į šį klausimą atsako tokia teorema.

1 teorema. *Kai*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0, \qquad (9)$$

tai (8) *sistema ekvivalenti* (7) *sistemai.*

Įrodymas. Tarkime, kad $(x_0; y_0)$ – (7) sistemos sprendinys. Tuomet yra teisingos skaitinės lygybės

$$f_1(x_0, y_0)=0, \; f_2(x_0, y_0)=0.$$

Iš čia išplaukia, kad su bet kokiais a_1, a_2, b_1, b_2 yra teisingos skaitinės lygybės

$$\begin{cases} a_1 f_1(x_0, y_0)+a_2 f_2(x_0, y_0)=0, \\ b_1 f_1(x_0, y_0)+b_2 f_2(x_0, y_0)=0, \end{cases}$$

t.y. (x_0, y_0) – (8) sistemos sprendinys.

Dabar tarkime, kad (9) sąlyga galioja. Įrodysime, kad tada kiekvienas (8) sistemos sprendinys tiks ir (7) sistemai. Sakykime, kad $(x_1; y_1)$ – (8) sistemos sprendinys. Tada yra teisingos skaitinės lygybės

$$\begin{cases} a_1 f_1(x_1, y_1)+a_2 f_2(x_1, y_1)=0, \\ b_1 f_1(x_1, y_1)+b_2 f_2(x_1, y_1)=0. \end{cases} \qquad (10)$$

Trumpumo dėlei pažymėsime

$$t_1 = f_1(x_1, y_1), \quad t_2 = f_2(x_1, y_1).$$

Tada (10) sistema atrodys taip:

$$\begin{cases} a_1 t_1 + a_2 t_2 = 0, \\ b_1 t_1 + b_2 t_2 = 0. \end{cases} \tag{11}$$

Įrodysime, kad iš (11) sistemos, kai $\Delta \neq 0$, išplaukia lygybės

$$t_1 = f_1(x_1, y_1) = 0, \quad t_2 = f_2(x_1, y_1) = 0. \tag{12}$$

Išnagrinėsime dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais u ir v sistemą

$$\begin{cases} a_1 u + a_2 v = 0, \\ b_1 u + b_2 v = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Kadangi galioja (11) lygybės, tai skaičių $(t_1;\ t_2)$ pora sudaro (13) sistemos sprendinį. Skaičių $(0;\ 0)$ pora irgi, aišku, yra šios sistemos sprendinys. Kadangi (13) sistemos determinantas $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ nelygus nuliui ((9) sąlyga), tai (13) sistema turi tik vieną sprendinį. Vadinasi, $t_1 = 0$, $t_2 = 0$.

Taigi įrodėme, kad (12) lygybės yra teisingos. Vadinasi, $(x_1;\ y_1)$ – (7) sistemos sprendinys.

1 teorema įrodyta.

2°. Sistemos keitimas paprastesnių sistemų disjunkcija. Sakysime, kad *lygčių sistema*

$$\begin{cases} f_1(x,\ y) = 0, \\ f_2(x,\ y) = 0 \end{cases} \tag{14}$$

yra ekvivalenti sistemų

$$\begin{cases} g_1(x,\ y) = 0, \\ g_2(x,\ y) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

ir

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\ y) = 0, \\ \varphi_2(x,\ y) = 0 \end{cases} \tag{16}$$

disjunkcijai, kai kiekvienas (14) sistemos sprendinys yra bent vienos iš (15), (16) sistemų sprendinys ir bet koks kiekvienos (15), (16) sistemos sprendinys yra (14) sistemos sprendinys.

Vietoj žodžių „(14) sistema yra ekvivalenti (15) ir (16) sistemų disjunkcijai“ taip pat galima sakyti „(14) sistema *išsiskaido* į dvi (15) ir (16) sistemas“ arba „(14) sistema *ekvivalenti* (15) ir (16) sistemų visumai“.

Suprantama, galima kalbėti ir apie (14) sistemos ekvivalentumą trijų ir daugiau sistemų disjunkcijai.

2 pavyzdys. Lygčių sistema

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ xy - 1 = 0 \end{cases}$$

ekvivalenti sistemų

$$\begin{cases} x-y=0, \\ xy-1=0 \end{cases} \text{ ir } \begin{cases} x+y=0, \\ xy-1=0 \end{cases}$$

disjunkcijai.

2 teorema. *Kai funkcijos* $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, ..., $f_k(x, y)$, $g(x, y)$ *apibrėžtos tam tikroje aibėje* M, *tai lygčių sistema*

$$\begin{cases} f_1(x, y) f_2(x, y) \dots f_k(x, y)=0, \\ g(x, y)=0 \end{cases} \qquad (17)$$

šioje aibėje yra ekvivalenti sistemų

$$\begin{cases} f_1(x, y)=0, \\ g(x, y)=0, \end{cases} \begin{cases} f_2(x, y)=0, \\ g(x, y)=0, \end{cases} \dots \begin{cases} f_k(x, y)=0, \\ g(x, y)=0 \end{cases} \qquad (18)$$

disjunkcijai.

Įrodymas. Tarkime, kad $(x_0; y_0) \in M$ ir, be to, $(x_0; y_0)$ – (17) sistemos sprendinys. Tada visos funkcijos, kurios yra kairiojoje (17) sistemos pusėje, kai $x=x_0$, $y=y_0$, yra apibrėžtos. Be to, teisingos skaitinės lygybės

$$\begin{cases} f_1(x_0, y_0) f_2(x_0, y_0) \dots f_k(x_0, y_0)=0, & (19) \\ g(x_0, y_0)=0. & (20) \end{cases}$$

Iš (19) lygybės išplaukia, kad bent vienas skaičių $f_p(x_0, y_0)$ $(p=1, 2, \dots, k)$ yra lygus nuliui. Tarkime, pavyzdžiui, kad

$$f_1(x_0, y_0)=0. \qquad (21)$$

Iš (20) ir (21) lygybių išplaukia, kad $(x_0; y_0)$ – vienos iš (18) sistemų, būtent, sistemos

$$\begin{cases} f_1(x, y)=0, \\ g(x, y)=0 \end{cases}$$

sprendinys (be to, $(x_0; y_0) \in M$). Atvirkščiai, tarkime, kad $(x_0; y_0)$ – sistemos

$$\begin{cases} f_p(x, y)=0, \\ g(x, y)=0 \end{cases}$$

sprendinys (čia p – vienas iš skaičių $1, 2, \dots, k$), be to, $(x_0; y_0) \in M$. Tada $f_p(x_0, y_0)=0$, $g(x_0, y_0)=0$, be to, taške $(x_0; y_0)$ yra apibrėžtos visos funkcijos $f_1(x, y)$, ..., $f_k(x, y)$. Iš čia išplaukia, kad skaičių $(x_0; y_0)$ pora tinka ir (17) sistemai. Teorema įrodyta.

Pastaba. Kiekvienas (17) sistemos sprendinys yra vienos iš (18) sistemų sprendinys. Atvirkščias tvirtinimas, kalbant apskritai, yra neteisingas. Taip yra dėl to, kad viena iš (18) sistemų (pavyzdžiui, sistema $f_1(x, y)=0$, $g(x, y)=0$) gali turėti tokį sprendinį $(x_0; y_0)$, kuris nepriklausys kurios nors funkcijos $f_2(x, y)$, ..., $f_k(x, y)$ apibrėžimo sričiai. Vadinasi, jis nebus (17) sistemos sprendinys.

Todėl, spręsdami (17) išraiškos sistemas, paprastai darome taip. Surandame visų (18) sistemų visus sprendinius ir, įrašę juos (17) sistemoje, atrenkame tuos, kurie netinka (17) sistemai (nepriklauso (17) sistemos pirmosios lygties kairiosios pusės apibrėžimo sričiai).

Siūlome skaitytojams įrodyti, kad yra teisinga bendresnė teorema.

3 teorema. *Kai funkcijos* $f_p(x, y)$ *ir* $g_m(x, y)$ $(p=1, \ldots, k;\ m=1, \ldots, n)$ *apibrėžtos aibėje* M, *tai šioje aibėje lygčių sistema*

$$\begin{cases} f_1(x, y) f_2(x, y) \ldots f_k(x, y)=0, \\ g_1(x, y) g_2(x, y) \ldots g_n(x, y)=0 \end{cases}$$

yra ekvivalenti kn sistemų

$$\begin{cases} f_p(x, y)=0, \\ g_m(x, y)=0, \end{cases} \quad (p=1, 2, \ldots, k;\ m=1, 2, \ldots, n)$$

disjunkcijai.

3°. Keitimo metodas. Taikydami šį metodą, lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos sprendimą pakeičiame vienos lygties su vienu nežinomuoju sprendimu. Keitimo metodas pagrįstas šia teorema.

4 teorema. *Lygčių sistema*

$$\begin{cases} x=\varphi(y), \\ F(x, y)=0 \end{cases} \tag{22}$$

yra ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} x=\varphi(y), \\ F(\varphi(y), y)=0. \end{cases} \tag{23}$$

Įrodymas. Tarkime, kad $(x_0; y_0)$ – (22) sistemos sprendinys. Tada teisingos skaitinės lygybės

$$x_0=\varphi(y_0), \tag{24}$$

$$F(x_0, y_0)=0. \tag{25}$$

Iš (24) ir (25) lygybių išplaukia, kad

$$F(\varphi(y_0), y_0)=0. \tag{26}$$

(24) ir (26) lygybės rodo, kad $(x_0; y_0)$ – (23) sistemos sprendinys.

Atvirkščiai, sakykime, kad $(x_0; y_0)$ – (23) sistemos sprendinys. Tuomet teisingos (24) ir (26) skaitinės lygybės, iš kurių išplaukia (25) lygybė. (24) ir (25) lygybės rodo, kad $(x_0; y_0)$ – (22) sistemos sprendinys. Teorema įrodyta.

3 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x=y^2+1, \\ xy=y^2+y^3. \end{cases}$$

Sprendimas. Ši sistema pagal 4 teoremą yra ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} x=y^2+1, \\ (y^2+1)\,y=y^2+y^3, \end{cases}$$

t.y. sistemai

$$\begin{cases} x=y^2+1, \\ y=y^2. \end{cases}$$

Pastaroji sistema išsiskaido į dvi sistemas:

$$\begin{cases} x=y^2+1, \\ y=0 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x=y^2+1, \\ y=1. \end{cases}$$

Ats. (1; 0), (2; 1).

4°. Nežinomojo eliminavimo metodas. Tarkime, kad duota sistema

$$\begin{cases} F_1(x,\ y)=0, \\ F_2(x,\ y)=0, \end{cases} \tag{27}$$

kurios vieną lygtį, pavyzdžiui pirmąją, galima išspręsti nežinomojo x (arba y) atžvilgiu. Tikslumo dėlei tarkime, kad lygtis $F_1(x, y)=0$ ekvivalenti lygčiai $x=\varphi(y)$. Tada pagal 4 teoremą (27) sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} x=\varphi(y), & (28) \\ F_2\big(\varphi(y),\ y\big)=0, & (29) \end{cases}$$

t.y. galioja tokia teorema.

5 teorema. *Kai lygtis* $F_1(x, y)=0$ *ekvivalenti lygčiai* $x=\varphi(y)$, *tai* (27) *lygčių sistema ekvivalenti* (28)–(29) *lygčių sistemai.*

Vadinasi, (28)–(29) lygčių sistemos sprendimas pakeičiamas lygties $F_2\big(\varphi(y), y\big)=0$ sprendimu. Taigi iš sistemos eliminavome nežinomąjį x, o vietoj šios sistemos turime spręsti lygtį su vienu nežinomuoju. Todėl toks sprendimo būdas vadinamas *nežinomojo eliminavimo metodu.*

Suradę visas (29) lygties šaknis $y_1, y_2, \ldots, y_m$, iššyk galėsime parašyti visus (27) sistemos sprendinius:

$$\big(\varphi(y_1);\ y_1\big),\quad \big(\varphi(y_2);\ y_2\big),\ \ldots,\ \big(\varphi(y_m);\ y_m\big).$$

4 pavyzdys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+4=y^3, \\ x^2-y^6=8 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius.

Iš pirmosios lygties turime $x=y^3-4$. Įrašę šią reikšmę į antrąją lygtį, gauname $y^3=1$.

Lygtis $y^3=1$ turi vieną realiąją šaknį $y=1$.

Ats. (−3; 1).

5°. Nežinomųjų keitimo metodas (įvedant naujus nežinomuosius). Nežinomųjų keitimo metodą iš pradžių paaiškinsime pavyzdžiu.

5 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{36}. \end{cases}$$

Sprendimas. Įvedame naujus nežinomuosius $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{1}{y}$. Tada duotoji sistema atrodys taip:

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{5}{6}, \\ u^2-v^2=\dfrac{5}{36}. \end{cases}$$

Ši lygčių sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} u+v=\dfrac{5}{6}, \\ u-v=\dfrac{1}{6}, \end{cases}$$

turinčiai vienintelį sprendinį $u=\frac{1}{2}$, $v=\frac{1}{3}$. Vadinasi, pradinė sistema turi vieną sprendinį (2; 3).

Ats. (2; 3).

Bendru atveju nežinomųjų keitimo metodo (dviejų lygčių su dviem nežinomaisiais sistemos atveju) esmę galima paaiškinti taip.

Duota lygčių sistema

$$\begin{cases} F_1(x, y)=0, \\ F_2(x, y)=0. \end{cases} \qquad (30)$$

Jos funkcijas $F_1(x, y)$ ir $F_2(x, y)$ galima išreikšti taip:

$$\begin{cases} F_1(x, y)\equiv f_1(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)), \\ F_2(x, y)\equiv f_2(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)). \end{cases} \qquad (31)$$

Pažymėję

$$\varphi_1(x, y)=u, \quad \varphi_2(x, y)=v, \qquad (32)$$

(30) sistemą, galiojant (31) lygybėms, galėsime pakeisti sistema

$$\begin{cases} f_1(u, v)=0, \\ f_2(u, v)=0. \end{cases} \qquad (33)$$

Sakykime, kad (33) sistemą sugebame išspręsti, o $(u_k;\ v_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ – visi (33) sistemos sprendiniai. Tada, išsprendę n sistemų lygtis

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\ y)=u_k, \\ \varphi_2(x,\ y)=v_k \end{cases} \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{34}$$

ir sudarę (34) sistemų sprendinių sąjungą, rasime visus (30) sistemos sprendinius.

* *
*

Visi išnagrinėtieji metodai turi vieną bendrą ypatybę: jie leidžia duotąją sistemą pakeisti kita sistema (arba sistemų visuma), ekvivalenčia duotajai sistemai.

§ 3. Dviejų antrojo laipsnio lygčių su dviem nežinomaisiais homogeninės sistemos

Dviejų antrojo laipsnio lygčių su dviem nežinomaisiais *homogeninėmis* sistemomis vadinsime sistemas

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2=d_1, & (35) \\ a_2x^2+b_2xy+c_2y^2=d_2. & (36) \end{cases}$$

Iš pradžių tarkime, kad abu skaičiai d_1, d_2 yra nelygūs nuliui. Padauginę (35) lygtį iš d_2, o (36) lygtį iš $-d_1$ ir sudėję jas, gauname lygtį

$$Ax^2+Bxy+Cy^2=0, \tag{37}$$

kuri yra (35)–(36) lygčių sistemos išvada. Iš 1 teoremos (p. 237) išplaukia, kad duotoji (35)–(36) lygčių sistema yra ekvivalenti (35, (37) lygčių sistemai. Taigi toks laisvųjų narių „panaikinimo" metodas leidžia sistemą, sudarytą iš (35)–(36) lygčių, kurių dešiniosios pusės nelygios nuliui, pakeisti tos pačios išraiškos sistema, kurioje jau vienas iš skaičių d_1, d_2 yra lygus nuliui.

Tarkime, kad turime sistemą, kurią sudaro (35) ir (37) lygtys (čia galimi du atvejai: $d_1 \neq 0$, $d_1=0$). Išnagrinėsime, kaip surasti šios sistemos tuos sprendinius, kurių $y \neq 0$ (rasti sprendinius, kurių $y=0$, jei tik tokių yra, nesudėtinga). Kai $y \neq 0$, (37) lygtis yra ekvivalenti lygčiai

$$A\left(\frac{x}{y}\right)^2+B\left(\frac{x}{y}\right)+C=0. \tag{38}$$

Norint išspręsti (35) ir (38) lygčių sistemą, reikia išspręsti (38) lygtį kaip kvadratinę nežinomojo $\frac{x}{y}$ atžvilgiu. Paskui, įrašius gautąsias $\frac{x}{y}$ reikšmes į (35) lygtį, rasti sistemos, kurią sudaro (35) ir (38) lygtys, sprendinius.

6 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=3, & (39) \\ 5x^2-2xy-y^2=5. & (40) \end{cases}$$

Sprendimas. Padauginę pirmąją lygtį iš 5, o antrąją iš 3 ir atėmę, gauname

$$13y^2+21xy-10x^2=0. \qquad (41)$$

Taigi turime išspręsti sistemą, kurią sudaro (39) ir (41) lygtys ir kuri ekvivalenti pradinei. Kai $y=0$, tai iš (41) lygties gauname $x=0$, bet pora $(0; 0)$ netinka (39) lygčiai. Vadinasi, $y\neq0$. Todėl (41) lygtį galima pakeisti lygtimi

$$10\left(\frac{x}{y}\right)^2-21\left(\frac{x}{y}\right)-13=0, \qquad (42)$$

iš kurios gauname

$$\left(\frac{x}{y}\right)_1=-\frac{1}{2}, \quad \left(\frac{x}{y}\right)_2=\frac{13}{5}.. \qquad (43)$$

Vadinasi, sistema, kurią sudaro (39) ir (42) lygtys, yra ekvivalenti pradinei sistemai, o atsižvelgus į (43) lygybes, ji ekvivalenti šių dviejų sistemų disjunkcijai (išsiskaido į dvi sistemas):

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=3, \\ y=-2x \end{cases}$$

ir

$$\begin{cases} x^2+3xy+2y^2=3, \\ y=\frac{5}{13}x. \end{cases}$$

Išsprendę šias sistemas, randame keturis duotosios sistemos sprendinius:

$$(1;\ -2),\ (-1;\ 2),\ \left(\frac{13}{\sqrt{138}};\ \frac{5}{\sqrt{138}}\right),\ \left(-\frac{13}{\sqrt{138}};\ -\frac{5}{\sqrt{138}}\right).$$

Panašiu būdu galima išspręsti ir tokią sistemą

$$\begin{cases} f(x,\ y)=0, & (44) \\ g(x,\ y)=0, & (45) \end{cases}$$

kai bent viena funkcijų $f(x, y)$ arba $g(x, y)$, pavyzdžiui $f(x, y)$, x ir y atžvilgiu yra homogeninis daugianaris, t.y.

$$f(x, y)=a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ \dots\ +a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n. \qquad (46)$$

Nagrinėdami (44), (45) lygčių sistemą (kai funkcija $f(x, y)$ yra apibrėžta (46) formule), kaip ir spręsdami (35) ir (37) lygčių sistemą, turėsime atskirai surasti sprendinius, kurių $y=0$, ir sprendinius, kurių $y\neq0$.

Sprendinius, kurių $y=0$ (jei tik tokių yra), galėsime rasti tokiu būdu. Kai $a_0\neq0$, tai iš (44), (46) lygčių, kai $y=0$, randame $a_0x^n=0$, t.y. $x=0$. Dar lieka patikrinti, ar pora $(0; 0)$ tinka (45) lygčiai. Kai $a_0=0$, tai, koks bebūtų x, reikšmė $y=0$ tinka (44) lygčiai (žr. (46) formulę). Todėl lieka rasti lygties $g(x, 0)=0$ šaknis (tos lygties, kurią gauname iš (45) lygties, kai $y=0$).

Norėdami rasti sprendinius, kurių $y \neq 0$, abi (44) lygties puses padalysime iš y^n. Gausime lygtį

$$a_0\left(\frac{x}{y}\right)^n + a_1\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\left(\frac{x}{y}\right) + a_n = 0,$$

kurios kairioji pusė $t = \frac{x}{y}$ atžvilgiu yra daugianaris. Kai $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – šio daugianario šaknys, tai duotoji sistema yra ekvivalenti sistemų

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = t_k, \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

disjunkcijai. Taigi reikia išnagrinėti n lygčių (su vienu nežinomuoju y)

$$g(t_k y, y) = 0, (k = 1, 2, \ldots, n).$$

7 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^3 + 2x^2 y - xy^2 - 2y^3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 8. \end{cases}$$

Sprendimas. Iš pirmosios lygties, kai $y = 0$, gauname $x = 0$, bet skaičių $(0; 0)$ pora netinka antrajai lygčiai. Todėl ši pora nėra sistemos sprendinys. Vadinasi, koks bebūtų sprendinys, turime $y \neq 0$. Pirmąją lygtį padalysime iš y^3. Tada, pažymėję $\frac{x}{y} = t$, gauname lygtį $t^3 + 2t^2 - t - 2 = 0$, turinčią šaknis $t_1 = 1$, $t_2 = -1$, $t_3 = -2$.
Pagaliau, išsprendę šias tris sistemas

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2y, \\ x^2 + y^2 = 8, \end{cases}$$

randame duotosios sistemos sprendinius.
Ats. $(2; 2)$, $(-2; -2)$, $(-2; 2)$, $(2; -2)$,

$$\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right).$$

§ 4. Simetrinių algebrinių lygčių sistemos

1°. Simetrinės sistemos su dviem nežinomaisiais. Tarkime, kad sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

yra sudaryta iš lygčių, kurių kairiosios pusės $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – kintamųjų x ir y *simetriniai daugianariai*, t.y. $f_1(x, y)$ ir $f_2(x, y)$ nesikeičia, kai x pakeičiamas y, o y pakeičiamas x.

Tokio tipo paprasčiausios sistemos pavyzdys yra ši lygčių sistema:

$$\begin{cases} x+y=a, & (47) \\ xy=b. & (48) \end{cases}$$

Jos sprendimo metodą apibūdina tokia teorema.

6 teorema. *Kai t_1, t_2 yra kvadratinės lygties*

$$t^2-at+b=0 \quad (49)$$

šaknys, tai sistema, kurią sudaro (47) *ir* (48) *lygtys, turi du sprendinius* $(t_1;\ t_2)$ ir $(t_2;\ t_1)$ *ir jokių kitų sprendinių neturi. Atvirkščiai, kai* $(x_0;\ y_0)$ – *sistemos, sudarytos iš* (47) *ir* (48) *lygčių, sprendinys, tai skaičiai* x_0 *ir* y_0 *yra* (49) *lygties šaknys.*

Įrodymas. Tarkime, kad t_1, t_2 – (49) lygties šaknys. Pagal Vijetos formules turime

$$t_1+t_2=a, \quad t_1 t_2=b,$$

t.y. skaičių poros $(t_1;\ t_2)$, $(t_2;\ t_1)$ yra sistemos, kurias sudaro (47) ir (48) lygtys, sprendiniai.

Įrodysime, kad kitokių sprendinių ši sistema neturi. Tarkime, kad $(x_0;\ y_0)$ – koks nors sistemos, kurią sudaro (47) ir (48) lygtys, sprendinys. Tuomet $x_0+y_0=a$, $x_0y_0=b$, ir todėl daugianarį t^2-at+b galima išreikšti taip:

$$t^2-at+b=t^2-(x_0+y_0)\,t+x_0\,y_0=(t-x_0)\,(t-y_0).$$

Iš to darome išvadą, kad skaičiai x_0 ir y_0 yra (49) kvadratinės lygties šaknys. 6 teorema įrodyta.

8 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-2. \end{cases}$$

Sprendimas. Šiuo atveju (49) lygtis turi išraišką $t^2-t-2=0$. Šios lygties šaknys yra $t_1=2$, $t_2=-1$. Vadinasi, duotoji sistema turi sprendinius $(2;\ -1)$ ir $(-1;\ 2)$.

6 teoremoje panaudojome paprasčiausius dviejų kintamųjų simetrinius daugianarius $x+y$ ir xy. Toliau juos žymėsime taip:

$$x+y=\sigma_1,\ xy=\sigma_2. \quad (50)$$

Galima įrodyti, kad bet koks simetrinis daugianaris $f(x, y)$ gali būti išreikštas simetriniais daugianariais $\sigma_1=x+y$ ir $\sigma_2=xy$.

Todėl, sprendžiant simetrines algebrinių lygčių sistemas, patartina naujus nežinomuosius σ_1, σ_2 įvesti pagal (50) formules. Taip keisti nežinomuosius yra patogu, nes tada daugianarių laipsniai paprastai sumažėja ir sistema pasidaro paprastesnė.

9 pavyzdys. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} xy\,(x+y)=6, \\ x^3+y^3=9 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius.

Sprendimas. Turime

$$xy(x+y)=\sigma_1\sigma_2.$$

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=(x+y)\big((x+y)^2-3xy\big)=\sigma_1(\sigma_1^2-3\sigma_2).$$

Taigi, panaudoję (50) keitinius, gauname sistemą

$$\begin{cases}\sigma_1\sigma_2=6,\\ \sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2=9.\end{cases}$$

Iš čia randame $\sigma_1^3=3\sigma_1\sigma_2+9=27$. Kadangi ieškome tik realiųjų sprendinių, tai $\sigma_1=3$, ir tada $\sigma_2=2$. Išsprendę sistemą

$$\begin{cases}x+y=3,\\ xy=2,\end{cases}$$

randame du sprendinius (1; 2) ir (2; 1).

Ats. (1; 2), (2; 1).

Bendru atveju simetrinės sistemos

$$\begin{cases}f_1(x,\ y)=0,\\ f_2(x,\ y)=0\end{cases}$$

sprendimą galima realizuoti pagal tokią schemą. Pagal (50) formules įvedę naujus nežinomuosius σ_1, σ_2 (juos galima žymėti raidėmis u, v arba kitomis), gauname naują sistemą nežinomųjų σ_1, σ_2 atžvilgiu. Tarkime, kad sugebėjome išspręsti šią naują sistemą ir suradome visus jos sprendinius

$$(a_1;\ a_2),\ (b_1;\ b_2),\ \ldots,\ (l_1;\ l_2).$$

Tuomet pradinė simetrinė sistema yra ekvivalenti sistemų

$$\begin{cases}x+y=a_1,\\ xy=a_2,\end{cases}\quad \begin{cases}x+y=b_1,\\ xy=b_2,\end{cases}\ \ldots\ \begin{cases}x+y=l_1,\\ xy=l_2\end{cases}$$

disjunkcijai. Taikant šį metodą, kintamųjų x, y simetrinius daugianarius reikės išreikšti naujais nežinomaisiais σ_1, σ_2. Parodysime, kaip simetriniai daugianariai

$$S_n=x^n+y^n,$$

kurie vadinami *laipsninėmis sumomis, išreiškiami nežinomaisiais* σ_1, σ_2. Sprendžiant uždavinius, to paprastai pakanka.

Laipsninės sumos S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 naujais nežinomaisiais $\sigma_1=x+y$, $\sigma_2=xy$ išreiškiamos taip:

$$S_1=x+y=\sigma_1, \tag{51}$$

$$S_2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\sigma_1^2-2\sigma_2, \tag{52}$$

$$S_3=x^3+y^3=(x+y)\big((x+y)^2-3xy\big)=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2, \tag{53}$$

$$S_4=x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(\sigma_1^2-2\sigma_2)^2-2\sigma_2^2=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2, \tag{54}$$

$$S_5=x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)=S_2S_3-\sigma_1\sigma_2^2=$$
$$=(\sigma_1^2-2\sigma_2)(\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2)-\sigma_1\sigma_2^2=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2. \tag{55}$$

2°. Kai kurių iracionaliųjų lygčių sprendimas, pakeičiant jas simetrinių lygčių sistemų sprendimu. Išnagrinėsime lygties

$$\sqrt{a-f(x)}+\sqrt{b+f(x)}=c \qquad (56)$$

sprendimo metodiką. Pažymėję

$$\sqrt{a-f(x)}=u, \quad \sqrt{b+f(x)}=v, \qquad (57)$$

iš (56) ir (57) lygybių gauname simetrinę algebrinių lygčių sistemą

$$\begin{cases} u+v=c, \\ u^2+v^2=a+b, \end{cases} \qquad (58)$$

kurią išsprendę, rasime u ir v.

Tarkime, kad $x=x_0$ – (56) lygties sprendinys. Tuomet skaičių $(u_0;\ v_0)$ pora, kai

$$u_0=\sqrt{a-f(x_0)}, \quad v_0=\sqrt{b+f(x_0)},$$

yra (58) sistemos sprendinys, be to, abu skaičiai u_0, v_0 yra neneigiamieji. Atvirkščiai, sakykime, kad $(u_0;\ v_0)$ – bet koks neneigiamas (58) sistemos sprendinys (t.y. $u_0 \geqslant 0$, $v_0 \geqslant 0$). Įrodysime, kad bet koks lygties

$$u_0=\sqrt{a-f(x)} \qquad (59)$$

(arba lygties $v_0=\sqrt{b+f(x)}$) sprendinys tinka (56) lygčiai.

Iš tiesų, kai $x=x_1$ – (59) lygties šaknis, tai

$$u_0=\sqrt{a-f(x_1)}.$$

Tada iš (58) sistemos randame

$$v_0^2=(a+b)-u_0^2=b+f(x_1).$$

Kadangi $v_0 \geqslant 0$, tai $v_0=\sqrt{b+f(x_1)}$. Dabar iš (58) sistemos pirmosios lygties gauname

$$\sqrt{a-f(x_1)}+\sqrt{b+f(x_1)}=c.$$

Vadinasi, $x=x_1$ – (56) lygties šaknis.

Taigi, norėdami išspręsti (56) lygtį, pirmiausia turime išspręsti (58) sistemą. Kai $(u_1;\ v_1)$, $(u_2;\ v_2)$ – (58) sistemos sprendiniai, tai (56) lygtis yra ekvivalenti lygčių disjunkcijai (žr. (59) formulę):

$$\left(\sqrt{a-f(x)}=u_1\right) \vee \left(\sqrt{a-f(x)}=u_2\right).$$

10 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x}=7.$$

Sprendimas. Šiuo atveju (58) sistema atrodo taip:

$$\begin{cases} u+v=7, \\ u^2+v^2=25. \end{cases}$$

Ji turi du sprendinius (3; 4) ir (4; 3). Kai $u=3$, tai iš lygties $\sqrt{x+5}=3$ (arba iš lygties $\sqrt{20-x}=4$) randame $x=4$. Analogiškai, kai $u=4$, gauname $x=11$.

Ats. $x_1=4$, $x_2=11$.

Pastaba. Sprendžiant lygtis

$$\sqrt{a+f(x)}+\sqrt{b+f(x)}=c, \quad (c\neq 0),$$

patogu, pažymėjus $u=\sqrt{a+f(x)}$, $v=\sqrt{b+f(x)}$, sudaryti sistemą

$$\begin{cases} u+v=c, \\ u^2-v^2=a-b, \end{cases}$$

kuri, kai $c\neq 0$, ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} u+v=c, \\ u-v=\dfrac{a-b}{c}. \end{cases}$$

3°. Simetrinės sistemos su trimis nežinomaisiais. Dabar nagrinėsime lygčių (su trimis nežinomaisiais) sistemas, kai lygčių kairiosios pusės yra simetrinės nežinomųjų x, y, z atžvilgiu.

Tarkime, kad sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y, z)=0, \\ f_2(x, y, z)=0, \\ f_3(x, y, z)=0 \end{cases}$$

yra tokia, kad daugianariai f_1, f_2, f_3 yra simetriniai x, y, z atžvilgiu, t.y. nė vienas šių daugianarių nesikeičia, kai bet kurią porą iš trijų skaičių x, y, z sukeičiame vietomis.

Tokiu atveju patogu pažymėti

$$x+y+z=u, \quad xy+xz+yz=v, \quad xyz=\omega.$$

Toks pakeitimas dažniausiai suprastina duotąją sistemą.

Nagrinėjamojo tipo sistemos paprasčiausias pavyzdys – tai sistema

$$\begin{cases} x+y+z=a, & (60) \\ xy+yz+zx=b, & (61) \\ xyz=c. & (62) \end{cases}$$

Šios sistemos sprendimo metodiką apibūdina tokia teorema.

7 teorema. *Kai* t_1, t_2, t_3 – kubinės lygties

$$t^3-at^2+bt-c=0 \qquad (63)$$

šaknys, tai sistema, kurią sudaro (60)–(62) *lygtys, turi šešis sprendinius:* $(t_1; t_2; t_3)$, $(t_1; t_3; t_2)$, $(t_2; t_1; t_3)$, $(t_3; t_2; t_1)$, $(t_2; t_3; t_1)$, $(t_3; t_1; t_2)$ *(šie sprendiniai gaunami, sudarant įvairius kėlinius iš trijų skaičių* t_1, t_2, t_3*); jokių kitų sprendinių ši sistema neturi. Atvirkščiai, kai* $(x_0; y_0; z_0)$ *– sistemos, kurią sudaro* (60)–(62) *lygtys, sprendinys, tai skaičiai* x_0, y_0, z_0 – (63) *lygties šaknys.*

Įrodymas. Tarkime, kad t_1, t_2, t_3 yra (63) lygties šaknys. Pasinaudosime Vijetos formulėmis, išvestomis kubinės lygties atvejui,

$$t_1+t_2+t_3=a,$$
$$t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1=b,$$
$$t_1t_2t_3=c.$$

Šios lygybės rodo, kad skaičių (t_1; t_2; t_3) rinkinys sudaro (60)–(62) lygčių sistemos sprendinį. Kiti penki sprendiniai gaunami, sudarius iš skaičių t_1, t_2, t_3 kėlinius. Parodysime, kad kitokių sprendinių (60)–(62) lygčių sistema negali turėti. Tarkime, kad x_0; y_0; z_0) – koks nors (60)–(62) lygčių sistemos sprendinys. Tada yra teisingos skaitinės lygybės

$$x_0+y_0+z_0=a,$$
$$x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0=b,$$
$$x_0y_0z_0=c.$$

Vadinasi, daugianarį t^3-at^2+bt-c galima išreikšti taip:

$$t^3-at^2+bt-c=$$
$$=t^3-(x_0+y_0+z_0)\ t^2+(x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0)\ t-$$
$$-x_0y_0z_0=(t-x_0)(t-y_0)(t-z_0).$$

Iš šios lygybės darome išvadą, kad skaičiai x_0, y_0, z_0 yra (63) lygties šaknys. 7 teorema įrodyta.

11 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y+z=2, \\ xy+yz+zx=-1, \\ xyz=-2. \end{cases}$$

Sprendimas. Sudarome kubinę lygtį

$$t^3-2t^2-t+2=0$$

ir randame jos šaknis: $t_1=1$, $t_2=-1$, $t_3=2$. Pagal 7 teoremą duotoji sistema turi tokius sprendinius: (1; –1; 2), (–1; 1; 2), (–1; 2; 1), (2; –1; 1), (2; 1; –1), (1; 2; –1).

Pastaba. Šioms sistemoms

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=b, \\ xyz=c, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a, \\ xy+xz+yz=b, \\ xyz=c, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ x^2+y^2+z^2=b, \\ x^3+y^3+z^3=c, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=a, \\ xy+xz+yz=b, \\ x^3+y^3+z^3=c \end{cases}$$

galima suteikti (60)–(62) lygčių sistemos išraišką, pritaikius šias tapatybes:

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+xz),$$

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+yz+xz)-3xyz,$$

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=x^3+y^3+z^3-3xyz.$$

X skyriaus uždaviniai

10.1. Įrodykite, kad lygčių sistema $f_1(x, y)=0$, $f_2(x, y)=0$ ekvivalenti kiekvienai šių sistemų:

a) $\begin{cases} f_1(x, y)=0, \\ f_1(x, y)+f_2(x, y)=0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} f_1(x, y)=0, \\ f_1(x, y)-f_2(x, y)=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} f_1(x, y)=0, \\ \alpha f_1(x, y)+\beta f_2(x, y)=0 \end{cases}$ ($\beta\neq 0$, α – bet koks).

10.2. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} x^3-y^3=a(x-y), \\ x^3+y^3=b(x+y) \end{cases}$$

ekvivalenti šių keturių sistemų disjunkcijai:

a) $\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+xy+y^2-a=0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-y=0, \\ x^2-xy+y^2-b=0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^2+xy+y^2-a=0, \\ x^2-xy+y^2-b=0. \end{cases}$

10.3. Duota sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y)=a, \\ f_2(x, y)=b; \end{cases} \qquad (64)$$

čia $ab\neq 0$,

a) Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y)f_2(x, y)=ab, \\ \dfrac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}=\dfrac{a}{b} \end{cases}$$

yra (64) sistemos išvada.

b) Įrodykite, kad (64) sistema, kai $ab\neq 0$, ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} \dfrac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}=\dfrac{a}{b}, \\ f_1(x, y)=a. \end{cases}$$

10.4. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} (f_1(x, y))^2 = (g_1(x, y))^2, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

yra sistemos

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y), \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

išvada.

10.5. Tarkime, kad funkcija $\varphi(x, y)$ apibrėžta tuose taškuose, kuriuose apibrėžtos sistemos

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \tag{65}$$

kairiosios pusės. Įrodykite, kad sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) + \varphi(x, y) \cdot f_2(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases}$$

ekvivalenti (65) sistemai.

10.6. Tarkime, kad funkcijos $f_k(x, y)$, $g_k(x, y)$ $(k=1, 2)$ apibrėžtos aibėje M. Įrodykite, kad šioje aibėje

a) kiekviena lygtis

$$f_1 g_1 = f_2 g_2, \; f_1 g_2 = f_2 g_1$$

yra sistemos

$$\begin{cases} f_1 = f_2, \\ g_1 = g_2 \end{cases} \tag{66}$$

išvada;

b) kiekviena sistema

$$\begin{cases} f_1 = f_2, \\ f_1 g_1 = f_2 g_2, \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = f_2, \\ f_1 g_2 = f_2 g_1 \end{cases}$$

aibėje M ekvivalenti (66) sistemai, kai bent viena iš funkcijų f_1, f_2 aibėje M nelygi nuliui.

10.7. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0, \\ f_2(x, y, z) = 0, \\ f_3(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

ekvivalenti kiekvienai šių sistemų (trumpumo dėlei nežinomųjų nerašome):

a) $f_1 = 0, \; f_1 + f_2 = 0, \; f_1 + f_2 + f_3 = 0$;

b) $f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; f_1 - f_3 = 0$;

c) $f_1 = 0, \; f_2 + f_3 = 0, \; f_2 - f_3 = 0$;

d) $f_1+f_2=0,\ f_1+f_3=0,\ f_2+f_3=0$;

e) $f_2+f_3-f_1=0,\ f_3-f_2+f_1=0,\ f_1+f_2-f_3=0$;

f) $f_2=0,\ f_3=0,\ f_1+\alpha f_2+\beta f_3=0$ (α, β – bet kokie skaičiai).

10.8. Tarkime, kad $abc \neq 0$. Įrodykite, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y, z)=a, \\ f_2(x, y, z)=b, \\ f_3(x, y, z)=c \end{cases}$$

ekvivalenti lygčių sistemai

$$\begin{cases} f_1(x, y, z)=a, \\ \dfrac{f_2(x, y, z)}{f_1(x, y, z)}=\dfrac{b}{a}, \\ \dfrac{f_3(x, y, z)}{f_1(x, y, z)}=\dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Išspręskite lygčių sistemas **(10.9 – 10.17):**

10.9. $\begin{cases} x^2-y^2=5, \\ x+y=5. \end{cases}$ **10.10.** $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

10.11. $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ xy=6. \end{cases}$ **10.12.** $\begin{cases} x^2-y^2=3, \\ x^2+xy+y^2=7. \end{cases}$

10.13. $\begin{cases} x^2+3xy=54, \\ 4y^2+xy=115. \end{cases}$ **10.14.** $\begin{cases} x^3+xy^2=10, \\ y^3+x^2y=5. \end{cases}$

10.15. $\begin{cases} x+y+xy=5, \\ x^2+y^2+xy=7. \end{cases}$ **10.16.** $\begin{cases} (x-1)(y-1)=3, \\ (x+2)(y+2)=24. \end{cases}$

10.17. $\begin{cases} (x^2+x+1)(y^2+y+1)=3, \\ (1-x)(1-y)=6. \end{cases}$

Pritaikę nežinomųjų keitimo (50) *formules, išspręskite simetrines sistemas* **(10.18, 10.19):**

10.18. $\begin{cases} x+y=1, \\ x^3+y^3=19. \end{cases}$ **10.19.** $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ xy=3. \end{cases}$

10.20. Išspręskite lygtį

$$\sqrt[4]{x+3}+\sqrt[4]{94-x}=5,$$

pakeitę ją simetrinių lygčių sistema.

10.21. Įrodykite formules (žymėjimus žr. p. 247):

1) $S_n=\sigma_1 S_{n-1}-\sigma_2 S_{n-2}$ $(n>2)$;

2) $S_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3$.

Išspręskite lygčių sistemas **(10.22–10.29)**:

10.22. $\begin{cases} 3x^3+2y^3=26, \\ xy=2. \end{cases}$ **10.23.** $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}, \\ xy^2-x^2y=6. \end{cases}$

10.24. $\begin{cases} x^3-y^3=61(x-y), \\ (x+1)(y+1)=12. \end{cases}$

10.25. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=17, \\ xy+x+y=5. \end{cases}$ **10.26.** $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{9}{2}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}. \end{cases}$

10.27. $\begin{cases} x+y=3, \\ x^5+y^5=33. \end{cases}$ **10.28.** $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2, \\ xy=2(x+y). \end{cases}$

10.29. $\begin{cases} x^2+y^2=x+y, \\ x^4+y^4=\dfrac{1}{2}(x+y)^2. \end{cases}$

10.30. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} (x^2+y^2)(x-y)=13, \\ xy(x-y)=6 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius.

Išspręskite lygčių sistemas **(10.31–10.37)**:

10.31. $\begin{cases} x^2(1+y+y^2+y^3)=160, \\ x^2(1-y+y^2-y^3)=-80. \end{cases}$

10.32. $\begin{cases} (x+y)^3(x-y)^2=125, \\ (x-y)^3(x+y)^2=25. \end{cases}$

10.33. $\begin{cases} x^2=3x+4y, \\ y^2=4x+3y. \end{cases}$ **10.34.** $\begin{cases} x^3=10x+y, \\ y^3=x+10y. \end{cases}$

10.35. $\begin{cases} 2x^2y^2-3y^2+5xy-6=0, \\ 3x^2y^2-4y^2+3xy-2=0. \end{cases}$

10.36. $\begin{cases} 3x^2y^2+x^2-3xy-7=0, \\ 10x^2y^2+3x^2-20xy-3=0. \end{cases}$

10.37. $\begin{cases} 4(x^3+y^3)=9x^2y^2, \\ 4(x^2+y^2)=9x^2y^2-8xy. \end{cases}$

10.38. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=7, \\ (x+y)(x^2+y^2)=175 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius.

Išspręskite lygčių sistemas (**10.39. 10.40**):

10.39. $\begin{cases} x^3y+xy^3=\frac{10}{9}(x+y)^2, \\ x^4y+xy^4=\frac{2}{3}(x+y)^3. \end{cases}$

10.40. $\begin{cases} \frac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\frac{3}{5}, \\ \frac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\frac{4}{5}. \end{cases}$

Raskite lygčių sistemų realiuosius sprendinius (**10.41, 10.42**):

10.41. $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x, \\ \frac{1+y^2}{1+x^2}=5. \end{cases}$

10.42. $\begin{cases} x^3+y^3+x^2y+xy^2=5, \\ x^4y^2+x^2y^4=20. \end{cases}$

Išspręskite lygčių sistemas (**10.43, 10.44**):

10.43. $\begin{cases} \frac{xy}{x+2y}+\frac{x+2y}{xy}=2, \\ \frac{xy}{x-2y}+\frac{x-2y}{xy}=4. \end{cases}$

10.44. $\begin{cases} x^2+xy+\frac{1}{4}y^2-x-\frac{1}{2}y=2, \\ \frac{1}{4}x^2-xy+y^2+2y-x=3. \end{cases}$

10.45. Raskite realiąsias a reikšmes, su kuriomis lygčių sistema

$$\begin{cases} x^2-y^2=1, \\ y=ax+b, \end{cases}$$

koks bebūtų realusis skaičius b, turi realiuosius sprendinius.

Raskite lygčių sistemų realiuosius sprendinius (m, n *— sveikieji teigiami skaičiai*) (**10.46, 10.47**):

10.46. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^{2m}+y^{2n}=1. \end{cases}$

10.47. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^{2n+1}+\frac{1}{y^{2m+1}}=y^{2n+1}+\frac{1}{x^{2m+1}}. \end{cases}$

Išspręskite lygčių su trimis nežinomaisiais sistemas (**10.48–10.64**):

10.48. $\begin{cases} xy=6, \\ yz=3, \\ zx=2. \end{cases}$

10.49. $\begin{cases} yz=\frac{2}{3}x, \\ zx=\frac{3}{2}y, \\ xy=6z. \end{cases}$

10.50. $\begin{cases} x^3=\frac{1}{6}yz, \\ y^3=\frac{27}{2}zx, \\ z^3=\frac{8}{3}xy. \end{cases}$

10.51. $\begin{cases} x(y+z)=27, \\ y(x+z)=32, \\ z(x+y)=35. \end{cases}$

10.52. $\begin{cases} x(x+y+z)=7, \\ y(x+y+z)=14, \\ z(x+y+z)=28. \end{cases}$

10.53. $\begin{cases} (x+y)(x+y+z)=18, \\ (y+z)(x+y+z)=30, \\ (x+z)(x+y+z)=24. \end{cases}$

10.54. $\begin{cases} x^2+xy+xz-x=2, \\ y^2+xy+yz-y=-2, \\ z^2+xz+yz-z=6. \end{cases}$

10.55. $\begin{cases} y^3+z^3=7x^3, \\ y+z-3x=0, \\ z-x=y-2. \end{cases}$

10.56. $\begin{cases} x+\frac{1}{y}=1, \\ y+\frac{1}{z}=-\frac{3}{4}, \\ z+\frac{1}{x}=\frac{9}{2}. \end{cases}$

10.57. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{6}, \\ x+y=z, \\ y+z=-2x. \end{cases}$

10.58. $\begin{cases} 2x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)=15, \\ 3y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)=20, \\ 6z\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=13. \end{cases}$

10.59. $\begin{cases} 27x^3-y^3-13\frac{xy}{z}=0, \\ 3x^2z-4xy+\frac{3}{z}=0, \\ 3xz-yz=1. \end{cases}$

10.60. $\begin{cases} (x+y)^2-z^2=4, \\ (y+z)^2-x^2=2, \\ (z+x)^2-y^2=3. \end{cases}$

10.61. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+yz+zx=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$

10.62. $\begin{cases} x+y+z=2, \\ x^2+y^2+z^2=6, \\ x^3+y^3+z^3=8. \end{cases}$

10.63. $\begin{cases} x+y+z=4, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xy+xz-yz=5. \end{cases}$

10.64. $\begin{cases} 5xy=6(x+y), \\ 3yz=2(y+z), \\ 4zx=3(z+x). \end{cases}$

10.65. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} xy+xz+yz=11, \\ x^2+y^2+z^2=14, \\ xyz=6 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius.

10.66. Su kuriomis a reikšmėmis lygčių sistema

$$\frac{xy}{x+y}=a, \quad \frac{xz}{x+z}=a, \quad \frac{yz}{y+z}=a^2$$

turi bent vieną sprendinį? Raskite šiuos sprendinius.

Išspręskite lygčių su trimis nežinomaisiais sistemas (**10.67 – 10.71**):

10.67. $\begin{cases} xy+x+y=7, \\ yz+y+z=-3, \\ zx+z+x=-5. \end{cases}$

10.68. $\begin{cases} 24(x+y-z)=xyz, \\ \frac{24}{5}(y+z-x)=xyz, \\ 8(x+z-y)=xyz. \end{cases}$

10.69. $\begin{cases} \frac{x+y}{xyz}=\frac{7}{12}, \\ \frac{y+z}{xyz}=\frac{5}{12}, \\ \frac{z+x}{xyz}=\frac{1}{3}. \end{cases}$

10.70. $\begin{cases} x^2+5y^2+4z^2+4xy+4yz=125, \\ x^2+3y^2-4z^2+4xy-4yz=75, \\ x+y+z=8. \end{cases}$

10.71. $\begin{cases} x-2y+3z=9, \\ x^2+4y^2+9z^2=189, \\ 3xz=4y^2. \end{cases}$

10.72. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2+4xy+6y^2=3, \\ x^2-4xz+12z^2=2, \\ y^2+3yz+2z^2=0 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius.

Išspręskite lygčių su trimis nežinomaisiais sistemas **(10.73–10.75)**:

10.73. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ x^2+y^2-z^2=-3, \\ x^3+y^3-z^3=-29. \end{cases}$ **10.74.** $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2-z^2=20, \\ x^4+y^4-z^4=560. \end{cases}$

10.75. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x+z}=\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{3}. \end{cases}$

10.76. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} 3(x+y)=z, \\ 3(x^2+y^2)=5z, \\ 3(x^3+y^3)=7z \end{cases}$$

realiuosius sprendinius.

10.77. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x+y=z, \\ y^2+z^2=13x^2, \\ 2(x^3+z^3)=7y^3 \end{cases}$$

visus sprendinius.

Išspręskite lygčių su trimis nežinomaisiais sistemas **(10.78–10.82)**:

10.78. $\begin{cases} (x+y)(x+z)=x, \\ (y+z)(y+x)=y, \\ (z+x)(z+y)=z. \end{cases}$ **10.79.** $\begin{cases} (x+2y)(x+2z)=x, \\ (y+2x)(y+2z)=y, \\ (z+2x)(z+2y)=z. \end{cases}$

10.80. $\begin{cases} xy=x+y-z, \\ xz=2(x-y+z), \\ yz=3(y-x+z). \end{cases}$ **10.81.** $\begin{cases} (x+y)(x+z)=x, \\ (y+z)(y+x)=2y, \\ (z+x)(z+y)=3z. \end{cases}$

10.82. $\begin{cases} xyz+xz^2=2, \\ xy+2xz=-z, \\ x^2yz=-15. \end{cases}$

10.83. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2+xy+4xz-4z^2=0, \\ y^2+xy+4yz-8z^2=0, \\ xyz=8 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius.

10.84. Sakykime, kad lygčių sistema

$$\begin{cases} (x-a)(y-a)(z-a)=d, \\ (x-b)(y-b)(z-b)=d, \\ (x-c)(y-c)(z-c)=d \end{cases}$$

turi sprendinį $(x; y; z)$, kai skaičiai a, b, c yra nelygūs vienas kitam. Raskite $x^3+y^3+z^3$.

Išspręskite lygčių su trimis nežinomaisiais sistemas **(10.85.–10.90):**

10.85. $$\begin{cases} 2(x^2+y^2)=xyz, \\ 10(y^2+z^2)=29xyz, \\ 5(z^2+x^2)=13xyz. \end{cases}$$

10.86. $$\begin{cases} 6x(y^2+z^2)=13yz, \\ 3y(x^2+z^2)=5xz, \\ 6z(x^2+y^2)=5xy. \end{cases}$$

10.87. $$\begin{cases} 4\dfrac{y+z}{y^2z^2}=3x, \\ 4\dfrac{x+z}{x^2z^2}=3y, \\ \dfrac{x+y}{x^2y^2}=2z. \end{cases}$$

10.88. $$\begin{cases} 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+9xyz=0, \\ 2y(x^2-z^2)+3xz=0, \\ 2z(x^2-y^2)+3xy=0. \end{cases}$$

10.89. $$\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{xy}=\dfrac{3}{z}, \\ \dfrac{y^2+z^2-x^2}{yz}=\dfrac{3}{x}, \\ \dfrac{y^2-x^2-z^2}{xz}=\dfrac{21}{y}. \end{cases}$$

10.90. $$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=-\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=-\dfrac{3}{2}, \\ xy+yz+zx=-3. \end{cases}$$

10.91. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz=-4, \\ x^3-y^3+z^3-xyz=8, \\ -x^3+y^3+z^3-xyz=-2 \end{cases}$$

visus realiuosius sprendinius.

10.92. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} 2x^2+y^2+z^2=9+yz, \\ x^2+2y^2+z^2=6+xz, \\ x^2+y^2+2z^2=3+xy. \end{cases}$$

10.93. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} x^2+3yz=1, \\ y^2+2zx=2, \\ z^2+2xy=1 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius.

Išspręskite lygčių su trimis nežinomaisiais sistemas **(10.94 – 10.96)**:

10.94. $\begin{cases} x^2+yz=42, \\ y^2+xz=42, \\ z^2+xy=50. \end{cases}$

10.95. $\begin{cases} x^2-yz=3, \\ y^2-xz=5, \\ z^2-xy=-1. \end{cases}$ **10.96.** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ y^2+yz+z^2=3, \\ z^2+xz+x^2=1. \end{cases}$

Išspręskite lygčių su keturiais nežinomaisiais sistemas **(10.97, 10.98)**:

10.97. $\begin{cases} x+y=1, \\ xz+yt=2, \\ xz^2+yt^2=5, \\ xz^3+yt^3=14. \end{cases}$ **10.98.** $\begin{cases} xy+xz+yz=28, \\ yz+ty+tz=0, \\ zx+tz+tx=0, \\ xy+tx+ty=0. \end{cases}$

10.99. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=1, \\ x_1+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n=2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}=n. \end{cases}$$

10.100. Raskite lygčių sistemos

$$\begin{cases} 3x_1x_2=x_1+x_2+2, \\ 3x_2x_3=x_2+x_3+2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 3x_{n-1}x_n=x_{n-1}+x_n+2, \\ 3x_nx_1=x_n+x_1+2. \end{cases}$$

visus sprendinius.

Išspręskite lygčių sistemas (**10.101–10.144**):

10.101. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x^2+y^2=65. \end{cases}$

10.102. $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=2\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2. \end{cases}$

10.103. $\begin{cases} \sqrt[4]{\frac{x+y}{y}}+\sqrt[4]{\frac{y}{x+y}}=\frac{5}{2}, \\ x^2+y^2=226. \end{cases}$

10.104. $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2}-2\sqrt{x^2-1}+y^2=3, \\ 3(x-y)+\frac{2y}{\sqrt{x^2-1}-x}+3y^2=0. \end{cases}$

10.105. $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2}+2\sqrt{x^2+1}+y^2=3, \\ x+\frac{y}{\sqrt{x^2+1}+x}+y^2=0. \end{cases}$

10.106. $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=\sqrt{8}, \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{16+(x+y)^2}. \end{cases}$

10.107. $\begin{cases} 3^x+2^{x+y+1}=5, \\ 3^{x+1}-2^{x+y}=1. \end{cases}$

10.108. $\begin{cases} 3^x-2^{2y}=65, \\ 3^{\frac{x}{2}}-2^y=5. \end{cases}$

10.109. $\begin{cases} 27^{2x}+27^{2y}=12, \\ 27^{x+y}=3\sqrt{3}. \end{cases}$

10.110. $\begin{cases} x^y=9, \\ \sqrt[y]{324}=6x. \end{cases}$

10.111. $\begin{cases} \sqrt[x]{x+7y}=3, \\ (2x+14y)\,2^x=72. \end{cases}$

10.112[1]. $\begin{cases} x^{2y}+16=3yx^y+2y^2, \\ x^{2y}=4+3x^y. \end{cases}$

---

[1] Dėl šio pavyzdžio (ir tolesnių) sutarsime taip: kai lygtyje yra reiškinys, išreikštas laipsniu, kurio pagrindas ir rodiklis priklauso nuo nežinomųjų, tai ieškosime tik tų sprendinių, su kuriais laipsnio pagrindas yra teigiamas. Pavyzdžiui, **10.112** sistemoje yra reiškinys x^y, todėl imame tik tuos sistemos sprendinius, su kuriais $x>0$.

10.113. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{24}, \\ y^{x+y} = x^{6}. \end{cases}$

10.114. $\begin{cases} x^{z} = y^{\frac{8}{3}}, \\ y^{z} = x^{\frac{2}{3}}, \\ 2\sqrt[4]{x} + 2\sqrt[4]{y} = 9z. \end{cases}$

10.115. $\begin{cases} x \cdot 9^{y-x} + 2y \cdot 3^{-x-y} = 8 \cdot 3^{-2x+y}, \\ 3x \cdot 3^{2y+x} + 2y \cdot 3^{2x-y+1} = 72 \cdot 9^{x-y}. \end{cases}$

10.116. $\begin{cases} x \cdot 2^{x-y+1} + 3y \cdot 2^{2x+y} = 2, \\ 2x \cdot 2^{2x+y} + 3y \cdot 8^{x+y} = 1. \end{cases}$

10.117. $\begin{cases} \lg^2 x + \lg^2 y = 5, \\ \lg x - \lg y = 1. \end{cases}$

10.118. $\begin{cases} \lg (x^2 + y^2) = 1 + 2\lg 2, \\ \lg (x+y) - \lg (x-y) = \lg 2. \end{cases}$

10.119. $\begin{cases} 10^{1+\lg (x+y)} = 2{,}5, \\ \sqrt{x+y} + 2\sqrt{x^2 - y^2} = 4 + 2y. \end{cases}$

10.120. $\begin{cases} 9^{\frac{5-\log_2 (x-y)}{2}} = 81, \\ \log_2 (x+y) + \log_2 (x-y) = 3. \end{cases}$

10.121. $\begin{cases} (x^2 - y^2)^{\log_2 (x-y)} = 8, \\ (x+y)^{\log_2 (x^2-y^2)} = 64. \end{cases}$

10.122. $\begin{cases} (x-y)^{\lg (x+1{,}5)} = 0{,}2, \\ (0{,}1)^{\lg (x-y)} = 2x + 3. \end{cases}$

10.123. $\begin{cases} y^{x^2-3x-4} = 1, \\ \log_2 x = y. \end{cases}$

10.124. $\begin{cases} 3^{2\log_9 (4y^2 - x)} = 1, \\ 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 2. \end{cases}$

10.125. $\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}} = \frac{10}{3}, \\ 2\log_3 x + \log_3 y = 3. \end{cases}$

10.126. $\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{4}{3}} = 13, \\ \log_6 x + 2\log_6 y = 3. \end{cases}$

10.127. $\begin{cases} \log_2 (xy) + 2\log_2 (x-y) = \frac{15}{2} - \log_4 32, \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$

10.128. $\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ 2^{-\log_2 x} + 5^{\log_5 \frac{1}{y}} = \frac{1}{3}. \end{cases}$

10.129. $\begin{cases} 2^{2\log_2 x}+3^{2\log_3 y}=8, \\ 2^{2\log_{\frac{1}{2}} x}+3^{2\log_{\frac{1}{3}} y}=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

10.130. $\begin{cases} \log_2 x+\log_4 \dfrac{1}{y}=3, \\ x^2+16y^2=17. \end{cases}$

10.131. $\begin{cases} \log_3(\log_2 x)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right)=1, \\ x^2y^4=16. \end{cases}$

10.132. $\begin{cases} 3^{\log_3 x}-2^{\log_4 y}=77, \\ 3^{\log_3 \sqrt{x}}+2^{\log_{16} y}=11. \end{cases}$

10.133. $\begin{cases} \log_2 \dfrac{x^2\sqrt{y}}{4}=1, \\ 3^{\log_3 x \log_2 y^2}=4. \end{cases}$

10.134. $\begin{cases} \log_2(y-x)=\log_8(3y-5x), \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

10.135. $\begin{cases} 5\log_y x+\log_x y)=26, \\ xy=64. \end{cases}$

10.136. $\begin{cases} \log_y x+\log_x y=\dfrac{5}{2}, \\ \log_{12}(x^2+y^2)=1. \end{cases}$

10.137. $\begin{cases} xy^2+2x-x^2+2xy=0, \\ 2\log_x y+\log_y x=3. \end{cases}$

10.138. $\begin{cases} 20\cdot x^{\log_3 y}+7\cdot y^{\log_3 x}=81\sqrt[3]{3}, \\ xy=9\sqrt[3]{9}. \end{cases}$

10.139. $\begin{cases} \log_2 x\cdot\log_x(x-3y)=2, \\ x\cdot y^{\log_x y}=y^{\frac{5}{2}}. \end{cases}$

10.140. $\begin{cases} 3\log_x a+\log_{a^2} y=2, \\ a^{\log_{\sqrt{a}} x}=y^4, \end{cases}$ $a>0,\ a\neq 1.$

10.141. $\begin{cases} \log_a x\cdot\log_b y=\log_a b, \\ a^{\log_{a^2} y}=\sqrt{x}, \end{cases}$ $a>0,\ a\neq 1,$ $b>0,\ b\neq 1.$

10.142. $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = 1, & a>0,\ a\neq 1, \\ b^{\log_{\sqrt{b}}\sqrt{y}} + x^2 = 2a, & b>0,\ b\neq 1. \end{cases}$

10.143. $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y = c, & \\ x^2 + a^{-\log_{\frac{1}{a}} y} = 2a^c. & a>0,\ a\neq 1. \end{cases}$

10.144. $\begin{cases} (ax)^{\lg a} = (by)^{\lg b}, & a>0,\ a\neq 1, \\ b^{\lg (ax)} = a^{\lg (by)}, & b>0,\ b\neq 1. \end{cases}$

Lygčių sudarymo uždaviniai[1]

10.145. Audinio atraiža kainuoja 35 rub. Jeigu šio audinio atraiža būtų 4 m ilgesnė, o kiekvienas metras kainuotų 1 rub. pigiau, tai atraižos kaina nepasikeistų. Koks atraižos ilgis?

10.146. Vanduo į baseiną teka dviem vamzdžiais. Jeigu pirmuoju vamzdžiu jis tekėtų 10 min, o antruoju – 20 min, tai baseinas būtų pilnas. Jeigu pirmuoju vamzdžiu vanduo tekėtų 5 min, o antruoju – 15 min, tai būtų pripildyta tik $\frac{3}{5}$ baseino. Per kiek laiko baseinas būtų pilnas, jei vanduo tekėtų kiekvienu vamzdžiu atskirai?

10.147. Valtis turi nuplaukti upe iš vietovės A į vietovę B ir atgal. Nuotolis tarp A ir B lygus a; upės tėkmės greitis yra v. Kokiu greičiu turėtų plaukti valtis, kad plaukimo laikas būtų mažesnis už t?

10.148. Iš vietos A, kuri yra žiediniame kelyje, tuo pačiu metu ir ta pačia kryptimi išvažiavo dviratininkas ir motociklininkas. Kol dviratininkas nuvažiavo vieną ratą, motociklininkas nuvažiavo kiek daugiau kaip tris pilnus ratus ir atsidūrė vietoje B, kurioje jis pirmą kartą aplenkė dviratininką. Kiek kartų motociklininko greitis didesnis už dviratininko greitį?

10.149. Keleivinis traukinys pralenkia prekinį, važiuojantį lygiagrečiu keliu. Pro prekinio traukinio mašinistą keleivinis traukinys pravažiuoja per 10 s, o pro keleivinio traukinio mašinistą prekinis traukinys pravažiuoja per 40 s. Jeigu šie traukiniai tais pačiais greičiais važiuotų vienas priešais kitą, tai pilnas susitikimo laikas (nuo garvežių susitikimo iki paskutiniųjų vagonų išsiskyrimo) būtų lygus $16\frac{2}{3}$ s. Kiek kartų keleivinio traukinio greitis didesnis už prekinio traukinio greitį?

10.150. Plaukdamas upe prieš srovę, plaukikas sutiko tuščią valtį, plaukiančią pasroviui. Po susitikimo jis dar plaukė m min prieš srovę, o paskui pasuko atgal ir pavijo valtį, nuplaukusią s m nuo susitikimo vietos. Raskite upės tėkmės greitį.

10.151. Du dviratininkai išvažiavo tuo pačiu laiku: vienas iš A į B, o antras iš B į A. Kiekvienas dviratininkas važiavo pastoviu greičiu ir, atvažiavęs į vietą, tuoj pat grįždavo atgal. Pirmą kartą jie susitiko p km

[1] Kai kuriuos šių uždavinių galima išspręsti tiesiogiai, nesudarant lygčių.

nuotolyje nuo B, o antrąjį kartą, jau grįždami, – q km nuotolyje nuo A. Raskite atstumą AB.

10.152. Iš vietovės A į vietovę B tuo pačiu laiku išėjo pėsčiasis ir išvažiavo dviratininkas. Atvažiavęs į B, dviratininkas grįžo atgal ir, praėjus 1 h po išvykimo iš A, sutiko pėsčiąjį. Po susitikimo pėsčiasis toliau eina į B, o dviratininkas apsisuka ir irgi važiuoja į B. Nuvažiavęs į B, dviratininkas vėl grįžta atgal ir, praėjus 40 min po pirmojo susitikimo, vėl sutinka pėsčiąjį. Apskaičiuokite, per kiek laiko pėsčiasis nueis iš vietovės A į B.

10.153. Vienas indėlininkas padėjo į taupomąją kasą tam tikrą pinigų sumą, o antrasis indėlininkas – dvigubai didesnę sumą. Pirmojo indėlininko santaupos po m metų buvo lygios p rublių, o antrojo po n metų ($n \neq m$) – q rublių. Kokią pinigų sumą padėjo į taupomąją kasą kiekvienas indėlininkas ir kiek procentų (per metus) išmoka taupomoji kasa?

10.154. Garlaivis išplaukė upe iš prieplaukos A pasroviui. Po valandos paskui jį išplaukė kateris ir, nutolęs 60 km nuo A, jis pavijo garlaivį. Jeigu nuo to momento, kai išplaukė kateris, garlaivis būtų padidinęs greitį $5\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$, tai kateris, plaukdamas tuo pačiu greičiu, būtų pavijęs garlaivį tik už 120 km nuo A. Kiek $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ katerio greitis didesnis už garlaivio greitį?

10.155. Kateris, plaukiantis pastoviu greičiu, k kartų didesniu už garlaivio greitį, išplaukė upe pasroviui vienu metu su garlaiviu iš tos pačios prieplaukos. Praėjus t min, kateris pasuko atgal ir sumažino greitį du kartus. Po kiek laiko nuo išvykimo kateris sutiks garlaivį?

10.156. Iš vienos vietovės ta pačia kryptimi kas pusvalandį išvažiuoja dviratininkas. Pirmasis važiuoja $10\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ greičiu, antrasis – $8\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ greičiu. Raskite trečiojo dviratininko greitį, kai žinoma, kad pirmąjį dviratininką jis pralenkė 4 h vėliau negu antrąjį.

10.157. Darbininkų brigada pastatė tiltą per 14 dienų. Jeigu brigadoje būtų buvę 4 darbininkais daugiau ir kiekvienas jų kasdien dirbęs 1 h ilgiau, tai tiltą jie būtų pastatę per 10 dienų. Padidinus brigadą dar 6 darbininkais ir pailginus darbo dieną dar 1 h, tiltas būtų buvęs pastatytas per 7 dienas. Kiek darbininkų buvo brigadoje ir kiek valandų per dieną jie dirbo?

10.158. Iš indo nupilta 1 l rūgšties ir įpilta į jį 1 l vandens, po to nupilta 1 l mišinio ir įpilta 1 l vandens ir t.t. n kartų, kol rūgšties tūrio ir vandens tūrio santykis mišinyje pasidarė lygus k. Kiek rūgšties buvo inde iš pradžių?

10.159. Atstumas tarp miestų A ir B lygus 60 km. Du traukiniai išvažiuoja tuo pačiu laiku: pirmasis iš A į B, antrasis iš B į H. Traukinys, kuris važiuoja iš A į B, nuvažiavęs 20 km, sustoja pusvalandžiui, o paskui važiuoja toliau ir po 4 min sutinka traukinį, važiuojantį iš B į H. Abu traukiniai į paskirties vietą atvažiuoja tuo pačiu laiku. Raskite kiekvieno traukinio greitį.

10.160. Iš miesto A į miestą B išvažiuoja autobusas, o iš miesto B į miestą A – traukinys. Jeigu traukinys išvažiuotų 3 h vėliau už autobusą, tai jie susitiktų pusiaukelėje. Bet jeigu traukinys išvažiuotų 1 h 12 min vėliau už autobusą, tai autobusas iki jų susitikimo spėtų nuvažiuoti $\frac{2}{5}$ atstumo tarp A ir B. Po kiek laiko jie susitiktų, jeigu išvažiuotų tuo pačiu metu?

10.161. Iš prieplaukos A į prieplauką B prieš upės srovę išplaukė garlaivis. Tuo pačiu metu iš B į A išplaukė valtis, kuri, nuplaukusi $\frac{1}{3}$ atstumo nuo B iki A, sutiko garlaivį. Atplaukęs į B, garlaivis išsyk grįžo atgal, pralenkė valtį ir į A atplaukė kaip tik tuo momentu, kai valtis buvo 20 km atstumu nuo A. Jeigu valties greitis vandens atžvilgiu būtų tris kartus didesnis, tai pirmasis susitikimas būtų įvykęs pusiaukelėje tarp A ir B. Raskite atstumą tarp A ir B.

10.162. Iš prieplaukos A į prieplauką B prieš srovę išplaukė garlaivis. Tuo pačiu laiku iš B į A išplaukė valtis ir, nuplaukusi $\frac{3}{8}$ atstumo tarp A ir B, sutiko garlaivį. Atplaukęs į B, garlaivis išsyk grįžo atgal ir į A atvyko kartu su valtimi. Jeigu valties greitis vandens atžvilgiu būtų du kartus didesnis, tai į A ji atplauktų 1 h 10 min anksčiau už garlaivį. Po kiek laiko nuo išvykimo garlaivis grįžo į A?

10.163. Trys dviratininkai išvažiavo tuo pačiu metu: pirmasis ir antrasis skirtingais greičiais iš A, o trečiasis – prieš juos iš B. Po 1,5 h nuo išvažiavimo pirmasis dviratininkas buvo vienodai nutolęs nuo kitų dviejų, o po 2 h nuo išvažiavimo trečiasis dviratininkas buvo vienodai nutolęs nuo pirmojo ir antrojo. Po kelių valandų nuo išvažiavimo antrasis dviratininkas bus vienodai nutolęs nuo pirmojo ir trečiojo?

10.164. Ant upės kranto jos tekėjimo kryptimi yra dvi gyvenvietės A ir B. Pusiaukelėje tarp jų į upę įteka intakas, kurio deltoje yra gyvenvietė C. Valtis iš B į A nuplaukia per 3,5 h, o grįžta atgal per 1 h 25 min. Iš B į C, o paskui intaku prieš srovę tokį pat atstumą iki gyvenvietės D ji plaukia 4 h. Per kiek laiko valtis nuplauks iš D į B, jeigu šį kelią stovinčiame vandenyje ji nuplauktų per 2 h? (Upės tėkmės greitis, įtekėjus intakui, sumažėja.)

10.165. Upė, pasiekusi vietovę A, persiskiria į dvi šakas, tekančias skirtingais greičiais. Valtis iš vietovės A į vietovę B pirmąja šaka nuplaukia 21 min greičiau, negu antrąja iš vietovės A į vietovę C, kuri nutolusi nuo A atstumu, lygiu atstumui tarp A ir B. Atgal iš B į A valtis plaukia 1 h 10 min ilgiau, negu iš C į A. Jeigu valties greitis stovinčiame vandenyje būtų 2 kartus didesnis, tai iš B į A ji plauktų 12 min ilgiau, negu iš C į A. Kiek laiko valtis plauktų stovinčiame vandenyje atstumą tarp A ir B?

101.166. Motorinė valtis išplaukė pasroviui iš vietovės A į vietovę B. Kai ji nuplaukė $\frac{3}{4}$ kelio, pasibaigė kuras, ir likusį kelią teko nuplaukti irkluojant. Kelionė iš A į B truko 1 h 50 min. Jeigu kuro būtų užtekę tik $\frac{1}{4}$ kelio ir likusi kelio dalis būtų nuplaukta irkluojant, tai kelionė būtų

trukusi 3,5 h. Per kiek laiko galima nuplaukti iš B į A tik irkluojant, jeigu kelionė iš A į B ir atgal, plaukiant su įjungtu varikliu, trunka 2h 5 min?

101.167. Iš vietovės A į vietovę B upės krantu jos tekėjimo kryptimi pramintas takas. Medžiotojas išėjo iš A $\frac{3}{7}$ h vėliau, negu žvejys išplaukė valtimi iš A į B. Į vietovę B jie atvyko kartu, o praėjus 4 h, pro juos praplaukė šaka, kurią medžiotojas įmetė į upę, išeidamas iš A. Atgal medžiotojas išėjo 2 h 20 min vėliau už žvejį, tačiau vietovę A jie vėl pasiekė kartu. Per kiek laiko žvejys atplaukė iš B į A?

10.168. Kateris ir garlaivis, išplaukę tuo pačiu metu pasroviui iš prieplaukos A į prieplauką B, nesustodami plaukioja tarp A ir B. Per vieną darbo dieną kateris padaro 5 reisus, o garlaivis 9 reisus (reisas – kelionė iš A į B ir atgal). Praėjus 20 min po išplaukimo, kateris ir garlaivis susitinka pirmą kartą. Tuo metu kateris būna nuplaukęs $\frac{5}{6}$ nuotolio tarp A ir B. Kiek laiko trunka darbo diena?

XI SKYRIUS

TRIGONOMETRINĖS LYGTYS IR LYGČIŲ SISTEMOS

§ 1. Paprasčiausios trigonometrinės lygtys

Šiame skyriuje išnagrinėsime kai kuriuos lygčių ir sistemų tipus, kai nežinomieji yra po trigonometrinių funkcijų ženklu. Tokias lygtis vadinsime *trigonometrinėmis lygtimis.*

Spręsdami trigonometrines lygtis, pertvarkę jas, galiausiai gauname paprasčiausias trigonometrines lygtis:

$$\sin x = a, \ \cos x = a, \ \operatorname{tg} x = a, \ \operatorname{ctg} x = a, \tag{1}$$

kurias reikia išspręsti.

Todėl pirmiausia priminsime, su kokiomis a reikšmėmis (1) išraiškos lygtys yra išsprendžiamos (turi sprendinius) ir kaip teisingai rasti tokių lygčių visus sprendinius.

1°. Lygtis

$$\sin x = a. \tag{2}$$

Kadangi funkcijos $y = \sin x$ reikšmės užpildo atkarpą $[-1, 1]$, tai (2) lygtis išsprendžiama tada ir tik tada, kai

$$|a| \leqslant 1. \tag{3}$$

Jei (3) sąlyga galioja, tai (2) lygties visi sprendiniai, kaip žinome, užrašomi formule

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n; \tag{4}$$

čia n įgyja bet kokias sveikąsias reikšmes, t.y. $n = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots$ (arcsin a prasmė aiškinama 164 puslapyje).

Jei (3) sąlyga negalioja, t.y. $|a| > 1$, tai (2) lygtis neturi (realių) sprendinių. Visa tai reikia gerai įsidėmėti, nes priešingu atveju mokiniai ir stojantieji į aukštąsias mokyklas darys klaidų. Pavyzdžiui, spręsdami lygtį $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{2}$, kai kurie mokiniai, neatkreipę dėmesio, kad $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$, rašo „atsakymą" $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{5}}{2} + \pi n$. Tuo tarpu šis „atsakymas" neturi jokios prasmės, nes funkcija $\arcsin x$ neapibrėžta taške $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ (t.y. šis taškas nepriklauso funkcijos $\arcsin x$ apibrėžimo sričiai).

Pastaba. Ateityje, spręsdami trigonometrines lygtis ir sistemas, trumpumo dėlei nerašysime kiekvieną kartą atsakyme, kad $n, k, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (bet to negalima užmiršti).

1 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sin x = \frac{1}{2}$.

Sprendimas. $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$.

2 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sprendimas. $x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \pi n = (-1)^n \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n = (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \pi n$.

3 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\sin x = \frac{\sqrt{10}-1}{2}$.

Sprendimas. Ši lygtis neturi sprendinių, nes $\sqrt{10} > 3$ ir, vadinasi, $\frac{\sqrt{10}-1}{2} > 1$.

2.° Lygtis

$$\cos x = a. \tag{5}$$

Ši lygtis taip pat turi sprendinius tada ir tik tada, kai

$$|a| \leqslant 1. \tag{6}$$

Jei (6) sąlyga galioja, tai visi (5) lygties sprendiniai užrašomi formule

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n. \tag{7}$$

Kai $|a| > 1$, tai (5) lygtis neturi sprendinių.

4 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\cos x = \frac{1}{2}$.

Sprendimas. $x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

5 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sprendimas. $x = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n$.

6 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\cos x = 1 - \sqrt{5}$.

Sprendimas. Ši lygtis neturi sprendinių, nes $1 - \sqrt{5} < -1$.

3°. Lygtis

$$\operatorname{tg} x = a. \tag{8}$$

Ši lygtis yra išsprendžiama su visomis a reikšmėmis. Visi (8) lygties sprendiniai užrašomi formule

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n. \tag{9}$$

7 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$.

Sprendimas. $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n = \frac{\pi}{3} + \pi n$.

8 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\operatorname{tg} x = -1$.

Sprendimas. $x = \operatorname{arctg}(-1) + \pi n = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

4°. Lygtis

$$\operatorname{ctg} x = a. \qquad (10)$$

Ši lygtis yra išsprendžiama su visomis a reikšmėmis. Visi (10) lygties sprendiniai užrašomi formule

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n. \qquad (11)$$

9 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$.

Sprendimas. $x = \operatorname{arcctg} \sqrt{3} + \pi n = \frac{\pi}{6} + \pi n$.

10 pavyzdys. Išspręskite lygtį $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Sprendimas. $x = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n = \frac{2\pi}{3} + \pi n$.

Pabaigai parašysime kai kurių dažnai pasitaikančių paprasčiausių trigonometrinių lygčių atskirų atvejų sprendinius:

a) $\sin x = 0$, $x = \pi n$;

b) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

c) $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

d) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$;

e) $\cos x = 1$, $x = 2\pi n$;

f) $\cos x = -1$, $x = \pi(2n+1)$.

§ 2. sin *f*(*x*)=*a*, *f* (*sin x*)=0 ir kitos analogiškos lygtys

Šiame paragrafe išnagrinėsime vieno tipo lygčių

$$\sin f(x) = a,\ \cos f(x) = a,\ \operatorname{tg} f(x) = a,\ \operatorname{ctg} f(x) = a, \qquad (12)$$

taip pat ir kito tipo lygčių

$$f(\sin x) = 0,\ f(\cos x) = 0,\ f(\operatorname{tg} x) = 0,\ f(\operatorname{ctg} x) = 0 \qquad (13)$$

sprendimą.

Visos šios lygtys nesunkiai pertvarkomos į paprasčiausias trigonometrines lygtis, kurias išnagrinėjome ankstesniame paragrafe.

Pakeitę $t = f(x)$, (12) lygtis pertvarkysime į paprasčiausias trigonometrines lygtis ir lygtis $f(x) = b$. Pavyzdžiui, taip pakeitę, iš lygties $\sin f(x) = a$ gauname sistemą

$$\begin{cases} f(x) = t, \\ \sin t = a. \end{cases}$$

Antroji lygtis turi sprendinį

$$t = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

(kai $|a|\leqslant 1$). Įrašę šį sprendinį į pirmąją lygtį, gauname lygtį

$$f(x)=(-1)^n \arcsin a+\pi n, \tag{14}$$

kuri yra paprastesnė, negu pradinė lygtis (ir ekvivalenti jai). Kai $|a|>1$, duotoji lygtis $\sin f(x)=a$ neturi sprendinių. Analogiškai lygtis $\cos f(x)=a$, kai $|a|\leqslant 1$, ekvivalenti lygčiai

$$f(x)=\pm\arccos a+2\pi n. \tag{15}$$

Tokiu pat būdu sprendžiamos ir kitos dvi (12) tipo lygtys.

11 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin(3x-1)=\frac{1}{5}.$$

Sprendimas. Ši lygtis ekvivalenti lygčiai $3x-1=(-1)^n \arcsin\frac{1}{5}+$ $+\pi n$ (žr. (14)), iš kurios gauname

$$x=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(-1)^n \arcsin\frac{1}{5}+\frac{\pi n}{3}.$$

12 pavyzdys. Raskite lygties $\cos(x^2-2)=\frac{1}{2}$ realiuosius sprendinius.

Sprendimas. Ši lygtis ekvivalenti lygčiai $x^2-2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$ (žr. (15)), t.y. ekvivalenti lygčiai

$$x^2=2\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n.$$

Kadangi x reikšmės turi būti realios, tai turi galioti sąlyga $2\pm\frac{\pi}{3}+$ $+2\pi n\geqslant 0$. Todėl n gali įgyti tik reikšmes 0, 1, 2, ...

Ats. $x=\pm\sqrt{2\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n}$; čia $n=0, 1, 2, \ldots$

Pastaba. Spręsdami (12) išraiškos lygtis, mokiniai bei stojantieji į aukštąsias mokyklas dažnai daro vieną tipišką klaidą, susijusią su neteisingu trigonometrinių funkcijų periodiškumo suvokimu. Pavyzdžiui, spręsdami lygtį $\cos 2x=-\frac{1}{2}$, kai kurie mokiniai samprotauja taip: „Rasime kokią nors x reikšmę, tinkančią lygčiai; pavyzdžiui, galima imti $x_0=\frac{\pi}{3}$. Tada visus sprendinius galime parašyti taip: $x=\pm\frac{\pi}{3}+$ $+2\pi n$“. Klaida atsirado todėl, kad funkcijos $\cos 2x$ periodas lygus π, o ne 2π; gi čia į tai neatsižvelgta. Teisingai išspręsime, taikydami (15) formulę, pagal kurią $2x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$. Iš čia $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. Štai kitas pavyzdys. Raskite lygties $\cos(x^2-4)=1$ realiuosius sprendinius. Spręsdami šią lygtį, kai kurie mokiniai samprotauja taip: „Aišku, kad $x=\pm 2$ tinka lygčiai; todėl visus sprendinius galima parašyti taip: $x=\pm 2+2\pi n$“. Čia padaryta dar didesnė klaida: juk funkcija $\cos(x^2-4)$ yra neperiodinė. Šią lygtį teisingai išspręsime, taikydami (15) formulę: $x^2-4=2\pi n$,

$x= \pm \sqrt{4+2\pi n}$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Taigi išnagrinėtasis sprendimo būdas (pagrįstas (14), (15) formulėmis), padės išvengti klaidų.

Dabar nagrinėsime (13) išraiškos lygtis. Jeigu, spręsdami šias lygtis, įvesime pagalbinį nežinomąjį t pagal formulę $t=\sin x$ (arba atitinkamai, $t=\cos x$, $t=\operatorname{tg} x$, $t=\operatorname{ctg} x$), tai turėsime lygtį $f(t)=0$, kurią išsprendę, gausime paprasčiausias trigonometrines lygtis. Detaliau panagrinėsime pirmąją lygtį $f(\sin x)=0$. Pažymėję nežinomąjį $t=\sin x$, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} t=\sin x, \\ f(t)=0. \end{cases}$$

Kai antroji šios sistemos lygtis turi šaknis $t_1, t_2, \ldots, t_n$, tai duotoji lygtis $f(\sin x)=0$ ekvivalenti paprasčiausiųjų trigonometrinių lygčių

$$\sin x=t_1,\ \sin x=t_2,\ \ldots,\ \sin x=t_n$$

disjunkcijai.

Išnagrinėsime, pavyzdžiui, lygtį

$$a \sin^2 x+b \sin x+c=0,\quad a\neq 0. \tag{16}$$

Tai $f(\sin x)=0$ išraiškos lygtis. Pažymėję $\sin x=t$, (16) lygtį pakeisime lygtimi

$$f(t)=at^2+bt+c=0, \tag{17}$$

iš kurios turime

$$t_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{18}$$

$$t_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \tag{19}$$

Vadinasi, (16) lygtis ekvivalenti lygčių $\sin x=t_1$, $\sin x=t_2$ disjunkcijai. Iš to išplaukia, kad (16) lygtis turi sprendinius tada ir tik tada, kai (17) lygties šaknys t_1 ir t_2 yra realiosios (t.y. $D=b^2-4ac\geqslant 0$) ir bent viena šių šaknų absoliutiniu didumu yra ne didesnė už vienetą.

Tada: 1) kai $|t_1|>1$, $|t_2|>1$, (16) lygtis neturi sprendinių; 2) kai $|t_1|\leqslant 1$, $|t_2|>1$, lygtis turi vieną sprendinių seriją:

$$x=(-1)^n \arcsin t_1+\pi n; \tag{20}$$

čia t_1 apibrėžiamas (18) formule (analogiškai, kai $|t_2|\leqslant 1$, $|t_1|>1$); 3) kai $|t_1|\leqslant 1$, $|t_2|\leqslant 1$, (16) lygtis, be (20) serijos, turi dar vieną sprendinių seriją:

$$x=(-1)^n \arcsin t_2+\pi n;$$

čia t_2 apibrėžiamas (19) formule.

13 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin^2 x+3 \sin x+5=0.$$

Sprendimas. Kadangi lygtis $t^2+3t+5=0$ neturi realiųjų sprendinių ($D=3^2-5\cdot 4<0$), tai sprendinių neturi ir pradinė lygtis.

14 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2\sin^2x+\sin x-1=0.$$

Sprendimas. Lygtis $2t^2+t-1=0$ turi dvi šaknis

$$t_1=-1,\ t_2=\frac{1}{2}.$$

Vadinasi, duotoji lygtis turi dvi sprendinių serijas:

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n.$$

15 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$3\sin^2x-5\sin x-2=0.$$

Sprendimas. Lygtis $3t^2-5t-2=0$ turi šaknis

$$t_1=-\frac{1}{3},\ t_2=2.$$

Todėl duotoji lygtis turi vieną sprendinių seriją:

$$x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{3}+\pi n.$$

Lygtį

$$A\cos^2x+B\sin x+C=0 \tag{21}$$

nesunku pakeisti (16) išraiškos lygtimi. Iš tiesų $\cos^2x=1-\sin^2x$, ir todėl (21) lygtį galima parašyti taip:

$$A(1-\sin^2x)+B\sin x+C=0,$$

arba

$$(-A)\sin^2x+B\sin x+(C+A)=0.$$

16 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\cos^2x-\sin x-1=0.$$

Sprendimas. Duotąją lygtį parašome taip: $\sin^2x+\sin x=0$, arba $\sin x(\sin x+1)=0$. Taigi pradinė lygtis ekvivalenti lygčių $\sin x=0$, $\sin x=-1$ disjunkcijai.

Ats. $x=\pi n,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Bendresnės išraiškos, negu (16) lygtis, yra lygtis

$$a_0\sin^nx+a_1\sin^{n-1}x+\ldots+a_{n-1}\sin x+a_n=0. \tag{22}$$

Pažymėję $t=\sin x$, ją pakeičiame algebrine lygtimi

$$a_0t^n+a_1t^{n-1}+\ldots+a_{n-1}t+a_n=0. \tag{23}$$

Kai $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – (23) lygties šaknys, tai, kaip jau minėta, (22) lygtis ekvivalenti lygčių

$$\sin x = t_1, \ \sin x = t_2, \ \ldots, \ \sin x = t_n$$

disjunkcijai. Iš to išplaukia, kad (22) lygtis turi sprendinius tada ir tik tada, kai (23) lygtis turi realiąsias šaknis ir bent viena šių šaknų absoliutiniu didumu yra ne didesnė už vienetą.

Lygtį $a_0 \sin^{2n+1} x + a_1 \cos^{2n} x + a_2 \sin^{2n-1} x + a_3 \cos^{2n-2} x + \ \ldots \ + a_{2n} \sin x + a_{2n+1} = 0$ taip pat galima pakeisti algebrine lygtimi $t = \sin x$ atžvilgiu, nes

$$\cos^{2k} x = (1 - \sin^2 x)^k = (1 - t^2)^k.$$

Suprantama, kad visa tai, kas buvo pasakyta apie lygtis, pakeičiamas algebrinėmis lygtimis $t = \sin x$ atžvilgiu, tinka lygtims, kuriose yra tik $\cos x$.

Pavyzdžiui, lygtį

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0, \tag{24}$$

pažymėję $t = \cos x$, pakeičiame kvadratine lygtimi $at^2 + bt + c = 0$.

Pakeitę $\sin^2 x$ reiškiniu $1 - \cos^2 x$, lygtį

$$a \sin^2 x + b \cos x + c = 0$$

taip pat pertvarkome į (24) išraiškos lygtį.

Siūlome skaitytojams savarankiškai suformuluoti (24) lygties išsprendžiamumo būtinas ir pakankamas sąlygas, taip pat ištirti, kada ši lygtis turi dvi sprendinių serijas, vieną sprendinių seriją arba neturi sprendinių.

Išnagrinėsime lygtis, kurias galima pakeisti algebrinėmis lygtimis funkcijų $\operatorname{tg} x$ bei $\operatorname{ctg} x$ atžvilgiu:

$$a_0 \operatorname{tg}^n x + a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x + \ \ldots \ + a_{n-1} \operatorname{tg} x + a_n = 0, \tag{25}$$

$$b_0 \operatorname{ctg}^n x + b_1 \operatorname{ctg}^{n-1} x + \ \ldots \ + b_{n-1} \operatorname{ctg} x + b_n = 0. \tag{26}$$

Pažymėję $\operatorname{tg} x = t$, (25) lygtį pakeisime algebrine lygtimi

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \ \ldots \ + a_{n-1} t + a_n = 0. \tag{27}$$

Kai $t_1, t_2, \ldots, t_n$ – (27) lygties šaknys, tai (25) lygtis, kaip jau minėta, ekvivalenti lygčių

$$\operatorname{tg} x = t_1, \ \operatorname{tg} x = t_2, \ \ldots, \ \operatorname{tg} x = t_n$$

disjunkcijai. Todėl (25) lygtį galima išspręsti tada ir tik tada, kai bent viena (27) lygties šaknis yra reali. Tą patį galima pasakyti ir apie (26) lygties išsprendžiamumą.

17 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x = 0.$$

Sprendimas. Pažymėję $\operatorname{tg} x = t$, gauname lygtį $t^3 + 2t^2 + 3t = 0$, arba $t(t^2 + 2t + 3) = 0$. Ši lygtis turi tik vieną realiąją šaknį $t = 0$. Vadinasi, duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $\operatorname{tg} x = 0$.

Ats. $x = \pi n$.

18 pavyzdys. Lygtis

$$\operatorname{ctg}^2 x+3 \operatorname{ctg} x+5=0$$

neturi sprendinių, nes lygtis $u^2+3u+5=0$ neturi realiųjų šaknų.

§ 3. Lygtys, homogeninės $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu

Išnagrinėsime lygtį

$$a_0 \sin^n x+a_1 \sin^{n-1}x \cos x+a_2 \sin^{n-2} x \cos^2 x+ \ldots$$
$$\ldots +a_{n-1} \sin x \cos^{n-1} x+a_n \cos^n x=0; \qquad (28)$$

čia $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – realieji skaičiai. Šioje lygtyje kosinuso ir sinuso, esančių kiekviename dėmenyje, laipsnių rodiklių suma yra vienoda ir lygi n. Tokią lygtį vadiname lygtimi, *homogenine* $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu, o skaičių n vadiname *homogeniškumo rodikliu.*

Kai $a_0=0$, tai aišku, kad visos lygties $\cos x=0$ šaknys $\left(\text{t.y. skaičiai } \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ tinka (28) lygčiai. Kai $a_0\neq0$, tai šie skaičiai nėra (28) lygties šaknys. Iš tiesų, kai $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, tai $\cos x=0$, $\sin x=\pm1$, ir todėl kairioji (28) lygties pusė įgyja reikšmę $\pm a_0\neq0$. Taigi, ar skaičiai $\frac{\pi}{2}+\pi n$ yra (28) lygties šaknys, galima ištirti tiesiogiai.

Dabar ieškosime tų (28) lygties šaknų, kurios nelygios šiems skaičiams, t.y. kai $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$. Su šiomis x reikšmėmis $\cos x\neq0$, ir todėl abi (28) lygties puses galima padalyti iš $\cos^n x$. Padaliję gauname lygtį

$$a_0 \operatorname{tg}^n x+a_1 \operatorname{tg}^{n-1} x+ \ldots +a_{n-1} \operatorname{tg} x+a^n=0, \qquad (29)$$

kurią spręsti jau mokame (žr. (25) lygtį). Įsidėmėtina, kad (29) lygtis, kai $a_0\neq0$, ekvivalenti (28) lygčiai.

Panagrinėsime detaliau homogenines lygtis, kurių homogeniškumo rodikliai lygūs 1 ir 2. Kai $n=1$, turime lygtį

$$a \sin x+b \cos x=0.$$

Jeigu $a\neq0$, tai ši lygtis ekvivalenti lygčiai $a \operatorname{tg} x+b=0$, arba $\operatorname{tg} x=-\frac{b}{a}$. Tada $x=-\operatorname{arctg} \frac{b}{a}+\pi n$.

19 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2 \sin x-3 \cos x=0.$$

Sprendimas. Ši lygtis ekvivalenti paprasčiausiai trigonometrinei lygčiai $\operatorname{tg} x=\frac{3}{2}$.

Ats. $x=\operatorname{arctg} \frac{3}{2}+\pi n$.

Kai $n=2$, turime homogeninę lygtį

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0. \quad (30)$$

Jeigu $a \neq 0$, tai (30) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0. \quad (31)$$

Pažymėję $\operatorname{tg} x = t$, iš (31) lygties gauname kvadratinę lygtį

$$at^2 + bt + c = 0. \quad (32)$$

Kai $b^2 - 4ac \geqslant 0$, tai (32) lygtis turi realiąsias šaknis

$$t_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad t_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vadinasi, (31) lygtis turi dvi sprendinių serijas:

$$x = \operatorname{arctg} t_1 + \pi n, \quad x = \operatorname{arctg} t_2 + \pi n.$$

Kai $b^2 - 4ac < 0$, tai (31) lygtis neturi sprendinių.

20 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$$

Sprendimas. Ši lygtis ekvivalenti lygčiai $2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0$, iš kurios, pakeitę $\operatorname{tg} x = t$, gauname kvadratinę lygtį $2t^2 + 3t + 1 = 0$, turinčią šaknis $t_1 = -1$, $t_2 = -\frac{1}{2}$. Dabar randame duotosios lygties dvi sprendinių serijas.

Ats. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$.

21 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 8 \cos^2 x = 0.$$

Sprendimas. Ši lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\operatorname{tg}^2 x + 5 \operatorname{tg} x + 8 = 0.$$

Kadangi atitinkama kvadratinė lygtis $t^2 + 5t + 8 = 0$ neturi realiųjų šaknų, tai duotoji lygtis neturi sprendinių.

Lygtį

$$a_0 \sin^{2n} x + a_1 \sin^{2n-1} x \cos x + \ldots$$
$$\ldots + a_{2n-1} \sin x \cos^{2n-1} x + a_{2n} \cos^{2n} x = q$$

taip pat galima pakeisti (28) išraiškos lygtimi. Dėl to pakanka pritaikyti tapatybę

$$q \equiv q (\sin^2 x + \cos^2 x)^n.$$

Kaip tik tokiu pat būdu galima lygtį

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$$

pakeisti (30) išraiškos lygtimi. Iš tiesų, kadangi $d \equiv d(\sin^2 x + \cos^2 x)$, tai (33) lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(a-d)\sin^2 x + b \sin x \cos x + (c-d)\cos^2 x = 0.$$

22 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 4.$$

Sprendimas.

$$4 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - \cos^2 x = 0,$$

$$4 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 1 = 0,$$

$$4t^2 - 2t - 1 = 0,$$

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}.$$

Ats. $x = \operatorname{arctg} \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} + \pi n, \quad x = -\operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{5}-1}{4} + \pi n.$

Norėdami (33) lygtį pakeisti (30) lygtimi, imame pagrindinę trigonometrinę tapatybę

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \tag{34}$$

Taikydami šią tapatybę, galime ne tik kai kurias lygtis pakeisti (28) išraiškos lygtimis, bet kai kada rasti paprastesnių jų sprendimo būdų. Todėl, taikydami kai kurias tapatybes, gaunamas iš (34) sąryšio, turime

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x;$$

iš čia

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x. \tag{35}$$

Toliau

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x - \frac{1}{4} \sin^2 2x.$$

Taigi

$$\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x. \tag{36}$$

Dabar, pritaikę (35) formulę, pertvarkysime sumą $\sin^8 x + \cos^8 x$. Turime

$$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2 \sin^4 x \cos^4 x =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x\right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x = 1 - \sin^2 2x + \frac{1}{4} \sin^4 2x - \frac{1}{8} \sin^4 2x.$$

Todėl

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\cos^2 2x+\frac{1}{8}\sin^4 2x. \qquad (37)$$

Spręsdami trigonometrines lygtis, dažnai taikysime (35)–(37) formules.

23 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Sprendimas. Pakeitę dešiniąją šios lygties pusę reiškiniu $2\sin^2 x\cos^2 x$, galėtume gautąją lygtį išspręsti kaip homogeninę funkcijų $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu (t.y. kaip (28) išraiškos lygtį). Pateiksime kitą sprendimą.

Pagal (35) formulę duotąją lygtį pakeičiame lygtimi $\sin^2 2x=1$, arba $\cos^2 2x=0$. Taigi belieka išspręsti lygtį $\cos 2x=0$.

Ats. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

24 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}.$$

Sprendimas. Šią lygtį taip pat galima pertvarkyti į lygtį, homogeninę funkcijų $\sin x$ ir $\cos x$ atžvilgiu: reikia dešiniąją jos pusę padauginti iš $(\sin^2 x+\cos^2 x)^3$. Tačiau, pritaikę (36) formulę, galėsime ją lengviau išspręsti. Gauname

$$\frac{1}{4}=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x,\quad \sin^2 2x=1,\quad \cos^2 2x=0.$$

Ats. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

25 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin^8 x+\cos^8 x=\cos^2 2x.$$

Sprendimas. Šiai lygčiai taip pat nesunku suteikti (28) išraišką: dėl to dešiniąją jos pusę reikia pakeisti reiškiniu $(\cos^2 x-\sin^2 x)^2$, o po to padauginti iš $(\cos^2 x+\sin^2 x)^2$. Tai padarę ir suprastinę, iš duotosios lygties gauname lygtį $2\sin^4 x\cos^4 x=0$, arba $\sin^4 2x=0$. Bet dar lengviau gautume šią lygtį, taikydami (37) formulę.

Ats. $x=\frac{\pi n}{2}$.

§ 4. Pagalbinio kampo įvedimas

Šiame paragrafe nagrinėsime lygčių

$$a\cos x+b\sin x=c \qquad (38)$$

sprendimą. Paprasčiausias tokios lygties sprendimo būdas pagrįstas *pagalbinio kampo* įvedimu.

Kai $c=0$, tai (38) lygtis yra homogeninė (žr. § 3).

Tarkime, kad $c \neq 0$ ir, be to, $a^2+b^2 \neq 0$, t.y. bent vienas skaičių a, b yra nelygus nuliui (kai vienas šių skaičių a, b lygus nuliui, pavyzdžiui $a=0$, bet $b \neq 0$, tai gauname paprasčiausią trigonometrinę lygtį $b \sin x = c$, arba $\sin x = \frac{c}{b}$).

Padaliję abi (38) lygties puses iš $\sqrt{a^2+b^2}$, gauname lygtį

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ekvivalenčią (38) lygčiai.

Kadangi

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

tai egzistuoja toks kampas φ, kad

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \varphi, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \varphi. \tag{39}$$

Vadinasi, (38) lygtį galima pakeisti lygtimi

$$\cos x \sin \varphi + \sin x \cos \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

arba

$$\sin (x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{40}$$

(40) lygtis, o kartu ir (38) lygtis, turi sprendinius tada ir tik tada, kai

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| \leqslant 1, \quad \text{arba} \quad c^2 \leqslant a^2+b^2. \tag{41}$$

Kai galioja ši sąlyga, tai (38) lygtis turi tokius sprendinius:

$$x = -\varphi + (-1)^n \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi n;$$

čia φ apskaičiuojamas iš (39) formulių.

Kai (41) sąlyga negalioja, t.y.

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| > 1, \quad \text{arba} \quad c^2 > a^2+b^2,$$

tai (38) lygtis neturi sprendinių.

26 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$3 \sin x + 4 \cos x = 5.$$

Sprendimas. Pertvarkę duotąją lygtį į lygtį $\frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x = 1$, įvedame pagalbinį kampą: $\frac{3}{5} = \cos \varphi$, $\frac{4}{5} = \sin \varphi$.

Kadangi $\sin\varphi>0$, $\cos\varphi>0$, tai kampui φ galima parinkti reikšmę $\varphi=\arcsin\frac{4}{5}$. Gauname lygtį

$$\sin(x+\varphi)=1.$$

Ats. $x=-\arcsin\frac{4}{5}+\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

27 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2\sin x+3\cos x=4.$$

Sprendimas. Kadangi $2^2+3^3<4^2$, tai duotoji lygtis neturi sprendinių.

§ 5. Nežinomojo keitimo metodas

IX skyriuje nagrinėjome lygčių sprendimą nežinomojo keitimo metodu (žr. p. 219). Čia nurodysime tris labiausiai paplitusius naujo nežinomojo įvedimo būdus, sprendžiant trigonometrines lygtis.

1°. Keitinys $t=\sin x+\cos x$. Tarkime, kad duota trigonometrinė lygtis $F(x)=0$. Funkciją $\sin x+\cos x$ pažymėsime $g(x)$ ir įvesime naują nežinomąjį $t=g(x)=\sin x+\cos x$. Jeigu pavyktų funkciją $F(x)$ išreikšti nežinomuoju t, t.y. suteikti jai išraišką $F(x)=f\big(g(x)\big)$, tai lygties $F(x)=0$ sprendimą pakeistume lygties $f(t)=0$ sprendimu (žr. 3 teoremą, p. 219). Suprantama, kad ne visada lengvai pavyksta kairiąją pusę $F(x)$ išreikšti nežinomuoju $t=\sin x+\cos x$. Išnagrinėsime vieną atvejį, kai šitai padaryti būna nesunku.

Taigi (tam tikroje trigonometrinėje lygtyje) įvesime naują nežinomąjį $t=\sin x+\cos x$. Pritaikę tapatybę $(\sin x+\cos x)^2=1+\sin 2x$, gauname $\sin 2x=t^2-1$.

Vadinasi, kai trigonometrinės lygties $F(x)=0$ kairiąją pusę galime išreikšti $\sin x+\cos x$ ir $\sin 2x$, t.y. $F(x)=\varphi(\sin x+\cos x, \sin 2x)$, tai tada $F(x)$ irgi lengva išreikšti nežinomuoju t. Taigi, *kai trigonometrinės lygties $F(x)=0$ kairiąją pusę galima išreikšti* $\sin x+\cos x$ *ir* $\sin 2x$, *tai nežinomąjį tikslinga pakeisti pagal formules*

$$\sin x+\cos x=t,$$

$$\sin 2x=t^2-1.$$

Išnagrinėsime, pavyzdžiui, lygtį

$$a(\sin x+\cos x)+b\sin 2x+c=0. \tag{42}$$

Pritaikę minėtuosius keitinius, iš (42) lygties gauname kvadratinę lygtį nežinomojo t atžvilgiu:

$$at+b(t^2-1)+c=0,$$

arba

$$bt^2+at+(c-b)=0. \tag{43}$$

Kai t_1, t_2 – šios kvadratinės lygties šaknys, tai pagal 3 teoremą (p. 219) (42) lygtis ekvivalenti lygčių

$$\sin x+\cos x=t_1, \quad \sin x+\cos x=t_2$$

disjunkcijai. Kaip sprendžiamos tokios lygtys, jau nagrinėjome pirmesniame paragrafe.

28 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2(\sin x+\cos x)+\sin 2x+1=0.$$

Sprendimas. Pažymėję $\sin x+\cos x=t$, gauname kvadratinę lygtį $2t+(t^2-1)+1=0$, arba $t^2+2t=0$, kurios šaknys $t_1=0$, $t_2=-2$. Taigi duotoji lygtis ekvivalenti lygčių $\sin x+\cos x=0$, $\sin x+\cos x=-2$ disjunkcijai. Pirmoji šių lygčių ekvivalenti lygčiai $\operatorname{tg} x=-1$ ir turi sprendinius $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$. Antroji lygtis neturi sprendinių.

Ats. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$.

Pastaba. (42) lygtis turi sprendinius tada ir tik tada, kai (43) lygties diskriminantas neneigiamas ir bent viena (43) lygties šaknis tenkina sąlygą $|t|\leqslant\sqrt{2}$, nes $|\sin x+\cos x|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant\sqrt{2}$.

Analogiškai sprendžiamos ir tokios lygtys

$$a(\sin x-\cos x)+b\sin 2x+c=0.$$

Čia patogu pažymėti $t=\sin x-\cos x$ (ir tada $\sin 2x=1-t^2$).

2°. Keitinys $t=\cos 2x$. Taip pakeitus, funkcijas $\sin^2 x$ ir $\cos^2 x$ nesunku išreikšti nežinomuoju t:

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1-t}{2},$$

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1+t}{2}.$$

Taigi, *kai trigonometrinės lygties* $F(x)=0$ *kairiąją pusę galima išreikšti funkcijomis* $\cos 2x$, $\sin^2 x$ *ir* $\cos^2 x$, *tai nežinomąjį tikslinga pakeisti pagal formules*

$$\begin{cases}\cos 2x=t,\\ \sin^2 x=\frac{1-t}{2},\\ \cos^2 x=\frac{1+t}{2}.\end{cases} \tag{44}$$

Išnagrinėsime, pavyzdžiui, lygtį

$$a\cos 2x+2b\cos^2 x=c. \tag{45}$$

Šią lygtį galėtume pakeisti lygtimi, homogenine funkcijų $\sin x$ bei $\cos x$ atžvilgiu (žr. § 3). Tačiau, pakeitę $\cos 2x=t$, ją išspręsime paprasčiau.

Tada iš (45) lygties gauname lygtį $at+2b\frac{1+t}{2}=c$, arba $(a+b)t=c-b$. Kitaip tariant, (45) lygtį pertvarkėme į lygtį nežinomojo $\cos 2x$ atžvilgiu:

$$(a+b)\cos 2x=c-b$$

(tai, beje, galėtume gauti ir tiesiogiai, (45) lygtyje $\cos^2 x$ pakeitę reiškiniu $\frac{1+\cos 2x}{2}$).

Analogiškai galima spręsti ir tokias lygtis:

$$a\cos 2x+2b\sin^2 x=c.$$

29 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\cos 2x+4\sin^4 x=8\cos^6 x.$$

Sprendimas. Pritaikę (44) keitinį, gauname lygtį $t+(1-t)^2=(1+t)^3$, t.y. $t^3+2t^2+4t=0$, arba galiausiai $t(t^2+2t+4)=0$. Ši lygtis turi tik vieną realiąją šaknį $t=0$, ir todėl duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $\cos 2x=0$.

Ats. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

30 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\frac{1}{4}.$$

Sprendimas. Šią lygtį jau nagrinėjome (žr. 24 pavyzdį). Dabar ją išspręsime, pritaikę (44) keitinį. Taip padarę, iš duotosios lygties gauname lygtį

$$\left(\frac{1-t}{2}\right)^3+\left(\frac{1+t}{2}\right)^3=\frac{1}{4},$$

kurią suprastinę, turime $t^2=0$, t.y. $\cos 2x=0$.

Ats. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

Tokiu pat būdu galima išspręsti ir (25) lygtį.

Čia nagrinėjamas (44) keitinys pagrįstas formulėmis

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}. \qquad (46)$$

Kartais patogiau tiesiog taikyti (46) formules, o ne (44) keitinį (tai pastebėjome, nagrinėdami (45) lygtį). Pavyzdžiui, pritaikę (46) formules, lygtis

$$a\sin 2x+2b\sin^2 x=c,$$

$$a\sin 2x+2b\cos^2 x=c$$

pakeičiame lygtimis $A\sin 2x+B\cos 2x=C$, kurias jau nagrinėjome § 4.

Išnagrinėsime dar kelis pavyzdžius, kuriuos patogu išspręsti, taikant (46) formules.

31 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2\cos^2 4x+\sin 10x=1.$$

Sprendimas. Kadangi $2\cos^2 4x-1=\cos 8x$, tai lygtį galima parašyti taip:

$$\sin 10x+\cos 8x=0, \quad \text{arba} \quad \sin 10x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-8x\right)=0.$$

Iš čia randame

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(9x-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Ats. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, \quad x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{9}.$

32 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin^2 x+\cos^2 2x=\sin^2 3x+\cos^2 4x.$$

Sprendimas. Pagal (46) formules gauname

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}=\frac{1-\cos 6x}{2}+\frac{1+\cos 8x}{2},$$

arba

$$\cos 4x-\cos 2x=\cos 8x-\cos 6x.$$

Pakeitę kosinusų skirtumus sandaugomis, turime

$$2\sin x\sin 3x=2\sin 7x\sin x,$$

$$\sin x(\sin 7x-\sin 3x)=0, \ \sin x\sin 2x\cos 5x=0.$$

Ats. $x=\frac{\pi n}{2}, \quad x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5} \ (k\neq 5l+2).$

(46) formules taip pat galima taikyti, sprendžiant lygtis

$$\cos^2 ax+\cos^2 bx=\cos^2 cx+\cos^2 dx,$$

$$\sin^2 ax+\sin^2 bx=\sin^2 cx+\sin^2 dx,$$

kai skaičiai a, b, c, d tenkina vieną šių sąlygų $a+b=c+d$, $a-b=c-d$.

3°. Keitinys $t=tg\,\frac{x}{2}$. Taip pakeitus, $\sin x$ ir $\cos x$ nesunku išreikšti nauju nežinomuoju t:

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{2\,tg\,\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Taigi gavome tokį keitinį.

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=t, \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}. \end{cases} \qquad (47)$$

(47) keitinys tinka, pavyzdžiui, tada, kai trigonometrinės lygties $F(x)=0$ kairioji pusė yra kintamųjų $\sin x$ ir $\cos x$ *racionalioji funkcija*, t.y. išreiškiama trupmena $\frac{P}{Q}$; čia P ir Q – tam tikri daugianariai, priklausantys nuo $\sin x$ bei $\cos x$. Pateikiame du tokių lygčių pavyzdžius:

$$\frac{\sin^2 x+2\cos x}{3\cos^2 x+\sin x}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{\sin 5x+\cos x}{\cos 3x+\sin 2x}=0$$

(antroji lygtis yra racionali funkcijų $\sin x$ bei $\cos x$ atžvilgiu, nes $\sin 5x$, $\cos 3x$, $\sin 2x$ – daugianariai, priklausantys nuo $\sin x$ ir $\cos x$). Pritaikę (47) keitinį, iš nagrinėjamo tipo lygties gauname (po suprastinimo) lygtį $\frac{M(t)}{N(t)}=0$; čia M ir N – tam tikri daugianariai. Taigi gauname algebrinę lygtį $M(t)=0$ nežinomojo $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ atžvilgiu. Tačiau reikia pabrėžti, kad kartais, sprendžiant trigonometrines lygtis pritaikius keitinį $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, gaunamas daugianaris, kurio šaknis surasti sunku. Todėl šis keitinys paprastai taikomas tik tada, kai kitaip lygties išspręsti negalima.

Pastaba. (47) formulės neturi prasmės, kai

$$\cos\frac{x}{2}=0, \quad \text{t.y.} \quad x=\pi(2n+1).$$

Todėl, jeigu, spręsdami lygtis, taikome keitinį $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$, turime patikrinti, ar reikšmės $x=\pi(2n+1)$ nėra duotosios lygties šaknys.

33 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin x+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=2.$$

Sprendimas. Kadangi reikšmės $x=(2n+1)\pi$ nėra šios lygties šaknys, tai tinka (47) keitinys. Tada turėsime $\left(\text{nes } \operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1}{t}\right)$

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1}{t}=2, \quad 2t^2+1+t^2=2t^3+2t,$$

$$2t^3-3t^2+2t-1=0,$$

$$2(t^3-t^2)-(t^2-t)+(t-1)=0,$$

$$(t-1)(2t^2-t+1)=0.$$

Kadangi lygtis $2t^2-t+1=0$ neturi realiųjų šaknų, tai duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $t=1$, t.y.

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1;$$

iš čia

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$$

Ats. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n.$

Išnagrinėsime dar du nežinomojo keitimo metodo taikymo pavyzdžius.
34 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}=\sin x-\frac{1}{\sin x}+\frac{7}{4}.$$

Sprendimas. Pažymėję $\sin x-\frac{1}{\sin x}=t$, gauname $t^2=\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}-2$. Todėl duotąją lygtį galima parašyti taip: $t^2+2=t+\frac{7}{4}$, arba $\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=0$, iš čia $t=\frac{1}{2}$. Taigi gauname

$$\sin x-\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{2};\quad 2\sin^2 x-\sin x-2=0,$$

$$\sin x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}.$$

Ats. $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi n.$

35 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin\left(\frac{3\pi}{5}+x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right).$$

Sprendimas. Pažymėsime $\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}=t$. Tada $\frac{3\pi}{5}+x=\pi-2\left(\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}\right)=\pi-2t$ ir duotoji lygtis įgyja išraišką $\sin(\pi-2t)=2\sin t$, arba $\sin 2t=2\sin t$, $2\sin t(\cos t-1)=0$. Gavome lygčių $\sin t=0$, $\cos t=1$ disjunkciją. Kai $\cos t=1$, tai būtinai $\sin t=0$, todėl pakanka išnagrinėti tik vieną lygtį $\sin t=0$. Taigi $t=\pi n$ arba $\frac{\pi}{5}-\frac{x}{2}=\pi n$.

Ats. $x=\frac{2\pi}{5}(1-5n).$

§ 6. Skaidymo dauginamaisiais metodas

Labai paplitęs trigonometrinių lygčių sprendimo metodas – skaidymas dauginamaisiais.
Bendrieji šio metodo klausimai išnagrinėti IX skyriuje (§ 3, 4°, p. 215,216).

Dabar skaidymo dauginamaisiais metodu išspręsime kelias paprastas trigonometrines lygtis.

36 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2 \sin x \cos 2x - 1 + 2 \cos 2x - \sin x = 0.$$

Sprendimas. Iškėlę pirmojo ir trečiojo dėmenų bendrąjį dauginamąjį už skliaustų, lygtį parašome taip:

$$2 \cos 2x (\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0,$$

arba

$$(2 \cos 2x - 1)(\sin x + 1) = 0.$$

Kadangi kairioji šios lygties pusė yra apibrėžta su visomis x reikšmėmis, tai pradinė lygtis išsiskaido į šias dvi lygtis:

$$2 \cos 2x - 1 = 0, \qquad (48)$$

$$\sin x + 1 = 0 \qquad (49)$$

(arba pradinė lygtis ekvivalenti (48) ir (49) lygčių disjunkcijai).

(48) ir (49) lygtys turi tokius sprendinius:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Šios formulės apibrėžia visus duotosios lygties sprendinius.

37 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{\cos 5x}{\sin 2x}.$$

Sprendimas. Lygtį galima parašyti taip: $\frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sin 2x} = 0$, arba pagal kosinusų skirtumo formulę taip:

$$\frac{2 \sin 4x \sin x}{\sin 2x} = 0.$$

Taigi turime išspręsti lygtis

$$\sin 4x = 0, \qquad (50)$$

$$\sin x = 0. \qquad (51)$$

Duotajai lygčiai tiks tik tos (50) ir (51) lygties šaknys, su kuriomis $\sin 2x \neq 0$. Bet, kai $\sin x = 0$, tai $\sin 2x = 0$. Todėl (51) lygties šaknys nėra pradinės lygties šaknys. Kai $\sin 4x = 0$, tai arba $\cos 2x = 0$, arba $\sin 2x = 0$. Vadinasi, duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $\cos 2x = 0$.

Ats. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$.

38 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x.$$

Sprendimas. Šią lygtį pertvarkome:

$$(\cos x+\sin x)(\cos^2 x-\cos x\sin x+\sin^2 x)=\cos^2 x-\sin^2 x,$$

arba

$$(\cos x+\sin x)\big(1-\cos x\sin x-(\cos x-\sin x)\big)=0.$$

Taigi ji išsiskaido į dvi lygtis:

$$\cos x+\sin x=0,$$

$$1-(\cos x-\sin x)-\cos x\sin x=0.$$

Pirmoji lygtis turi sprendinius $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$. Iš antrosios lygties, pažymėję $\cos x-\sin x=t$ (tada $\cos x\sin x=\frac{1-t^2}{2}$), gauname lygtį $1-t-\frac{1-t^2}{2}=0$, arba $t^2-2t+1=0$, turinčią šaknį $t=1$. Todėl $\cos x-\sin x=1$, t.y. $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vadinasi, $x+\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$.

Ats. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=2\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

Skaidymo dauginamaisiais metodu galima spręsti šias lygtis:

1) $\sin(ax+\alpha)=\sin(bx+\beta)$, (52)

2) $\cos(ax+\alpha)=\cos(bx+\beta)$, (53)

3) $\sin(ax+\alpha)=\cos(bx+\beta)$, (54)

kai a, b, α, β – bet kokie skaičiai.

Išnagrinėsime, pavyzdžiui, (52) lygtį. Pagal sinusų skirtumo formulę šią lygtį galima parašyti taip:

$$2\sin\frac{(a-b)x+\alpha-\beta}{2}\cos\frac{(a+b)x+\alpha+\beta}{2}=0. \quad (55)$$

Tarsime, kad $a\neq b$ ir $a\neq -b$. Tada iš (55) lygties randame

$$\frac{a-b}{2}x+\frac{\alpha-\beta}{2}=\pi n,\quad x=-\frac{\alpha-\beta}{a-b}+\frac{2\pi n}{a-b},$$

$$\frac{(a+b)x+\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad x=\frac{\pi(2n+1)-(\alpha+\beta)}{a+b}.$$

Analogiškai galėtume rasti (53) lygties sprendinį. (54) lygtį galima pakeisti (52) išraiškos lygtimi, nes

$$\cos(bx+\beta)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-bx-\beta\right).$$

39 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\cos 3x + \sin 5x = 0.$$

Sprendimas.

$$\cos 3x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad x = \frac{3}{16}\pi + \frac{\pi n}{4}.$$

Kartais, prieš taikydami skaidymo dauginamaisiais metodą, turime dar pertvarkyti lygtį, pavyzdžiui, pakeisti trigonometrinių funkcijų sandaugą suma.

40 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin x \cos 5x = \sin 9x \cos 3x. \qquad (56)$$

Sprendimas. Pakeitę trigonometrinių funkcijų sandaugą suma, gauname lygtį

$$\frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 4x) = \frac{1}{2}(\sin 12x + \sin 6x).$$

Iš čia turime

$$\sin 12x + \sin 4x = 0.$$

Dabar taikome skaidymo dauginamaisiais metodą:

$$2 \sin 8x \cos 4x = 0.$$

Ats. $x = \frac{\pi n}{8}$.

Pritaikę trigonometrinių funkcijų sumos keitimo sandauga formules, nesunkiai išsprendėme (56) lygtį, nes po šio pakeitimo kairėje ir dešinėje lygties pusėse gavome vienodus narius $\left(\frac{1}{2}\sin 6x\right)$. Tokiu pat būdu galima spręsti ir tokias lygtis:

$$\sin ax \cos bx = \sin cx \cos dx,$$

$$\sin ax \sin bx = \cos cx \cos dx,$$

$$\sin ax \sin bx = \sin cx \sin dx,$$

$$\cos ax \cos bx = \cos cx \cos dx,$$

kai, pavyzdžiui, $a - b = c - d$.

§ 7. Kairiosios ir dešiniosios lygties pusių įvertinimas

Išankstinis kairiosios arba dešiniosios lygties pusės įvertinimas kartais padeda išspręsti lygtį arba įsitikinti, kad lygtis neturi sprendinių. Išnagrinėsime kelis pavyzdžius.

41 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$2 \sin^5 x+3 \cos^8 x=5.$$

Sprendimas. Šį kartą užtenka apytiksliai įvertinti kairiąją lygties pusę. Kadangi $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, tai

$$|2 \sin^5 x+3 \cos^8 x| \leqslant 2 |\sin^5 x|+3 \cos^8 x \leqslant 5,$$

be to, ši nelygybė tampa lygybe tik tada, kai $\sin x=1$ ir $|\cos x|=1$, o tai yra neįmanoma (nes $\sin^2 x+\cos^2 x=1$). Vadinasi, duotoji lygtis neturi sprendinių.

42 pavyzdys. Įrodykite, kad lygtis $\sin^4 x+\cos^6 x=a$ neturi sprendinių, kai $a>1$.

Įrodymas. Šį kartą apytiksliai įvertinti $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ netinka. Pasinaudosime nelygybėmis

$$\sin^4 x \leqslant \sin^2 x, \quad \cos^6 x \leqslant \cos^2 x.$$

Sudėję šias nelygybes, gauname

$$\sin^4 x+\cos^6 x \leqslant \sin^2 x+\cos^2 x=1.$$

Taigi $\sin^4 x+\cos^6 x \leqslant 1$. Iš čia išplaukia, kad duotoji lygtis, kai $a>1$, neturi sprendinių.

43 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=3.$$

Sprendimas. Kairioji lygties pusė gali būti lygi trims tik tada, kai kartu galioja trys lygybės:

$$\sin 2x=1, \quad \sin 3x=1, \quad \sin 4x=1.$$

Bet kai $\sin 2x=1$, tai $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$ ir $\sin 3x=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+3\pi n\right) \neq 1$. Vadinasi, lygtis neturi sprendinių.

44 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$(\cos 2x-\cos 4x)^2=4+\cos^2 3x.$$

Sprendimas. Turime

$$|\cos 2x-\cos 4x| \leqslant 2, \tag{57}$$

be to, čia lygybės ženklas galimas tik šiais dviem atvejais:

a) $\cos 2x=1$ ir $\cos 4x=-1$; (58)

b) $\cos 2x=-1$ ir $\cos 4x=1$. (59)

Iš (57) nelygybės išplaukia, kad kairioji lygties pusė yra ne didesnė už 4 ir lygi 4 tik tada, kai kartu galioja arba (58), arba (59) lygybės.

Dešinioji lygties pusė tenkina sąlygą $4+\cos^2 3x \geqslant 4$, be to, čia lygybė galima tik tada, kai $\cos 3x=0$.

Taigi duotoji lygtis gali turėti sprendinius dviem atvejais (kai kartu yra teisingos trys lygybės):

a) $\cos 2x = 1$, $\cos 4x = -1$, $\cos 3x = 0$;

b) $\cos 2x = -1$, $\cos 4x = 1$, $\cos 3x = 0$.

Išnagrinėsime pirmąjį atvejį.

Tarkime, kad $\cos 2x = 1$; tada $x = \pi k$. Bet tuomet $\cos 4x = \cos 4\pi k = 1$. Vadinasi, pirmuoju atveju sprendinių nėra. Dabar sakykime, kad $\cos 2x = -1$, tada $x = \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$. Bet šios x reikšmės tinka ir lygtims $\cos 4x = 1$, $\cos 3x = 0$.

Ats. $x = \pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$.

Kai trigonometrinė lygtis turi išraišką

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \ldots + f_n^2(x) = 0 \qquad (60)$$

arba kai ją galima pertvarkyti į (60) išraiškos lygtį, tai (60) lygties sprendinius, jei tik jų yra, galima rasti, išsprendus lygčių su vienu nežinomuoju sistemą

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0. \qquad (61)$$

Iš tiesų, kadangi funkcijos $f_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) laikomos realiosiomis, tai su kiekvienu x (paimtu iš (60) lygties kairiosios pusės apibrėžimo srities) (60) lygties kairioji pusė yra neneigiama ir įgyja reikšmę, lygią nuliui, tik tada, kai $f_k(x) = 0$, koks bebūtų $k = 1, 2, \ldots, n$.

Vadinasi, (60) lygtis ekvivalenti (61) lygčių sistemai.

45 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\sin^2 2x + 1 = \cos^2 3x.$$

Sprendimas. Lygtį galima parašyti taip:

$$\sin^2 2x + \sin^2 3x = 0.$$

Iš čia išplaukia, kad pradinei lygčiai tiks tos ir tik tos x reikšmės, kurios yra kiekvienos šių lygčių $\sin 2x = 0$, $\sin 3x = 0$ šaknys. Lygtis $\sin 2x = 0$ turi dvi sprendinių serijas:

$$x = \pi k, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Skaičiai $x = \pi k$ yra lygties $\sin 3x = 0$ sprendiniai, o reikšmės $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ lygčiai $\sin 3x = 0$ netinka.

Ats. $x = \pi k$.

46 pavyzdys. Išspręskite lygtį

$$\cos^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 4x + 1 = \sin 4x \cos 2x + \sin^2 x.$$

Sprendimas. Duotąją lygtį parašome taip:

$$\cos^2 2x - \sin 4x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin^2 4x + \cos^2 x = 0,$$

$$\left(\cos 2x - \frac{1}{2} \sin 4x\right)^2 + \cos^2 x = 0.$$

Pastaroji lygtis ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} \cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x, \\ \cos x = 0. \end{cases}$$

Lygtis $\cos x = 0$ turi sprendinius $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, tačiau šios x reikšmės netinka lygčiai $\cos 2x = \frac{1}{2} \sin 4x$. Taigi duotoji lygtis neturi sprendinių.

§ 8. Trigonometrinių lygčių sistemos

Išnagrinėsime tik kelis trigonometrinių sistemų tipus, ir, remdamiesi bendrąja lygčių sistemų teorija (žr. X sk.), nurodysime tinkamiausius jų sprendimo metodus.

1°. Sistema

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = b. \end{cases} \tag{62}$$

Sudėję ir atėmę (62) sistemos lygtis, gauname ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} \cos(x-y) = a+b, \\ \cos(x+y) = b-a. \end{cases} \tag{63}$$

(63) sistema, vadinasi, ir (62) sistema, turi sprendinį tada ir tik tada, kai

$$|a+b| \leqslant 1, \quad |b-a| \leqslant 1.$$

Jeigu šios nelygybės yra teisingos, tai

$$\begin{cases} x-y = \pm \arccos(a+b) + 2\pi k, \\ x+y = \pm \arccos(b-a) + 2\pi n. \end{cases} \tag{64}$$

(64) formulėse dydžiai k ir n — bet kokie sveikieji skaičiai, o ženklai jose parenkami laisvai. Taigi (64) formulės bendru atveju nustato keturias sprendimų serijas. Pažymėję

$$\arccos(a+b) = \alpha, \quad \arccos(b-a) = \beta,$$

iš (64) formulių gauname

$$\begin{cases} x-y=\alpha+2\pi k, \\ x+y=\beta+2\pi n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=-\alpha+2\pi k, \\ x+y=\quad\beta+2\pi n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=\alpha+2\pi k, \\ x+y=-\beta+2\pi n, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=-\alpha+2\pi k, \\ x+y=-\beta+2\pi n. \end{cases}$$

Iš čia randame keturias sprendinių serijas:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(n-k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\pi(k+n), \\ y=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(n-k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\pi(k+n), \\ y=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\pi(n-k). \end{cases}$$

Analogiškai galima išspręsti sistemą

$$\begin{cases} \sin x\cos y=a, \\ \cos x\sin y=b. \end{cases} \tag{65}$$

47 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sin x\cos y=-\frac{1}{2}, \\ \cos x\sin y=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sprendimas. Sistema

$$\begin{cases} \sin x\cos y+\cos x\sin y=\sin(x+y)=0, \\ \cos x\sin y-\sin x\cos y=\sin(y-x)=1 \end{cases}$$

ekvivalenti pradinei sistemai. Iš jos gauname

$$\begin{cases} x+y=\pi n, \\ y-x=\frac{\pi}{2}+2\pi k. \end{cases}$$

Ats. $x=\pi\left(\frac{n}{2}-k-\frac{1}{4}\right),\quad y=\pi\left(\frac{n}{2}+k+\frac{1}{4}\right).$

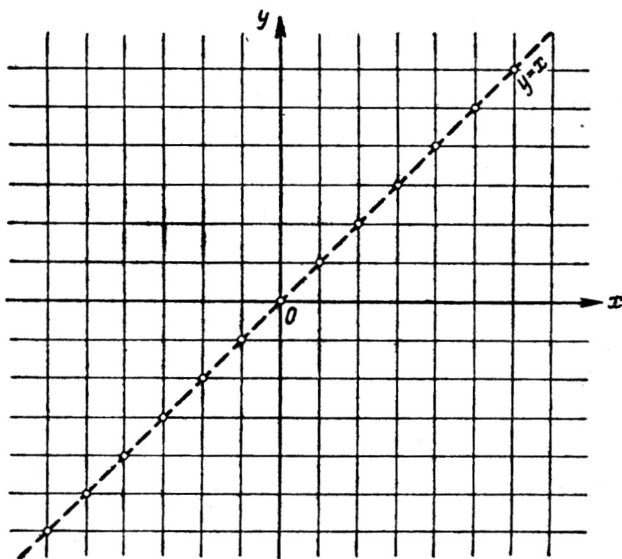
Pastaba. Atkreipsime skaitytojų dėmesį į vieną tipišką klaidą, kurią daro mokiniai (ir stojantieji į aukštąsias mokyklas), spręsdami trigonometrines sistemas. Paprastumo dėlei samprotavimus pailiustruosime lygčių sistema

$$\begin{cases} \sin \pi x=0, \\ \sin \pi y=0. \end{cases} \tag{66}$$

Dažnai jos sprendinys parašomas taip:

$$x=n,\ y=n;\ \text{čia } n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{67}$$

Nesunku suprasti, kad (67) formulės neapima visų (66) sistemos sprendinių. Kad būtų vaizdžiau, kiekvienai skaičių $(x_0;\ y_0)$ porai, sudarančiai (66) sistemos sprendinį, priskirsime plokštumos $x0y$ tašką $M(x_0;\ y_0)$.



112 pav.

Tuomet (67) formulės išreikš tik tokius (66) sistemos sprendinius, kuriuos atitinka taškai (0, 0), (1, 1,), (−1, −1) ir t.t. Vadinasi, tai bus tik tie tiesės $y=x$ (112 pav.) taškai, kurių koordinatės yra sveikieji skaičiai. Tačiau pradinei sistemai tinka visos galimos sveikųjų skaičių poros, kurios

atitinka tiesių $x=0$, $x=1$, $x=-1$, ... ir $y=0$, $y=1$, $y=-1$, ... susikirtimo taškus.

Taigi (66) sistemos sprendinį reikia rašyti taip:

$$x=n,\ y=k;\ \text{čia}\ n=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots,$$

t.y. n ir k įgyja (nepriklausomai vienas nuo kito) visas sveikąsias reikšmes.

Sistemas

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = b,\quad ab \neq 0, \end{cases} \tag{68}$$

ir

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = b,\quad ab \neq 0 \end{cases}$$

taip pat galima pertvarkyti į (62) išraiškos sistemas. Pavyzdžiui, (68) sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = \dfrac{a}{b},\quad ab \neq 0, \end{cases}$$

nes $ab \neq 0$.

Į (65) išraiškos sistemas galima pertvarkyti sistemas

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} y = b,\quad ab \neq 0. \end{cases}$$

2°. Sistema

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b, \end{cases} \tag{69}$$

pažymėjus $u = \sin x$, $v = \sin y$, pakeičiama algebrine sistema

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^2 + v^2 = b. \end{cases} \tag{70}$$

(70) sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} u + v = a, \\ uv = \dfrac{a^2 - b}{2}, \end{cases}$$

turinčiai sprendinius $(t_1;\ t_2)$, $(t_2;\ t_1)$; čia

$$t_1 = \frac{a + \sqrt{2b - a^2}}{2},\quad t_2 = \frac{a - \sqrt{2b - a^2}}{2}. \tag{71}$$

Kadangi $u = \sin x$, $v = \sin y$, tai (69) sistema turi sprendinius tada ir tik tada, kai galioja sąlygos:

a) $b \geqslant \dfrac{a^2}{2}$;

b) $|t_1| \leqslant 1$, $|t_2| \leqslant 1$.

Jeigu šios nelygybės teisingos, tai (70) sistemos sprendinį $(t_1; t_2)$ atitinka lygtys $\sin x = t_1$, $\sin y = t_2$, kurias išsprendę, turime

$$\left.\begin{array}{l} x=(-1)^n \arcsin t_1 + \pi n, \\ y=(-1)^k \arcsin t_2 + \pi k; \end{array}\right\} \tag{72}$$

čia t_1 bei t_2 apibrėžiami (71) formulėmis.

Analogiškai (70) sistemos sprendinį $(t_2; t_1)$ atitinka tokia (69) sistemos sprendinių serija:

$$\left.\begin{array}{l} x=(-1)^n \arcsin t_2 + \pi n, \\ y=(-1)^k \arcsin t_1 + \pi k \end{array}\right\} \tag{73}$$

(kai $t_1 = t_2$ ir $|t_1| \leqslant 1$, t.y. $a^2 = 2b$ ir $|a| \leqslant 2$, tai (72) ir (73) sprendinių serijos sutampa).

Sistemą

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = b \end{cases}$$

irgi galima pertvarkyti į (69) išraiškos sistemą.

Iš tiesų, pakeitę antroje lygtyje $\cos^2 x$ ir $\cos^2 y$ atitinkamais reiškiniais $1-\sin^2 x$ ir $1-\sin^2 y$, gauname ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 2 - b. \end{cases}$$

Analogiškai sprendžiamos ir tokios sistemos:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = b, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x + \cos y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = b. \end{cases}$$

Dar papraščiau išspręsti sistemą

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = b \end{cases}$$

ir kitas panašias sistemas. Iš tikrųjų, kai $a \neq 0$, tai ši sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin x - \sin y = \dfrac{b}{a}, \end{cases}$$

iš kurios nesunkiai randame $\sin x$ ir $\sin y$.

3°. Sistema

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = \alpha. \end{cases} \tag{74}$$

Pritaikę sinusų sumos formulę, pirmąją (74) sistemos lygtį pertvarkome taip:

$$2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = a.$$

Kadangi $x+y=\alpha$, tai duotoji sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{x-y}{2}=a, \\ x+y=\alpha. \end{cases} \tag{75}$$

Išnagrinėsime du galimus atvejus.

a) $\sin\frac{\alpha}{2}=0$ (t. y. $\alpha=2\pi m$).

Tuomet $y=2\pi m-x$ (m – sveikasis skaičius), ir iš (74) sistemos pirmosios lygties gauname

$$\sin x-\sin x=a, \text{ t.y. } a=0.$$

Taigi, jeigu $\sin\frac{\alpha}{2}=0$, tai sistemą galima išspręsti tik tada, kai $a=0$. Be to, tuomet vietoj sistemos turime vieną lygtį $x+y=\alpha$.

b) $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$.

Tada (75) sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} \cos\frac{x-y}{2}=\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \\ x+y=\alpha. \end{cases} \tag{76}$$

Pažymėsime $\dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=b$. Kai

$$|b|\leqslant 1, \tag{77}$$

tai iš (76) sistemos gauname

$$\begin{cases} x-y=\pm 2\arccos b+4\pi n, \\ x+y=\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{\alpha}{2}\pm\arccos b+2\pi n, \\ y=\frac{\alpha}{2}\mp\arccos b-2\pi n. \end{cases}$$

Jeigu (77) nelygybė neteisinga, t.y. $|b|>1$, tai (74) sistema neturi sprendinių.

Analogiškai sprendžiame ir šias sistemas:

$$\begin{cases} \sin x-\sin y=a, \\ x\pm y=\alpha, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos x\pm\cos y=a, \\ x\pm y=\alpha. \end{cases}$$

48 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Sprendimas. Sistema ekvivalenti kiekvienai šių sistemų:

$$\begin{cases} \frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1+\cos 2y}{2} = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos 2y - \cos 2x = -1, \\ x + y = \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin(x+y)\sin(x-y) = -1, \\ x + y = \frac{\pi}{4}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin(x-y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Iš čia randame

$$\begin{cases} x - y = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \pi n, \\ x + y = \frac{\pi}{4}, \end{cases}$$

ir todėl

$$x = \frac{\pi}{8} [1 + (-1)^{n+1}] + \frac{\pi n}{2}, \quad y = \frac{\pi}{8} [1 + (-1)^n] - \frac{\pi n}{2}.$$

4°. Sistema

$$\begin{cases} a_1 \sin x + b_1 \sin y = c_1, \\ a_2 \cos x + b_2 \cos y = c_2. \end{cases} \tag{78}$$

Šią sistemą lengva išspręsti, kai vienas skaičių a_1, b_1, a_2, b_2 lygus nuliui. Tarkime, pavyzdžiui, kad $a_1 = 0$. Tuomet iš pirmosios lygties turime

$$\sin y = \frac{c_1}{b_1},$$

o paskui iš antrosios randame $\cos x$.

Dabar sakykime, kad $a_1 b_1 a_2 b_2 \neq 0$. (78) sistemą natūralu spręsti nežinomojo eliminavimo metodu. Eliminuosime, pavyzdžiui, nežinomąjį x. Dėl to (78) sistemą pakeisime ekvivalenčia sistema:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} \sin y, \\ \cos x = \frac{c_2}{a_2} - \frac{b_2}{a_2} \cos y. \end{cases} \tag{79}$$

Pakėlę (79) sistemos lygtis kvadratu ir sudėję, gauname tokios išraiškos lygtį

$$a \cos y + b \sin y + c \sin^2 y = d. \tag{80}$$

Pažymėję tg $\frac{y}{2}=t$, (80) lygtį pakeičiame lygtimi

$$\alpha_0 t^4+\alpha_1 t^3+\alpha_2 t^2+\alpha_3 t+\alpha_4=0.$$

Taigi (78) sistemos sprendimas bendru atveju, nors pati sistema atrodo nesudėtinga, yra gana sunkus uždavinys.

Jeigu vienas skaičių c_1, c_2 lygus nuliui, tai (80) lygtyje arba $a=0$, arba $b=0$. Todėl (80) lygtis tampa lygtimi, kvadratine nežinomųjų $\sin y$ arba $\cos y$ atžvilgiu.

Suradę $\sin y$ (arba $\cos y$) ir įrašę gautąją reikšmę į (79) sistemą, galėtume iš šios sistemos rasti $\sin x$ arba $\cos x$.

Įsidėmėtina, kad (80) lygtis kartu su kuria nors viena (79) sistemos lygtimi sudaro sistemą, kuri yra duotosios sistemos išvada. Todėl gali atsirasti pašalinių šaknų, kurias nustatysime tikrindami (įrašę į (78) sistemą).

49 pavyzdys. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \sin y=5\sin x, & (81) \\ 3\cos x+\cos y=2. & (82) \end{cases}$$

Sprendimas. Eliminuojame y. Dėl to antrąją lygtį parašome taip:

$$\cos y=2-3\cos x, \qquad (83)$$

o paskui, pakėlę (81) ir (83) lygtį kvadratu bei sudėję, gauname

$$1=25\sin^2 x+4-12\cos x+9\cos^2 x,$$

$$16\cos^2 x+12\cos x-28=0; \qquad (84)$$

iš čia $\cos x=1$, $x=2\pi n$; $\cos x=-\frac{7}{4}$ (ši lygtis neturi šaknų). Iš (82) lygties randame $\cos y=-1$, $y=(2k+1)\pi$. Taigi sistema, sudaryta iš (82) bei (84) lygčių, kuri yra duotosios sistemos išvada, turi tokius sprendinius:

$$x=2\pi n, \quad y=\pi(2k+1).$$

Šie sprendiniai taip pat tinka pradinei sistemai, sudarytai iš (81) ir (82) lygčių.

Ats. $x=2\pi n$, $y=\pi(2k+1)$.

XI skyriaus uždaviniai

Išspręskite lygtis (**11.1–11.30**):

11.1. $2\sin x+3\cos x=0$. **11.2.** $\sin^2 2x=\frac{1}{4}$.

11.3. $\sin^2 3x=\cos^2 3x$. **11.4.** $\sin\frac{x}{2}+\cos x=1$.

11.5. $2\cos\frac{x}{2}=1+\cos x$. **11.6.** $2\sin^2 2x=3\cos 2x$.

11.7. $\frac{\sin 3x}{\sin x}=0.$ **11.8.** $\frac{\cos x}{\cos 3x}=0.$

11.9. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=3\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right).$

11.10. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos x=1.$

11.11. $\sin 2x+\cos 5x=0.$ **11.12.** $\cos^2 x-\sin x+2=0.$

11.13. $3\sin^5 x+4\cos^9 x=7.$

11.14. $8\cos^6 5x-3\sin x+4=0.$

11.15. $2\sin x-\sin^5 x=0.$ **11.16.** $\sin 2x\sin 3x+\cos 5x=0.$

11.17. $\cos x=\cos 3x\cos 2x.$

11.18. $\sin^2 x+2\sin^2 2x\cos^2 x=1.$

11.19. $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=0.$

11.20. $3\sin x-4\cos x=5.$

11.21. $2\sin 7x+\sqrt{3}\cos 3x+\sin 3x=0.$

11.22. $3\sin x+4\cos x+5\sin 3x=0.$

11.23. $\cos^5 2x+2\sin^2 x=1.$

11.24. $2\sin^2 x+\frac{1}{4}\cos^3 2x=1.$

11.25. $1-\sin 10x=2\sin^2 18x.$

11.26. $2\cos^2 3x+\sin 5x=1.$

11.27. $(\sin 7x+\cos 7x)^2=2\sin^2 11x.$

11.28. $\operatorname{tg} x=9\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}.$

11.29. $\sin 2x-5\sin x+5\cos x+5=0.$

11.30. $\sin x\cos x=6(\sin x-\cos x-1).$

11.31. Raskite mažiausią teigiamą lygties $\sec x=10\sin x-8\cos x$ šaknį.

Išspręskite lygtis (**11.32–11.52**):

11.32. $\cos^2 4x-4\cos^2 2x+2=0.$

11.33. $\frac{3\sqrt{3}\cos 2x+3\sin 2x}{\sqrt{3}\cos x+\sin x}=4\cos x-\frac{1}{\cos x}.$

11.34. $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin 7x.$

11.35. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0.$

11.36. $\sin x-\sin 3x=\sin 4x-\sin 2x.$

11.37. $\sin^6 x\cos x+\cos^6 x\sin x=\sin 2x.$

11.38. $\sin^7 x\cos^3 x-\cos^7 x\sin^3 x=\cos 2x.$

11.39. $\sin^8 x-\cos^8 x-\cos 2x=0.$

11.40. $\sin 4x=6\cos^2 2x-4.$

11.41. $(\sin 3x+\sin 5x)^2=(\cos 3x+\cos 5x)^2.$

11.42. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\frac{3}{2}$.

11.43. $\cos 7x+\sin^2 2x=\cos^2 2x-\cos x$.

11.44. $\cos^2 x+\cos^2 2x=\cos^2 3x+\cos^2 4x$.

11.45. $\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x+\cos^2 5x=2$.

11.46. $\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x$.

11.47. $2\sin^2 2x-4\cos 4x=\sin 4x$.

11.48. $\sin 2x\cos 4x=\sin 6x\cos 8x$.

11.49. $\cos 7x\cos 13x=\cos x\cos 19x$.

11.50. $\sin x\sin 5x=\sin 2x\sin 4x$.

11.51. $\cos x\cos 3x=\frac{1}{2}$.

11.52. $\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$.

11.53. Įrodykite, kad lygtis $\sin 5x\sin 7x=1$ neturi sprendinių.

11.54. Įrodykite, kad lygtis $\sin\alpha x\sin\beta x=1$ neturi sprendinių, kai $\frac{\alpha}{\beta}$ – iracionalusis skaičius.

Išspręskite lygtis (**11.55–11.112**):

11.55. $2(\sin 2x+\cos 2x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

11.56. $(1+\operatorname{ctg} x)\sin^2 x=\sin x+\cos x$.

11.57. $(1-\operatorname{ctg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{ctg} x$.

11.58. $\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x$.

11.59. $3\cdot\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=2\cos^2 x-1$.

11.60. $\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\sin 2x$.

11.61. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sin x\cos x)$.

11.62. $\sin x+\cos x=\frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$.

11.63. $\operatorname{tg}^2 x+\cos 4x=0$.

11.64. $\operatorname{tg}^2 x+8\cos 2x\operatorname{ctg} 2x=\operatorname{ctg}^2 x$.

11.65. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

11.66. $\operatorname{ctg} x-2\cos 2x=1$.

11.67. $\sin^3 x+\cos^3 x+\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

11.68. $\cos 2x=\cos^3 x-\sin^3 x$.

11.69. $(\operatorname{tg} x)^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}}=1$.

11.70. $\cos x(\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 3x)=4\sin 3x\sin 4x$.

11.71. $\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x=0$.

11.72. $2+\operatorname{ctg} 4x=\operatorname{ctg} 2x$.

11.73. $3 \operatorname{tg} 3x-\operatorname{ctg} 2x=4 \operatorname{tg} x$.

11.74. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x$.

11.75. $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} 3x+\operatorname{ctg} 4x=0$.

11.76. $\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1-\cos^3 x}{1-\sin^3 x}$.

11.77. $\sin 2x-\cos 2x=2\sqrt{2} \cos^2\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

11.78. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x=0$.

11.79. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$.

11.80. $\sin 3x+1=\cos 2x+\sin x$.

11.81. $2 \sin 3x+2 \sin 2x+\sin x=0$.

11.82. $\sin 3x+\sin^3 x=\sin 2x$.

11.83. $\sin 4x-\sin 3x-2 \sin 2x+3 \sin x=0$.

11.84. $\sin^3 x+\sin^4 x=\cos^3 x+\cos^4 x$.

11.85. $\frac{1}{2}\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)=\sin^2 x \cos^2 x+\sin x \cos x$.

11.86. $4 \cos x-2 \cos 2x-\cos 4x=1$.

11.87. $2+4 \cos 4x=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

11.88. $2+\cos 4x=5 \cos 2x+8 \sin^6 x$.

11.89. $4+\cos 2x+3 \cos 4x=8 \cos^6 x$.

11.90. $35+3 \cos 4x-12 \sin^2 2x-32 \cos^2 x=32 \sin^6 x$.

11.91. $\sin^6 x+\cos^6 x=\sin 2x$.

11.92. $\sin^9 x \cos x-\cos^9 x \sin x=\sin 4x$.

11.93. $\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$.

11.94. $\dfrac{1+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}{\sec^2 x+\operatorname{tg} x}-\dfrac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{cosec}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x}=1$.

11.95. $\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 3x+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x=0$.

11.96. $4 \operatorname{tg} 4x-4 \operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x$.

11.97. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2 \operatorname{ctg} x-2 \operatorname{ctg} 2x$.

11.98. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{ctg} x-2 \operatorname{tg} 2x$.

11.99. $\dfrac{\sin^2 5x}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}=8 \cos 2x$.

11.100. $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x$.

11.101. $1+2 \cos x(1+\sin 2x)=\sin 2x-\cos 2x$.

11.102. $4 \sin x \cos^2 x=\operatorname{cosec} x-\sin x-\cos x$.

11.103. $5 \cos 3x+3 \cos x=3 \sin 4x$.

11.104. $\sin^3 x+\cos^3 x+\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin 3x$.

11.105. $\sin 2x+\sin 6x=\sin 4x+\cos 4x+2 \sin^2 x$.

11.106. $2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos 4x+\sin 6x=\cos 2x+\sin 4x$.

11.107. $\sin x+\sin 2x+2\sin x\sin 2x=2\cos x+\cos 2x$.

11.108. $2\sin x+3\cos x+2\cos x\sin 2x=2+\cos 2x+3\sin 2x$.

11.109. $\operatorname{tg} 2x+\frac{1}{\sin x}=\operatorname{ctg} x+\frac{1}{\sin 5x}$.

11.110. $\operatorname{ctg} 2x+3\operatorname{tg} 3x=2\operatorname{tg} x+\frac{2}{\sin 4x}$.

11.111. $1+\sin 2x+2\sqrt{2}\cos 3x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=$

$=2\sin x+2\cos 3x+\cos 2x$.

11.112. $\sin 4x\left(2+\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)=$

$=2\sqrt{2}(1+\sin 2x+\cos 2x)$.

11.113. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis

$$(a^2+2)\sin^2 x+4a\sin x\cos x=a^2+3$$

turi sprendinius? Raskite šiuos sprendinius.

11.114. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis

$$\cos^2 t+6\sin t=4a^2-2$$

turi sprendinius? Raskite šiuos sprendinius.

11.115. Raskite visas B reikšmes, su kuriomis lygtis

$$\sin 2x-2B\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+1-6B^2=0$$

turi sprendinius, taip pat ir šiuos sprendinius.

11.116. Su kuriomis B reikšmėmis lygtis

$$\sin 2x+2B\sqrt{2}(\sin x-\cos x)+1-4B=0$$

turi sprendinius? Raskite šiuos sprendinius.

11.117. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis

$$\sin^4 x+\cos^4 x=a$$

turi sprendinius? Raskite šiuos sprendinius.

11.118. Su kuriomis B reikšmėmis lygtis

$$\cos^2 x\cos 2x+B(\cos^4 x-\sin^4 x)=(2B+1)^2$$

turi sprendinius? Raskite šiuos sprendinius.

11.119. Raskite a reikšmes, su kuriomis lygtis

$$2a(\sin^4 x-\cos^4 x)=1+\cos^2 2x$$

turi sprendinius, ir išspręskite ją.

11.120. Įrodykite, kad bent viena šių lygčių

$$a\sin x+b\cos x+c=0,$$

$$a\operatorname{tg} x+b\operatorname{ctg} x+2c=0,$$

kai a, b, c — realieji skaičiai ir $a^2+b^2\neq 0$, turi sprendinius.

11.121. Išspręskite lygtį

$$\operatorname{tg}(x+\alpha)\operatorname{tg}(x+2\alpha)\operatorname{tg}(x+3\alpha)=1.$$

Kiek ši lygtis turi sprendinių priklausomai nuo α reikšmės?

Išspręskite lygtis (**11.122–11.133**):

11.122. $\sin 2x+\operatorname{ctg} x=2.$

11.123. $\cos^2 2x+\dfrac{1}{\cos^2 2x}=\cos 2x-\dfrac{1}{\cos 2x}+4.$

11.124. $\sin^3\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin x.$

11.125. $\cos x=\cos^2\dfrac{3}{4}x.$

11.126. $\sin\left(\dfrac{3x}{2}+\dfrac{\pi}{10}\right)=3\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\right).$

11.127. $\cos\dfrac{x}{5}\cos\dfrac{2x}{5}\cos\dfrac{4x}{5}=\dfrac{1}{8}.$

11.128. $\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x=\dfrac{1}{8}.$

11.129. $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-3x\right)+$

$$+\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+3x\right)=0.$$

11.130. $2\operatorname{tg} 6x+4\operatorname{tg} 12x+8\operatorname{ctg} 24x+\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} 2x.$

11.131. $\cos^2 3x+\dfrac{1}{4}\cos^2 x=\cos 3x\cos^4 x.$

11.132. $\sin^2 4x+\cos^2 x=2\sin 4x\cos^4 x.$

11.133. $\sin^5 x+\cos^5 x+3\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0.$

11.134. Išspręskite lygtį

$$\sin^{2m} x+\cos^{2n} x=1$$

(m, n – natūriniai skaičiai, kurių bent vienas yra didesnis už vienetą).

11.135. Išspręskite lygtį

$$\sin^{2n+1} x+\frac{1}{\cos^{2m+1} x}=\cos^{2n+1} x+\frac{1}{\sin^{2m+1} x}$$

(m, n – sveikieji teigiami skaičiai).

Išspręskite lygčių sistemas (**11.136–11.143**):

11.136. $\begin{cases}\sin x\cos y=\dfrac{1}{2},\\ \sin y\cos x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$ **11.137.** $\begin{cases}\sin x\sin y=\dfrac{\sqrt{3}}{4},\\ \cos x\cos y=\dfrac{\sqrt{3}}{4}.\end{cases}$

11.138. $\begin{cases}4\sin x\sin y=3,\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=3.\end{cases}$

11.139. $\begin{cases} 4\cos x\cos y = 1+\sqrt{2}, \\ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y = 3+2\sqrt{2}. \end{cases}$

11.140. $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \sin y. \end{cases}$

11.141. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \frac{3}{2}, \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$ **11.142.** $\begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{7}{4}. \end{cases}$

11.143. $\begin{cases} \sin y = 3\sin x, \\ 2\cos x + \cos y = 1. \end{cases}$

11.144. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ \sin x \cos y = a. \end{cases}$$

Su kuriomis α ir a reikšmėmis sistema turi sprendinius?

11.145. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = a, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases}$$

Su kuriomis a reikšmėmis uždavinys turi sprendinius?

11.146. Išspręskite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = a, \\ x+y=\alpha. \end{cases}$$

Raskite sistemos išsprendžiamumo sąlygą.

11.147. Raskite visas a reikšmes, su kuriomis lygčių sistema

$$\begin{cases} \sin 2x \cos y = a^2+1, \\ \cos 2x \sin y = 5a \end{cases}$$

turi sprendinius, ir išspręskite šią sistemą.

Išspręskite lygčių sistemas **(11.148–11.166)**:

11.148. $\begin{cases} \cos^2 y + 3\sin x \sin y = 0, \\ 21\cos 2x - \cos 2y = 10. \end{cases}$

11.149. $\begin{cases} \cos(x-y) = 2\cos(x+y), \\ 4\cos x \cos y = 3. \end{cases}$

11.150. $\begin{cases} \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}, \\ 4\cos x\cos y = 1. \end{cases}$

11.151. $\begin{cases} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1, \\ 2\sin x \cos y + 2\operatorname{ctg} x \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$

11.152. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin^3 x+\sin^3 y, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=\sin^4 x+\sin^4 y. \end{cases}$

11.153. $\begin{cases} \sin^2 x=\sin y, \\ \cos^4 x=\cos y. \end{cases}$ **11.154.** $\begin{cases} \dfrac{\cos x}{\sin(x+y)}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{\cos y}{\sin(x+y)}=\dfrac{3}{4}. \end{cases}$

11.155. $\begin{cases} \cos x+3\sin x=2\cos y, \\ \cos y+3\sin y=2\cos x. \end{cases}$

11.156. $\begin{cases} \operatorname{ctg} x+\sin 2y=\sin 2x, \\ 2\sin y\sin(x+y)=\cos x. \end{cases}$

11.157. $\begin{cases} 4\operatorname{tg} 3x=3\operatorname{tg} 2y, \\ 2\sin x\cos(x-y)=\sin y. \end{cases}$

11.158. $\begin{cases} 4\cos x\operatorname{tg} y-2\cos 2x-\sec^2 y=1, \\ \left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} y\right)(2\sin x+\operatorname{tg} y)=1. \end{cases}$

11.159. $\begin{cases} \cos^2 y+\cos x\sin 2y=1, \\ (\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} y)(2\sin x-\operatorname{tg} y)+\cos 2x=0. \end{cases}$

11.160. $\begin{cases} \sin x+a\cos y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+a), \\ \cos x+a\sin y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+a). \end{cases}$

11.161. $\begin{cases} a\cos(2x+y)=\cos y, \\ a\cos(x+2y)=\cos x; \end{cases}$ čia $a>1$.

11.162. $\begin{cases} 4\sin(3x+2y)+\sin x=0, \\ 4\sin(2x+3y)+\sin y=0. \end{cases}$

11.163. $\begin{cases} 3\cos^2 x+4\sin(x+y)+3\cos^2 y=-1, \\ \sin x+\sin y+2(\cos x+\cos y)=1. \end{cases}$

11.164. $\begin{cases} 4\sin^2 x-3\sin(x+y)+4\sin^2 y=1, \\ 3(\sin x+\sin y)-\cos x-\cos y=2. \end{cases}$

11.165. $\begin{cases} \cos x\cos 2y+\sin y\cos 2x+2\cos x=1, \\ \cos 2x+3\cos 2y+8\sin y=8+4\sin x\cos y. \end{cases}$

11.166. $\begin{cases} \sin x\cos 2y+\sin y\cos 2x+\sin y=1, \\ 2\cos 2x+8\cos x\cos y+7=4\sin y. \end{cases}$

XII SKYRIUS

PLANIMETRIJOS UŽDAVINIAI

§ 1. Statusis trikampis

12.1. Stačiojo trikampio statinių suma lygi l, o aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės, lygi h. Apskaičiuokite šio trikampio plotą.

12.2. Stačiojo trikampio aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės, lygi h, o statinių projekcijų įžambinėje skirtumas irgi lygus h. Raskite šio trikampio įžambinę.

12.3. Stačiojo trikampio aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės, lygi h, o statinių projekcijų įžambinėje skirtumas lygus l. Raskite šio trikampio plotą.

12.4. Iš stačiojo trikampio ABC stačiojo kampo viršūnės C nuleista aukštinė CD. Atkarpos BD projekcija statinyje BC lygi l, o atkarpos AD projekcija statinyje AC lygi m. Raskite įžambinės AB ilgį.

12.5. Stačiojo trikampio statiniai lygūs b ir c. Raskite šio trikampio stačiojo kampo pusiaukampinės ilgį.

12.6. Vienas stačiojo trikampio statinis lygus b, o apibrėžtinio apskritimo spindulys lygus R. Raskite šio trikampio stačiojo kampo pusiaukampinės ilgį.

12.7. Stačiojo trikampio įžambinė lygi c, o vieno smailiojo kampo pusiaukampinė lygi $\frac{c}{\sqrt{3}}$. Raskite šio trikampio statinius.

12.8. Atkarpos, į kurias stačiajame trikampyje įbrėžto apskritimo lietimosi taškas dalija įžambinę, yra lygios a ir b. Raskite šio trikampio plotą.

12.9. Įrodykite, kad stačiojo trikampio statinių suma lygi įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų skersmenų sumai.

12.10. Iš stačiojo trikampio ABC stačiojo kampo C viršūnės nuleista aukštinė CD. Įrodykite, kad $[CD]$ ilgis lygus apskritimų, įbrėžtų į trikampius ABC, ACD ir BCD, spindulių sumai.

12.11. Iš stačiojo trikampio ABC stačiojo kampo C viršūnės nuleista aukštinė CD. Apskritimų, įbrėžtų į trikampius ACD ir BCD, spinduliai lygūs p ir r. Raskite apskritimo, įbrėžto į trikampį ABC, spindulį.

12.12. Apskritimo, įbrėžto į statųjį trikampį, centras nutolęs nuo įžambinės galų atstumais, lygiais $\sqrt{5}$ cm ir $\sqrt{10}$ cm. Raskite šio trikampio statinius.

12.13. Apskaičiuokite stačiojo trikampio smailiuosius kampus, kai apibrėžto apie jį ir įbrėžto į jį apskritimų spindulių santykis lygus $1+\sqrt{3}$.

12.14. Raskite stačiojo trikampio statinius, kai apibrėžto apie jį apskritimo spindulys lygus R, o įbrėžto į jį apskritimo spindulys lygus r.

12.15. Vienas smailusis stačiojo trikampio kampas lygus α, o įžambinė lygi c. Apskaičiuokite atstumą tarp apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimo centrų.

12.16. Stačiojo trikampio aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės, lygi h, o vieno statinio projekcija įžambinėje lygi l. Raskite apskritimo, liečiančio statinius, spindulį, kai jo centras yra įžambinėje.

12.17. Stačiojo trikampio ABC įžambinė $AB=c$, $\hat{A}=\alpha$. Raskite spindulį to apskritimo, kuris liečia statinį AC, įžambinę AB ir apskritimą, apibrėžtą apie trikampį ABC.

12.18. Stačiojo trikampio smailusis kampas lygus α. Šis trikampis yra apskritimo, kurio spindulys lygus R, viduje. Trikampio įžambinė – apskritimo styga, o jo stačiojo kampo viršūnė yra skersmenyje, lygiagrečiame įžambinei. Apskaičiuokite šio trikampio plotą.

12.19. Stačiojo trikampio smailusis kampas lygus α, o apskritimo, liečiančio įžambinę bei statinių tęsinius, spindulys lygus R. Raskite šio trikampio įžambinę.

12.20. Stačiojo trikampio plotas lygus $\frac{2}{3}r^2$; čia r – apskritimo, liečiančio vieną statinį bei kito statinio ir įžambinės tęsinius, spindulys. Raskite šio trikampio kraštines.

12.21. Į smailiuosius stačiojo trikampio kampus įbrėžti du vienodi vienas kitą liečiantys skrituliai. Šių skritulių plotų suma lygi skritulio, įbrėžto į trikampį, plotui. Raskite smailiuosius šio trikampio kampus.

12.22. Stačiojo trikampio statiniai lygūs a ir b. Ant šio trikampio kraštinių jo išorėje nubraižyti kvadratai. Apskaičiuokite trikampio, kurio viršūnės yra kvadratų centruose, plotą.

12.23. Stačiojo trikampio statiniai yra 6 cm ir 8 cm. Laikant trikampio kraštines skersmenimis, jo išorėje nubraižyti trys pusapskritimiai. Raskite apskritimo, liečiančio nubraižytuosius pusapskritimius, spindulį.

12.24. Stačiojo trikampio ABC statinis $|AB|=3$ cm, statinis $|AC|=$ $=6$ cm. Apskritimų, kurių spinduliai lygūs 1 cm, 2 cm, 3 cm, centrai yra atitinkamai taškuose A, B ir C. Raskite apskritimo, kuris iš išorės liečia kiekvieną šių trijų apskritimų, spindulį.

§ 2. Taisyklingasis trikampis

12.25. Taisyklingojo trikampio ABC kraštinėje BC pažymėtas taškas D; kampas CAD lygus α. Koks trikampių ACD ir ABC plotų santykis?

12.26. Taisyklingajame trikampyje ABC, kurio kraštinė lygi a, lygiagrečiai $[AC]$ nubrėžta vidurinė linija MN. Per tašką A ir $[MN]$ vidurį nubrėžta tiesė, kertanti $[BC]$ taške D. Apskaičiuokite $[AD]$ ilgį.

12.27. Taisyklingojo trikampio ABC kraštinė lygi a. Kraštinėje BC pažymėtas taškas D, o kraštinėje AB – taškas E taip, kad $3\,|BD|=a$, $|AE|=|DE|$. Apskaičiuokite $[CE]$ ilgį.

12.28. Visos taisyklingojo trikampio viršūnės yra stačiojo trikampio kraštinėse. Viena taisyklingojo trikampio kraštinė lygiagreti įžambinei ir tris kartus trumpesnė už įžambinę. Raskite stačiojo trikampio kampus.

12.29. Apskritimo, kurio spindulys lygus r, skersmuo yra taisyklingojo trikampio pagrindas. Apskaičiuokite plotą tos trikampio dalies, kuri yra skritulio išorėje.

12.30. Taisyklingojo trikampio kraštinės ilgis lygus b. Ant šio trikampio aukštinės kaip ant skersmens nubrėžtas apskritimas. Apskaičiuokite plotą tos trikampio dalies, kuri yra apskritimo viduje.

12.31. Taisyklingojo trikampio viršūnės yra trijose lygiagrečiose tiesėse. Atstumai nuo vidurinės tiesės iki kitų dviejų lygūs a ir b. Raskite trikampio kraštinę.

12.32. Nubraižyti du koncentriniai apskritimai, kurių spinduliai lygūs r ir R, be to, $r<R$, ir taisyklingasis trikampis, kurio viena viršūnė yra r spindulio apskritime, o kitos dvi – R spindulio apskritime. Raskite šio trikampio kraštinę.

12.33. Apskritimai, kurių spinduliai lygūs r ir R, iš išorės liečia vienas kitą. Taisyklingojo trikampio viena viršūnė sutampa su apskritimų lietimosi tašku, o kitos dvi yra atskiruose apskritimuose. Raskite šio trikampio kraštinę.

§ 3. Lygiašonis trikampis

12.34. Lygiašonio trikampio ABC šoninė kraštinė lygi b, o kampas tarp šoninių kraštinių AB ir AC lygus α. Per viršūnę B ir apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABC, centrą nubrėžta tiesė, kuri kraštinę AC kerta taške D. Apskaičiuokite BD ilgį.

12.35. Lygiašonio trikampio pagrindo ilgis lygus b, o aukštinė, nuleista į šoninę kraštinę, lygi h. Raskite šio trikampio plotą.

12.36. Lygiašonio trikampio šoninė kraštinė lygi 20 cm, o pagrindas – 24 cm. Apskaičiuokite atstumą tarp šio trikampio pusiaukraštinių susikirtimo taško ir pusiaukampinių susikirtimo taško.

12.37. Lygiašonio trikampio aukštinė, nuleista į jo pagrindą, lygi h, o įbrėžtinio apskritimo spindulys lygus r. Raskite apie šį trikampį apibrėžto apskritimo spindulį.

12.38. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus α, o apibrėžtinio ir įbrėžtinio apskritimų spindulių skirtumas lygus b. Apskaičiuokite šio trikampio pagrindo ilgį.

12.39. Kampas, kurį sudaro lygiašonio trikampio ABC šoninės kraštinės AB ir BC, lygus α; čia $\alpha<\frac{\pi}{2}$. Aukštinės BD tęsinyje pažymėtas taškas M taip, kad tiesė MC liečia apskritimą, apibrėžtą apie trikampį ABC. Koks trikampių CDM ir ABC plotų santykis?

12.40. Lygiašonis trikampis pusiaukampine, nubrėžta iš viršūnės prie pagrindo, suskaidytas į du trikampius: pirmojo trikampio (kuris yra prie pagrindo) plotas lygus $\frac{72}{11}$ cm², o antrojo – $\frac{60}{11}$ cm². Raskite lygiašonio trikampio kraštines.

12.41. Lygiašonio trikampio šoninės kraštinės ilgis lygus a, pagrindo ilgis lygus b. Apskritimas, įbrėžtas į šį trikampį, liečia jo kraštines taškuose M, N ir K. Apskaičiuokite trikampio MNK plotą.

12.42. Lygiašonio trikampio ABC kampas prie pagrindo AC lygus α. Apskritimas, įbrėžtas į šį trikampį, liečia jo kraštines taškuose M, N ir K. Koks trikampių MNK ir ABC plotų santykis?

12.43. Lygiašoniame trikampyje ABC, kurio $|AB|=|BC|$ ir kampas B lygus $\frac{\pi}{4}$, į kraštinę BC nuleistas statmuo AD. Į trikampius ABD ir ACD įbrėžti pusskrituliai taip, kad jų skersmenys yra atkarpose BD ir AD. Raskite įbrėžtųjų pusskritulių plotų santykį.

12.44. Lygiašonio trikampio ABC pagrinde AC pažymėtas taškas D taip, kad $|AD|=a$, $|CD|=b$. Apskritimai, įbrėžti į trikampius ABD ir BCD, liečia tiesę BD atitinkamai taškuose M ir N. Apskaičiuokite MN ilgį.

12.45. Lygiašoniame trikampyje ABC lygiagrečiai pagrindui AC nubrėžta vidurinė linija MN. Apskritimo, apibrėžto apie trapeciją $ACMN$, spindulys $\frac{\sqrt{5}}{2}$ kartų didesnis už apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABC, spindulį. Raskite trikampio ABC kampus.

12.46. Lygiašonio trikampio kampas prie pagrindo lygus 2arcctg2. Trikampio viduje nubrėžti trys apskritimai taip, kad kiekvienas jų liečia kitus du apskritimus ir kitas dvi trikampio kraštines. Raskite šių apskritimų spindulių santykį.

12.47. Į lygiašonį trikampį, kurio vienas kampas lygus 120°, R spinduliu įbrėžtas apskritimas. Trikampio viduje yra du vienodi vienas kitą liečiantys skrituliai, kurių kiekvienas liečia vieną šoninę trikampio kraštinę ir įbrėžtąjį į trikampį apskritimą. Raskite šių skritulių spindulius.

12.48. Raskite lygiašonio trikampio kampus, kai jo aukštinių susikirtimo taškas yra įbrėžtiniame apskritime.

12.49. Šoninėse lygiašonio trikampio ABC kraštinėse AB ir BC pažymėti atitinkamai taškai M ir N taip, kad $\frac{|AM|}{|BM|}=m$, $\frac{|CN|}{|BN|}=n$. Tiesė MN kerta aukštinę BD taške O. Raskite santykį $\frac{|DO|}{|BO|}$.

§ 4. Bet koks trikampis

12.50. Trikampio ABC kampas prie viršūnės A yra du kartus didesnis už kampą prie viršūnės B, $|AB|=c$, $|AC|=b$. Raskite $|BC|$.

12.51. Duotas trikampis ABC, kurio $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$. Kraštinėje BC pažymėtas taškas D taip, kad apskritimai, įbrėžti į trikampius ABD bei ACD, liečia vienas kitą. Raskite $|BD|$.

12.52. Trikampio ABC kampas A lygus 2α, kraštinė $|AB|=c$, kraštinė $|AC|=b$. Apskaičiuokite kampo A pusiaukampinės ilgį.

12.53. Dvi trikampio kraštinės lygios atitinkamai 6 cm ir 8 cm. Pusiaukraštinės, nubrėžtos per šių kraštinių vidurius, susikirsdamos sudaro statųjį kampą. Raskite trečiąją šio trikampio kraštinę.

12.54. Trikampio ABC kampas A lygus 60°, $|AB|:|AC|=3:2$. Kraštinėse AB ir AC atitinkamai pažymėti taškai M ir N taip, kad $|BM|=|MN|=|NC|$. Koks trikampių AMN ir ABC plotų santykis?

12.55. Trikampio pagrindas lygus b, o aukštinė, nuleista į šį pagrindą, lygi h. Į trikampį įbrėžtas kvadratas, kurio viena kraštinė yra trikampio pagrinde, o dvi viršūnės – šoninėse kraštinėse. Raskite kvadrato ir trikampio plotų santykį.

12.56. Įbrėžtinio apskritimo lietimosi taškas dalija vieną trikampio kraštinę į atkarpas m ir n. Kampas, kuris yra prieš šią kraštinę, lygus 60°. Apskaičiuokite trikampio plotą.

12.57. Trikampio ABC kraštinė $|AC|=b$, $|AB|=c$, o kampo A pusiaukampinė lygi l. Raskite $|BC|$.

12.58. Trikampio ABC kraštinė $|AB|=2$ cm, $|AC|=5$ cm, $|BC|=6$ cm. Apskaičiuokite atstumą, kuriuo viršūnė B nutolusi nuo trikampio ABC aukštinių susikirtimo taško.

12.59. Trikampyje ABC nubrėžtos pusiaukampinės AM ir CN. Raskite MN ilgį, kai $|AC|=6$ cm, $|AN|=2$ cm, $|CM|=3$ cm.

12.60. Trikampio ABC pusiaukampinė AD dalija kraštinę BC santykiu $|BD|:|CD|=2:1$. Kokiu santykiu pusiaukraštinė CE dalija šią pusiaukampinę?

12.61. Trikampio ABC kraštinėse AC ir BC atitinkamai pažymėti taškai N ir M taip, kad $\frac{|AN|}{|CN|}=n$, $\frac{|BM|}{|CM|}=m$. Tiesės AM ir BN susikerta taške O. Raskite $\frac{|AO|}{|OM|}$ ir $\frac{|BO|}{|ON|}$.

12.62. Trikampio ABC pusiaukampinės AM ir BN susikerta taške O. Raskite trikampio ABC kampus, kai $|AO|=\sqrt{3}\cdot|MO|$, $|NO|=(\sqrt{3}-1)\,|BO|$.

12.63. Raskite trikampio plotą, kai jo pusiaukraštinės lygios 12, 15 ir 21 cm.

12.64. Į trikampio ABC kampus B ir C įbrėžti 2 cm ir 3 cm spindulio apskritimai, liečiantys kampo A pusiaukampinę. Apskaičiuokite šios pusiaukampinės ilgį, kai atstumas tarp taškų, kuriuose apskritimai liečia $[BC]$, lygus 7 cm.

12.65. Dvi smailiojo trikampio aukštinės atitinkamai lygios 3 cm ir $2\sqrt{2}$ cm, o jų susikirtimo taškas dalija trečiąją aukštinę nuo trikampio viršūnės santykiu 5 : 1. Apskaičiuokite trikampio plotą.

12.66. Apie apskritimą apibrėžtas trikampis ABC, ir į tą patį apskritimą įbrėžtas trikampis $A_1B_1C_1$, panašus į trikampį ABC, Trikampių plotų santykis lygus $4(1+\sqrt{2})^2$. Raskite šių trikampių kampus, kai kampas BAC lygus 60°.

12.67. Trikampyje ABC nubrėžtos pusiaukraštinė AD, pusiaukampinė AE ir aukštinė AF. Trikampio AED plotas lygus $\frac{1}{14}$ trikampio ABC ploto, o trikampio AFD plotas lygus $\frac{7}{50}$ trikampio ABC ploto. Raskite trikampio ABC kampus.

12.68. Į apskritimą įbrėžtas trikampis ABC. Atstumai nuo taškų A ir C iki tiesės, liečiančios apskritimą taške B, atitinkamai lygūs a ir c. Raskite trikampio ABC aukštinę, nuleistą iš viršūnės B.

§ 5. Lygiagretainis

12.69. Apskritimas, kurio spindulys lygus R, liečia kvadrato $ABCD$ kraštines AB ir AD, kraštinę BC kerta taške M ir eina per tašką C. Apskaičiuokite atkarpos BM ilgį.

12.70. Apskritimo centras yra taške O ir spindulys lygus R. Šio apskritimo viduje nubraižytas kvadratas $ABCD$ taip, kad viršūnės B ir C yra apskritime, o kraštinė AD eina per tašką O. Raskite į trikampį BOC įbrėžto apskritimo spindulį.

12.71. Viena lygiagretainio $ABCD$ įstrižainė yra $\sqrt{3}$ kartų didesnė už kitą, o perimetras lygus 4 cm. Taškas A_1, kuris simetriškas taškui A taško C atžvilgiu, kartu yra simetriškas ir taškui B tiesės CD atžvilgiu. Apskaičiuokite lygiagretainio $ABCD$ plotą.

12.72. Viena lygiagretainio įstrižainė lygi b, o kita su gretimomis lygiagretainio kraštinėmis sudaro kampus, lygius α ir β. Raskite lygiagretainio kraštines.

12.73. Apskaičiuokite lygiagretainio plotą, kai jo didesnioji įstrižainė lygi 5 cm, o aukštinės – 2 cm ir 3 cm.

12.74. Lygiagretainio kraštinės lygios a ir b, o smailusis kampas tarp įstrižainių lygus α. Raskite lygiagretainio plotą.

12.75. Lygiagretainio kraštinės lygios 3 cm ir 2 cm, o kampas tarp jų lygus $\arccos\frac{5}{16}$. Dvi statmenos tiesės dalija lygiagretainį į keturias lygiaplotes dalis. Apskaičiuokite atkarpų, į kurias šios tiesės dalija lygiagretainio kraštines, ilgius.

12.76. Lygiagretainio kraštinių santykis bei jo įstrižainių santykis yra vienodas ir lygus 2. Iš bukojo kampo A viršūnės į didesniąją kraštinę CD nuleista aukštinė AE. Koks atkarpų DE ir CE ilgių santykis?

12.77. Apskritimo, įbrėžto į rombą $ABCD$, spindulys lygus r, kampas ABC lygus β. Kraštinėse AB ir BC atitinkamai pažymėti taškai E ir F taip, kad tiesė EF liečia į rombą įbrėžtąjį apskritimą. Raskite $|AE| \cdot |CF|$.

§ 6. Trapecija

12.78. Trapecijos pagrindai lygūs 10 cm ir 24 cm, o šoninės kraštinės – 13 cm ir 15 cm. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

12.79. Trapecijos pagrindai lygūs 84 cm ir 42 cm, o šoninės kraštinės – 39 cm ir 45 cm. Per įstrižainių susikirtimo tašką lygiagrečiai pagrindams nubrėžta tiesė. Apskaičiuokite gautųjų trapecijų plotus.

12.80. Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs a ir b, šoninė kraštinė lygi l. Raskite apskritimo, apibrėžto apie šią trapeciją, spindulį.

12.81. Apie apskritimą apibrėžta trapecija, kurios šoninės kraštinės lygios a ir b. Raskite atstumų nuo apskritimo centro iki trapecijos viršūnių kvadratų sumą.

12.82. Apie apskritimą, kurio spindulys lygus R, apibrėžta lygiašonė trapecija. Jos plotas lygus S. Raskite šios trapecijos pagrindus.

12.83. Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios vienas pagrindas tris kartus didesnis už kitą. Raskite apibrėžto apie trapeciją ir įbrėžto į trapeciją apskritimų spindulių santykį.

12.84. Lygiašonės trapecijos aukštinės ir vidurinės linijos ilgių suma lygi c, o trapecijos plotas lygus S. Raskite kampą tarp trapecijos įstrižainių.

12.85. Lygiašonės trapecijos pagrindai lygūs a ir b, be to, $a>b$. Tiesės, jungiančios didesniojo pagrindo vidurį su mažesniojo pagrindo galais, kerta trapecijos įstrižaines taškuose M ir N. Raskite atkarpos MN ilgį.

12.86. Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija, kurios kampas prie pagrindo lygus $\frac{\pi}{3}$. Kokiu santykiu trapecijos plotą dalija tiesė, jungianti taškus, kuriuose apskritimas liečia šonines kraštines?

12.87. Trapecijos vidurinė linija lygi 7 cm, aukštinė — $\frac{15\sqrt{3}}{7}$ cm, o kampas tarp įstrižainių, kuris yra prieš pagrindą, lygus 120°. Raskite šios trapecijos įstrižaines.

12.88. Trapecijos pagrindų ilgiai lygūs a ir b. Šoninėse kraštinėse pažymėti taškai M ir N taip, kad tiesė MN lygiagreti pagrindams ir dalija trapeciją į dvi lygiaplotes dalis. Raskite atkarpos MN ilgį.

12.89. Trapecijos pagrindai lygūs a ir b, įstrižainės yra statmenos, o kampas tarp šoninių kraštinių lygus α. Apskaičiuokite trapecijos plotą.

12.90. Lygiašonės trapecijos $ABCD$ pagrindai AD ir BC tenkina sąlygą $|AD|=(1+\sqrt{15})\,|BC|$. Apskritimas, kurio centras yra taške C ir spindulys lygus $\frac{2}{3}BC$, iškerta iš pagrindo $|AD|$ stygą EF, lygią $\frac{\sqrt{7}}{3}|BC|$. Kokiu santykiu šis apskritimas dalija kraštinę CD?

12.91. Lygiašonės trapecijos pagrindų santykis lygus 3 : 2. Apskritimas nubrėžtas taip, kad didesnysis jos pagrindas yra jo skersmuo, o iš viršutinio pagrindo iškerta atkarpą, lygią šio pagrindo pusei. Kokiu santykiu apskritimas dalija trapecijos šonines kraštines?

12.92. Apie apskritimą apibrėžta lygiašonė trapecija. Keturkampio, kurio viršūnės yra lietimosi taškuose, plotas sudaro $\frac{3}{8}$ trapecijos ploto. Koks trapecijos pagrindų santykis?

12.93. Apskritimo, įbrėžto į lygiašonę trapeciją, spindulys $\sqrt{6}$ kartų mažesnis už apskritimo, apibrėžto apie šią trapeciją, spindulį. Raskite kampą, esantį prie didesniojo trapecijos pagrindo.

§ 7. Bet koks keturkampis ir daugiakampis

12.94. Į apskritimą įbrėžtas keturkampis, kurio trys viena po kitos einančios kraštinės atitinkamai lygios $2\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm, 6 cm, o ketvirtoji kraštinė sutampa su apskritimo skersmeniu. Raskite apskritimo spindulį.

12.95. Duotas keturkampis $ABCD$. Žinoma, kad $|AB|^2+|CD|^2=|AC|^2+|BD|^2$. Raskite kampą, kurį sudaro kraštinės AD ir BC.

12.96. Iškiliojo keturkampio, apibrėžto apie apskritimą, įstrižainės yra viena kitai statmenos, o vienas keturkampio kampas lygus $\frac{\pi}{3}$. Raskite šio keturkampio kraštinių santykius.

12.97. Į apskritimą įbrėžti trys taisyklingieji daugiakampiai. Kiekvieno sekančio daugiakampio kraštinių skaičius dvigubai didesnis už pirmesniojo daugiakampio kraštinių skaičių. Pirmųjų dviejų daugiakampių plotai atitinkamai lygūs S_1 ir S_2. Apskaičiuokite trečiojo daugiakampio plotą.

12.98. Du taisyklingieji daugiakampiai, kurių perimetrai lygūs a ir b, apibrėžti apie apskritimą, o trečias taisyklingasis daugiakampis įbrėžtas į šį apskritimą. Antrasis ir trečiasis daugiakampis turi dvigubai daugiau kraštinių negu pirmasis. Raskite trečiojo daugiakampio perimetrą.

§ 8. Apskritimas

12.99. Skritulys įbrėžtas į skritulinę išpjovą, kurios kampas lygus 2α. Koks išpjovos ir skritulio plotų santykis?

12.100. Apskritimai, kurių spinduliai lygūs r ir R $\left(r<\frac{1}{2}R\right)$ liečiasi iš vidaus taške A. Per didesniojo apskritimo centrą nubrėžtas skersmuo BC, kuris liečia mažesnįjį apskritimą. Apskaičiuokite trikampio ABC plotą.

12.101. Du vienodi R spindulio apskritimai liečia vienas kitą iš išorės. Raskite spindulį apskritimo, kuris liečia du duotuosius apskritimus ir jų bendrą išorinę liestinę.

12.102. Du apskritimai, kurių spinduliai r ir $3r$, liečiasi iš išorės. Apskaičiuokite plotą figūros, kuri yra tarp apskritimų ir jų bendros išorinės liestinės.

12.103. Apskritime, kurio spindulys R, nubrėžta styga. Jos ilgio ir atstumo nuo apskritimo centro iki stygos suma lygi a. Apskaičiuokite stygos ilgį. Kokiomis sąlygomis uždavinys turi sprendinį?

12.104. Dviejų apskritimų, kurių spinduliai r ir R, išorinės liestinės ilgis du kartus didesnis už vidinės liestinės ilgį. Raskite atstumą tarp šių apskritimų centrų.

12.105. Du apskritimai, kurių spinduliai lygūs r_1 ir r_2, liečia iš išorės R spindulio apskritimą taškuose, tarp kurių atstumas lygus a. Apskaičiuokite pirmųjų dviejų apskritimų bendros išorinės liestinės ilgį.

12.106. Dviejų nesusikertančių apskritimų išorinės liestinės sudaro kampą, lygų α, o jų vidinės liestinės – kampą, lygų β (abu kartus turime galvoje tuos kampus, kurių pusiaukampinė yra tiesėje, jungiančioje centrus). Raskite smailųjį kampą, kurį sudaro liestinės, nubrėžtos iš didesniojo apskritimo centro antrajam apskritimui.

12.107. Ant atkarpos, kurios ilgis $2R$, nubrėžtas pusapskritimis taip, kad ji yra jo skersmuo. Į gautąją figūrą įbrėžtas apskritimas, ku-

rio spindulys lygus $\frac{R}{2}$. Raskite spindulį apskritimo, kuris liečia įbrėžtąjį apskritimą, pusapskritimį ir duotąją atkarpą.

12.108. Ant atkarpos, kurios ilgis $2R$, nubrėžtas pusapskritimis taip, kad ji yra skersmuo. Į gautąją figūrą įbrėžtas apskritimas, kurio spindulys lygus $\frac{R}{4}$. Raskite spindulį apskritimo, kuris liečia įbrėžtąjį apskritimą, pusapskritimį ir duotąją atkarpą.

12.109. Apskritimai, kurių spinduliai lygūs R ir r ($R>r$) liečiasi iš vidaus. Raskite spindulį apskritimo, kuris liečia pirmuosius du ir tiesę, jungiančią jų centrus.

12.110. Apskritimo viduje nubrėžti du vienodo r spindulio apskritimai ir vienas R spindulio apskritimas taip, kad kiekvienas liečia tris kitus. Apskaičiuokite duotojo apskritimo spindulį.

12.111. Atkarpos AB vienoje pusėje nubrėžti 3 pusapskritimiai taip, kad atkarpa AB ir dvi jos dalys $[AC]$ ir $[BC]$ yra jų skersmenys. Raskite spindulį apskritimo, kuris liečia šiuos tris pusapskritimius, kai $|AC|=2a$, $|BC|=2b$.

12.112. Skritulio spindulys lygus R. Šio skritulio ketvirčio AOB viduje nubrėžtas $\frac{3}{8}R$ spindulio apskritimas, liečiantis lanką AB ir atkarpą OB. Raskite spindulį apskritimo, kuris liečia iš išorės duotąjį apskritimą, lanką AB ir atkarpą AO.

12.113. Pažymėti trys apskritimo taškai A, B ir M. Atstumai nuo taško M iki tiesių, kurios apskritimą liečia taškuose A ir B, atitinkamai lygūs a ir b. Apskaičiuokite atstumą nuo taško M iki tiesės AB.

XIII SKYRIUS

STEREOMETRIJOS UŽDAVINIAI

§ 1. Taisyklingasis tetraedras

13.1. Taisyklingojo tetraedro briauna lygi a. Raskite sferos, liečiančios tetraedro šonines sienas, spindulį, kai šios sferos centras yra tetraedro pagrinde.

13.2. Taisyklingojo tetraedro $ABCD$ briauna lygi b. Į trisienį kampą, kurį sudaro tetraedro šoninės sienos, einančios iš viršūnės A, įbrėžtas rutulys, liečiantis plokštumą, nubrėžtą per briaunų AB, AD ir BC vidurio taškus. Raskite šio rutulio spindulį.

13.3. Taisyklingojo tetraedro, kurio briauna lygi a, viduje yra keturi vienodi rutuliai, kurių kiekvienas liečia kitus tris rutulius ir tris tetraedro sienas. Raskite šių rutulių spindulį.

13.4. Per taisyklingojo tetraedro $ABCD$ briaunos AD vidurio tašką lygiagrečiai briaunai BC nubrėžta plokštuma, kertanti sieną ABC kampu, lygiu $\frac{\pi}{4}$. Apskaičiuokite pjūvio plotą, kai tetraedro briauna lygi a.

13.5. Taisyklingojo tetraedro, kurio briauna lygi a, aukštinė yra rutulio skersmuo. Apskaičiuokite tetraedro dalies, kuri yra rutulio viduje, paviršiaus plotą.

13.6. Į trisienį kampą, kurį sudaro taisyklingojo tetraedro sienos, išeinančios iš viršūnės A, įbrėžtas rutulys, kurio spindulys lygus R. Raskite atstumą nuo taško A iki rutulio centro.

13.7. Taisyklingojo tetraedro $ABCD$ briauna lygi a. Ant briaunos AB nubrėžtas rutulys taip, kad ši briauna yra jo skersmuo. Į trisienį tetraedro kampą, kurio viršūnė taške A, įbrėžtas rutulys, liečiantis pirmąjį rutulį. Raskite įbrėžtinio rutulio spindulį.

13.8. Taisyklingojo tetraedro $ABCD$ viduje yra du besiliečiantys iš išorės rutuliai. Vieno rutulio spindulys lygus $2R$, o kito – $3R$, be to, vienas rutulys įbrėžtas į trisienį tetraedro kampą, kurio viršūnė taške A, o kitas – į trisienį kampą, kurio viršūnė taške B. Apskaičiuokite šio tetraedro briaunos ilgį.

13.9. Taisyklingojo tetraedro $ABCD$ briauna lygi a. Briaunoje BD pažymėtas taškas M taip, kad $3\,|DM|=a$. Stačiojo skritulinio kūgio viršūnė sutampa su briaunos AC vidurio tašku, o pagrindo apskritimas eina per tašką M ir kerta briaunas AB bei BC. Raskite šio kūgio pagrindo spindulį.

13.10. Taisyklingojo tetraedro $SABC$ briauna lygi a. Per viršūnę A lygiagrečiai briaunai BC nubrėžta plokštuma taip, kad kampas tarp tiesės AB ir šios plokštumos lygus $\frac{\pi}{6}$. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

13.11. Taisyklingojo tetraedro briauna lygi a. Apskaičiuokite atstumą tarp tetraedro sienų prasilenkiančių aukštinių. (Raskite visus sprendinius.)

13.12. Duotos dvi koncentrinės sferos, kurių spinduliai lygūs r ir R, be to, $r<R$. Taisyklingojo tetraedro pagrindo trys viršūnės yra didesniojo spindulio sferoje, o šoninės sienos liečia mažesniojo spindulio sferą. Raskite šio tetraedro briauną.

§ 2. Taisyklingoji trikampė piramidė

13.13. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė, nuleista iš viršūnės į pagrindą, lygi h, o atstumas nuo pagrindo centro iki šoninės sienos lygus b. Raskite rutulio, įbrėžto į piramidę, spindulį.

13.14. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus S, o kampas tarp šoninės sienos ir pagrindo lygus α. Raskite piramidės aukštinę, nuleistą į pagrindą.

13.15. Taisyklingosios trikampės piramidės visas paviršius lygus S, o kampas tarp šoninių briaunų lygus α. Raskite piramidės aukštinę, nuleistą į pagrindą.

13.16. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė, nuleista į pagrindą, lygi h, o kampas tarp šoninių briaunų lygus α. Apskaičiuokite atstumą nuo pagrindo centro iki šoninės sienos.

13.17. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o dvisienis kampas tarp šoninių sienų lygus α. Raskite piramidės aukštinę, nuleistą į pagrindą.

13.18. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o dvisienis kampas tarp šoninių sienų lygus α. Apskaičiuokite šios piramidės tūrį ir šoninį paviršių.

13.19. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi b, o šoninė briauna – $2b$. Per šoninės briaunos vidurio tašką statmenai šiai briaunai nubrėžta plokštuma. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

13.20. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė, nuleista į pagrindą, lygi h, o pagrindo kraštinė lygi a. Per vieną pagrindo viršūnę lygiagrečiai priešingajai pagrindo kraštinei nubrėžta plokštuma, kuri su pagrindo plokštuma sudaro kampą, lygų α. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

13.21. Taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė, nuleista į pagrindą, lygi h, o atstumas nuo pagrindo centro iki šoninės briaunos lygus b. Raskite rutulio, įbrėžto į piramidę, spindulį.

13.22. Rutulio, apibrėžto apie taisyklingąją trikampę piramidę, spindulys lygus R, o dvisienis kampas tarp šoninių sienų lygus α. Raskite šios piramidės pagrindo kraštinę.

13.23. Taisyklingosios trikampės piramidės dvisienis kampas, kurį sudaro šoninė siena ir pagrindas, lygus $\frac{\pi}{3}$. Raskite apibrėžto apie piramidę ir įbrėžto į piramidę rutulių spindulių santykį.

13.24. Taisyklingojoje trikampėje piramidėje į pagrindą nuleista aukštinė. Atstumai nuo šios aukštinės vidurio taško iki šoninės briaunos ir iki šoninės sienos atitinkamai lygūs h ir b. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

13.25. Raskite dvisienį kampą, kurį sudaro taisyklingosios trikampės piramidės pagrindas ir šoninė siena, kai dvisienis kampas tarp šios piramidės šoninių sienų yra lygus α.

13.26. Kampas tarp taisyklingosios trikampės piramidės šoninės briaunos ir pagrindo lygus $\frac{\pi}{4}$. Į piramidę įbrėžtas ritinys, kurio vienas pagrindas yra piramidės pagrinde, o kito pagrindo apskritimas liečia piramidės šonines sienas. Ritinio aukštinės ilgis lygus jo pagrindo skersmeniui. Raskite piramidės ir ritinio tūrio santykį.

13.27. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o šoninė briauna lygi l. Raskite rutulio, liečiančio visas piramidės briaunas, spindulį.

13.28. Taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ pagrindo ABC kraštinė lygi a, šoninė briauna lygi b, be to, $a<b$. Raskite sferos, liečiančios briauną BS ir plokštumą ABC taške A, spindulį.

13.29. Taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ pagrindo kraštinė lygi a, piramidės aukštinė lygi $a\sqrt{3}$. Taškai M, N ir K yra atitinkamų šoninių briaunų AS, BS ir CS vidurio taškai. Raskite rutulio, liečiančio piramidės pagrindą bei tieses AK, CN ir BM, spindulį.

§ 3. Bet kokia trikampė piramidė

13.30. Visos trikampės piramidės šoninės briaunos ir dvi pagrindo kraštinės lygios b. Kampas, kurį sudaro kongruenčios pagrindo kraštinės, yra α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

13.31. Įrodykite, kad trikampės piramidės visos sienos yra kongruenčios, kai šių sienų perimetrai lygūs.

13.32. Trikampė piramidė plokštuma suskaidyta į du briaunainius. Raskite gautųjų briaunainių tūrių santykį, kai kertančioji plokštuma dalija tris šonines briaunas, išeinančias iš vienos viršūnės, santykiais 1 : 2, 1 : 2 ir 2 :1, skaičiuojant nuo šios viršūnės.

13.33. Trys trikampės piramidės sienos statmenos viena kitai ir jų plotai lygūs S_1, S_2 ir S_3. Apskaičiuokite ketvirtosios sienos plotą.

13.34. Trikampės piramidės šoninės briaunos, lygios a, b, c, statmenos viena kitai. Aukštinė, nuleista į pagrindą, lygi h. Įrodykite, kad

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

13.35. Visi plokštieji trikampės piramidės $SABC$ kampai prie viršūnės S yra statieji; $|AS|=a$, $|BS|=b$, $|CS|=c$. Raskite sferos, apibrėžtos apie šią piramidę, spindulį.

13.36. Trikampės piramidės pagrindas yra statusis trikampis, kurio įžambinė lygi b. Kiekviena šoninė piramidės briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Raskite sferos, apibrėžtos apie šią piramidę, spindulį.

13.37. Trikampės piramidės pagrindas yra statusis trikampis, kurio smailusis kampas lygus α. Kiekviena šoninė piramidės briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Raskite piramidės ir apibrėžto apie piramidę rutulio tūrių santykį.

13.38. Trikampės piramidės šoninių briaunų ilgiai lygūs, o pagrindas yra statusis trikampis, kurio aukštinė, nuleista iš stačiojo kampo viršūnės, lygi h. Dvisieniai kampai, kuriuos sudaro piramidės sienos, susikertančios pagal pagrindo statinius, lygūs α ir β. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

13.39. Trikampės piramidės $SABC$ pagrindas yra statusis trikampis ABC, briauna SB statmena pagrindo plokštumai. Raskite rutulio, įbrėžto į piramidę, spindulį, kai $|AB|=|BC|=a$, $|SB|=h$.

13.40. Trikampės piramidės pagrindo perimetras lygus $2p$, įbrėžtinio rutulio spindulys lygus R, o šoninės sienos su pagrindu sudaro vienodus kampus, lygius α. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

13.41. Trikampės piramidės $SABC$ briauna BC lygi a, $|AB|=|AC|$, briauna SA statmena pagrindui ABC, dvisienis kampas prie briaunos SA lygus α, o prie briaunos BC lygus β. Raskite rutulio, apibrėžto apie piramidę, spindulį.

13.42. Trikampės piramidės $SABC$ siena SBC statmena sienai ABC, visi plokštieji kampai prie viršūnės S lygūs $\frac{\pi}{3}$, $|SB|=|SC|=1$ cm. Apskaičiuokite šios piramidės tūrį.

13.43. Trikampės piramidės pagrindas yra lygiašonis statusis trikampis, kurio įžambinė lygi l. Šoninės sienos su pagrindo plokštuma sudaro dvisienius kampus, atitinkamai lygius α, β ir γ (γ atitinka įžambinę). Raskite rutulio, įbrėžto į šią piramidę, spindulį.

13.44. Trikampės piramidės $ABCD$ briauna AB lygi 6 cm, $|CD|=$ $=8$ cm, visos kitos briaunos lygios $\sqrt{74}$ cm. Raskite rutulio, apibrėžto apie šią piramidę, spindulį.

13.45. Trikampės piramidės $SABC$ aukštinė SK lygi h, $|AB|=|AC|$, $|SB|=|SC|$, $|BC|=a$, dvisienis kampas, kurį sudaro sienos ABC ir SBC, lygus $\frac{\pi}{4}$. Raskite rutulio, apibrėžto apie šią piramidę, spindulį, kai rutulio centras yra plokštumoje ABC.

13.46. Visi plokštieji trikampės piramidės $SABC$ kampai prie viršūnės S yra statieji, $|AC|=|BC|$, briauna SC pasvirusi į plokštumą ABC kampu $\frac{\pi}{4}$. Ant briaunos AB nubrėžta sfera, kurios skersmuo yra ši briauna, o spindulys lygus R. Į trisienį kampą, kurio viršūnė taške C, įbrėžta

sfera, liečianti duotąją sferą. Apskaičiuokite įbrėžtinės sferos spindulį. (Raskite visus sprendinius.)

13.47. Trikampės piramidės $ABCD$ briauna AB lygi a, sienos ABC aukštinė CE lygi b (taškas E yra tarp taškų A ir B), piramidės aukštinė DF lygi c (taškas F yra trikampio ABC viduje). Į piramidę įbrėžtas kubas $PQMNP_1Q_1M_1N_1$, kurio siena $PQMN$ yra sienoje ABC, briauna P_1Q_1 sienoje ABD, o viršūnės M_1 ir N_1 – atitinkamai sienose ACD ir BCD. Raskite kubo briauną.

13.48. Trikampės piramidės $ABCD$ briaunos AB ir CD statmenos viena kitai ir atitinkamai lygios a ir b. Bendras šioms briaunoms statmuo kerta briauną AB taške M ir briauną CD taške N, $|MN|=c$. Į piramidę įbrėžtas kubas taip, kad jo keturios briaunos lygiagrečios MN ir kiekvienoje piramidės sienoje yra po dvi kubo viršūnes. Raskite kubo briauną.

§ 4. Taisyklingoji keturkampė piramidė

13.49. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninė siena su pagrindu sudaro kampą, lygų $\frac{\pi}{3}$. Raskite piramidės ir įbrėžto į ją rutulio tūrių santykį.

13.50. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi b, o dvisienis kampas, kurį sudaro pagrindas su šonine siena, lygus α. Raskite rutulio, apibrėžto apie piramidę, spindulį.

13.51. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, o dvisienis kampas tarp pagrindo ir šoninės sienos lygus α. Apskaičiuokite atstumą tarp įbrėžto į piramidę rutulio ir apie ją apibrėžto rutulio centrų.

13.52. Taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo kraštinė lygi a, piramidės aukštinė – h. Per piramidės pagrindo kraštinę ir su ja prasilenkiančios šoninės briaunos vidurio tašką nubrėžta plokštuma. Apskaičiuokite atstumą nuo piramidės viršūnės, esančios prieš pagrindą, iki kertančiosios plokštumos.

13.53. Atstumas nuo taisyklingosios keturkampės piramidės pagrindo centro iki šoninės briaunos lygus h, o iki šoninės sienos – b. Raskite piramidės tūrį.

13.54. Kampas, kurį sudaro taisyklingosios keturkampės piramidės gretimos šoninės briaunos, lygus α, apibrėžtos apie piramidę sferos spindulys lygus R. Apskaičiuokite piramidės šoninės briaunos ilgį.

13.55. Taisyklingoji keturkampė piramidė įbrėžta į rutulį, kurio spindulys lygus R. Raskite šios piramidės šoninio paviršiaus didžiausią reikšmę.

13.56. Į taisyklingąją keturkampę piramidę įbrėžtas kubas taip, kad viena kubo briauna yra piraminės pagrindo vidurinėje linijoje, kubo viršūnės, nepriklausančios šiai briaunai,– piramidės šoniniame paviršiuje, o kubo centras – piramidės aukštinėje. Koks piramidės ir kubo tūrių santykis?

13.57. Rutulio, apibrėžto apie taisyklingąją keturkampę piramidę, centras nutolęs nuo šoninės sienos atstumu, lygiu a, o nuo šoninės briaunos atstumu, lygiu b. Raskite rutulio spindulį.

13.58. Rutulio, įbrėžto į taisyklingąją keturkampę piramidę, centras nutolęs nuo šoninės briaunos $\sqrt{2}$ cm atstumu ir nuo pagrindo kraštinės $\sqrt{5}$ cm atstumu. Raskite rutulio spindulį.

13.59. Plokštuma kerta taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ šonines briaunas SA, SB, SC ir SD atitinkamai taškuose M, N, K, L ir, be to, taip, kad $|AM|:|SM|=m$, $|BN|:|SN|=n$, $|CK|:|SK|=p$. Raskite santykį $|DL|:|SL|$.

13.60. Taisyklingosios keturkampės piramidės apotema kongruenti pagrindo kraštinei. Piramidės viduje yra du rutuliai: pirmasis, kurio spindulys lygus r, liečia visas šonines sienas, antrasis, kurio spindulys lygus $2r$, liečia pagrindą ir dvi gretimas šonines sienas, be to, šie rutuliai dar liečia vienas kitą iš išorės. Raskite šios piramidės apotemą.

13.61. Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindo $ABCD$ kraštinė lygi a, aukštinė SO lygi $2\sqrt{2}\,a$. Per viršūnę A lygiagrečiai piramidės pagrindo įstrižainei BD nubrėžta plokštuma taip, kad kampas tarp tiesės AB ir šios plokštumos lygus $\frac{\pi}{6}$. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

13.62. Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindo kraštinė lygi b, kampas tarp šoninės briaunos ir pagrindo plokštumos lygus $\arccos\frac{2}{3}$. Polkštuma, lygiagreti pagrindo įstrižainei AC ir šoninei briaunai BS, kerta piramidę taip, kad į gautąjį pjūvį galima įbrėžti apskritimą. Apskaičiuokite šio apskritimo spindulį. (Raskite visus sprendinius.)

13.63. Taisyklingosios keturkampės piramidės $SABCD$ aukštinė kongruenti pagrindo $ABCD$ įstrižainei. Per viršūnę A lygiagrečiai tiesei BD nubrėžta plokštuma, kuri liečia rutulį, įbrėžtą į piramidę. Koks pjūvio ir piramidės pagrindo plotų santykis?

§ 5. Bet kokia keturkampė piramidė ir daugiakampė piramidė

13.64. Keturkampės piramidės pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi a, jos viena šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai, o didžiausioji šoninė briauna su pagrindo plokštuma sudaro kampą β. Raskite į šią piramidę įbrėžto rutulio spindulį.

13.65. Keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindas yra kvadratas $ABCD$, kurio kraštinė lygi a. Briauna $|SD|=h$ statmena pagrindo plokštumai. Piramidės viduje nubrėžtas ritinys taip, kad vieno pagrindo apskritimas yra trikampyje SCD, o kito pagrindo apskritimas liečia sieną SAB. Raskite ritinio aukštinę.

13.66. Keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi a. Briauna SA statmena pagrindo plokštumai ir lygi h. Per viršūnę A lygiagrečiai pagrindo įstrižainei BD nubrėžta plokštuma, kuri briauną SC dalija santykiu $2:1$, skaičiuojant nuo viršūnės S. Raskite pjūvio plotą.

13.67. Keturkampės piramidės $SABCD$ pagrindas yra rombas, kurio įstrižainės $|AC|=a$, $|BD|=b$. Šoninė briauna SA statmena pagrindo plokštumai ir lygi h. Per tašką A ir briaunos SC vidurio tašką nubrėžta plokštuma, lygiagreti pagrindo įstrižainei BD. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

13.68. Per taisyklingosios šešiakampės piramidės pagrindo centrą nubrėžta plokštuma, lygiagreti šoninei sienai. Koks pjūvio ir šoninės sienos plotų santykis?

13.69. Dvi šoninės piramidės briaunos, kurios lygios a ir b, sudaro kampą $\frac{\pi}{3}$; kampas tarp jų projekcijų pagrindo plokštumoje lygus $\frac{2\pi}{3}$. Raskite piramidės aukštinę.

13.70. Piramidės $SABC\ldots K$ viršūnės S projekcija į pagrindą yra kampo ABC viduje, kampas ABC lygus $\frac{\pi}{3}$, kampai SAB ir SCB statieji, $|AB|=a$, $|BC|=b$, $|SC|=l$. Raskite šios piramidės aukštinę.

13.71. Sfera, įbrėžta į taisyklingąją šešiakampę piramidę, eina per apibrėžtinės sferos centrą. Kiek kartų apibrėžtinės sferos spindulys yra didesnis už įbrėžtinės sferos spindulį? (Raskite visus sprendinius.)

§ 6. Nupjautinė piramidė

13.72. Apie rutulį apibrėžta taisyklinga trikampė nupjautinė piramidė, kurios šoninė siena pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu α. Koks rutulio ir nupjautinės piramidės tūrių santykis?

13.73. Taisyklingos trikampės nupjautinės piramidės $ABC\,A_1B_1C_1$ didesniojo pagrindo ABC kraštinė lygi b. Atstumas tarp taško A ir trikampio A_1BC_1 plokštumos lygus m, o atstumas tarp taško B_1 ir tos pačios plokštumos lygus n. Raskite šios nupjautinės piramidės aukštinę.

13.74. Į taisyklingą trikampę nupjautinę piramidę, kurios šoninė briauna lygi l, galima įdėti rutulį, liečiantį visas sienas, ir rutulį, liečiantį visas piramidės briaunas. Raskite piramidės pagrindų kraštines.

13.75. Taisyklingojoje keturkampėje nupjautinėje piramidėje $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ yra du pjūviai: AA_1C_1C ir ABC_1D_1. Pirmojo pjūvio plotas lygus S_1, o antrojo – S_2. Apskaičiuokite pjūvio, einančio per piramidės aukštinės vidurį lygiagrečiai pagrindams, plotą.

13.76. Taisyklingoje keturkampėje nupjautinėje piramidėje yra pjūvis, einantis per pagrindo įstrižaines, ir pjūvis, einantis per apatinio pagrindo kraštinę ir priešingąją viršutinio pagrindo kraštinę. Smailusis kampas, kurį sudaro kertančiosios plokštumos, lygus α. Koks pjūvių plotų santykis?

13.77. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės apatinio ir viršutinio pagrindo perimetrų skirtumas lygus $4a$, piramidės aukštinė lygi h. Atstumas tarp apibrėžtinio rutulio centro ir piramidės šoninės sienos yra $\sqrt{2}$ kartų mažesnis už šio rutulio spindulį. Raskite piramidės pagrindų kraštines.

13.78. Taisyklingosios šešiakampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinės lygios a ir $3a$. Per dvi lygiagrečias briaunas, esančias skirtinguose pagrinduose ir skirtingose šoninėse sienose, nubrėžta plokštuma, kuri su piramidės pagrindu sudaro kampą, lygų α. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

§ 7. Gretasienis

13.79. Kubo briauna lygi a. Raskite spindulį sferos, kuri eina per kubo apatinio pagrindo viršūnes ir liečia viršutinio pagrindo briaunas.

13.80. Kubo briauna lygi b. Apskaičiuokite kūgio tūrį, kai jo viršūnė sutampa su kubo viršūne A, o pagrindo apskritimas eina per kubo sienų, kurioms nepriklauso taškas A, centrus.

13.81. Kubo briauna lygi a. Per sienos $ABCD$ įstrižainę AC nubrėžta plokštuma taip, kad gautasis pjūvis yra trapecija, kurios smailusis kampas lygus $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$. Raskite atstumą tarp viršūnės B ir kertančiosios plokštumos.

13.82. Stačiakampio gretasienio pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė b, o gretasienio aukštinė lygi $\frac{5b}{4}$. Per pagrindo kraštinės AB galus nubrėžta sfera, liečianti gretasienio sienas, kurios lygiagrečios AB. Raskite šios sferos spindulį.

13.83. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briauna lygi a. Apskaičiuokite spindulį sferos, kuri eina per briaunų AA_1, BB_1 vidurio taškus ir per viršūnes A, C_1.

13.84. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos AB, AD ir AA_1 atitinkamai lygios a, b ir c. Raskite kampą tarp plokštumų AB_1D_1 ir A_1C_1D.

13.85. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunoje BB_1 pažymėtas taškas M taip, kad $|BM| = \frac{1}{3}|BB_1|$. Per taškus A, M ir kubo centrą nubrėžta plokštuma. Raskite kampą, kurį ši plokštuma sudaro su sienos $ABCD$ plokštuma.

13.86. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinė lygi 5 cm. Gretasienio aukštinė lygi 4 cm. Į trisienius kampus prie viršūnių A ir C_1 įbrėžti du vienodi besiliečiantys rutuliai. Trečiasis rutulys liečia du pirmuosius rutulius ir šoninę briauną BB_1 jos vidurio taške. Raskite trečiojo rutulio spindulį.

13.87. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindas yra kvadratas $ABCD$, kurio kraštinė a. Per sienos $ABCD$ įstrižainę AC nubrėžta plokštuma, kertanti sieną $A_1B_1C_1D_1$. Į trisienius kampus B ir D_1 įbrėžtų rutulių, liečiančių šią plokštumą, spinduliai atitinkamai lygūs $\frac{a}{5}$ ir $\frac{a}{4}$. Raskite gretasienio aukštinę.

13.88. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunos $|AB|$, $|AD|$ ir $|AA_1|$ atitinkamai lygios 3 cm, 2 cm ir 1 cm. Į trisienį kampą prie viršūnės A įbrėžtas rutulys, liečiantis įstrižainę BD_1. Raskite šio rutulio spindulį.

13.89. Taisyklingosios trikampės prizmės visos briaunos lygios a. Per pagrindo kraštinę nubrėžta plokštuma, kuri su pagrindo plokštuma sudaro kampą β $\left(\beta > \frac{\pi}{3}\right)$. Apskaičiuokite gautojo pjūvio plotą.

13.90. Į rutulį, kurio spindulys R, įbrėžta taisyklinga trikampė prizmė, kurios šoninės sienos plotas lygus S. Raskite prizmės briaunas.

13.91. Stačiosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindas yra lygiašonis trikampis ($|AB|=|BC|$), kurio aukštinė, nuleista iš viršūnės B, lygi $\sqrt{3}$ cm. Briaunoje BB_1 pažymėtas taškas P taip, kad kampas A_1PC lygus $\frac{\pi}{2}$, $|A_1P|=2\sqrt{2}$ cm ir $|PC|=\sqrt{5}$ cm. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

13.92. Stačiosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindo kraštinė lygi b, o prizmės aukštinė lygi h. Per viršūnes A, B_1 ir briaunos CC_1 tašką P nubrėžta plokštuma taip, kad kampas APB_1 lygus $\frac{2\pi}{3}$. Apskaičiuokite gautojo pjūvio plotą.

13.93. Stačiosios trikampės prizmės pagrindas yra statusis trikampis, kurio statiniai lygūs a ir b. Plokštuma kerta visas šonines prizmės briaunas taip, kad gautasis pjūvis yra taisyklingasis trikampis. Raskite šio trikampio kraštinę.

13.94. Trikampės prizmės pagrindas yra taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė lygi a. Tiesė, jungianti viršutinio pagrindo viršūnę su apatinio pagrindo centru, statmena pagrindų plokštumoms. Į šios prizmės vidų galima įdėti rutulį, liečiantį visas prizmės sienas. Raskite šoninę prizmės briauną.

13.95. Trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ šoninė briauna lygi l, o jos pagrindas yra taisyklingasis trikampis, kurio kraštinė b. Tiesė, einanti per viršūnę B_1 ir pagrindo ABC centrą, statmena pagrindams. Per briauną BC ir briaunos AA_1 vidurio tašką nubrėžta plokštuma. Apskaičiuokite gautojo pjūvio plotą.

13.96. Stačiosios trikampės prizmės pagrindas yra lygiašonis statusis trikampis, kurio įžambinė lygi c. Per apatinio pagrindo įžambinę nubrėžta plokštuma taip, kad gautasis pjūvis yra taisyklingasis trikampis. Į prizmę galima įbrėžti rutulį, liečiantį šonines jos sienas, viršutinį pagrindą ir pjūvį. Raskite prizmės tūrį.

13.97. Trikampėje prizmėje $ABCA_1B_1C_1$ yra du pjūviai. Pirmasis pjūvis eina per briauną AB ir briaunos A_1C_1 vidurį, o antrasis – per briauną A_1B_1 ir briaunos CC_1 vidurį. Šie pjūviai kertasi tam tikra tiese. Raskite šios tiesės atkarpos, esančios prizmės viduje, ir briaunos AB ilgių santykį.

13.98. Taisyklingosios trikampės prizmės $ABCA_1B_1C_1$ pagrindo kraštinė lygi b, o prizmės aukštinė lygi $b\sqrt{2}$. Per viršūnes A, B_1 ir briaunos CC_1 vidurį nubrėžta plokštuma. Antroji plokštuma nubrėžta per viršūnę B, briaunų AC ir B_1C_1 vidurio taškus. Apskaičiuokite atkarpos, kurioje kertasi gautieji pjūviai, ilgį.

§ 9. Kūgis

13.99. Rutulyje įbrėžtas kūgis. Raskite kūgio ir rutulio tūrių santykį, kai kūgio sudaromoji pasvirusi į jo pagrindą kampu α.

13.100. Kūgyje įbrėžti du rutuliai: pirmasis rutulys liečia kūgio šoninį paviršių ir jo pagrindą, antrasis – kūgio šoninį paviršių ir pirmąjį rutulį. Šių rutulių tūrių santykis lygus 27. Raskite kampą prie kūgio viršūnės.

13.101. Lygiašonis trikampis sukamas apie ašį, esančią jo plokštumoje ir einančią per kampo prie pagrindo viršūnę lygiagrečiai priešingai šoninei kraštinei. Šoninė trikampio kraštinė lygi a, o kampas prie pagrindo lygus α. Apskaičiuokite gautojo kūno tūrį.

13.102. Ant pusiausferos, kurios spindulys lygus R, pagrindo nubraižytas kūgis taip, kad jo šoninis paviršius šią pusiausferą kerta taškuose, nutolusiuose nuo pagrindo atstumu, lygiu $\frac{1}{4}$ kūgio aukštinės. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

13.103. Į sferą, kurios spindulys R, įbrėžti du kūgiai, turintys bendrą pagrindą. Vieno kūgio tūris keturis kartus didesnis už antrojo tūrį. Raskite kiekvieno kūgio šoninį paviršių.

13.104. Kūgio aukštinė, lygi h, yra sferos, dalijančios kūgio šoninį paviršių santykiu $n : m$, skaičiuojant nuo viršūnės, skersmuo. Raskite kūgio pagrindo spindulį.

13.105. Į kūgį, kurio aukštinė lygi h ir pagrindo spindulys lygus $2h$, įbrėžtas rutulys. Per kūgio viršūnę nubrėžta plokštuma, kuri su kūgio ašimi sudaro kampą $\frac{\pi}{4}$. Apskaičiuokite rutulio pjūvio plotą.

13.106. Į kūgį įbrėžta sfera. Į šią sferą įbrėžtas kūgis, kurio tūris a kartų mažesnis už pirmojo kūgio tūrį. Abiejų kūgių kampai prie viršūnės yra vienodi. Raskite šiuos kampus.

13.107. Kūgio pagrindo spindulys lygus R ir aukštinė lygi H. Į šį kūgį įbrėžtas ritinys taip, kad jo šoninis paviršius yra didžiausias. Raskite šio ritinio pagrindo spindulį ir aukštinę.

13.108. Kūgio pagrindo spindulio ir į šį kūgį įbrėžto rutulio spindulio santykis lygus b. Raskite kūgio ir rutulio tūrių santykį.

13.109. Rutulys, kurio spindulys R, įbrėžtas į kūgį. Kūgio viduje yra rutulys, kurio spindulys lygus r, liečiantis kūgio šoninį paviršių ir pirmąjį rutulį. Apskaičiuokite kūgio tūrį ir įrodykite, kad jis ne mažesnis už dvigubą pirmojo rutulio tūrį.

13.110. Kūgio viduje įbrėžtas kubas, kurio viena briauna yra kūgio pagrindo skersmenyje, o kubo viršūnės, nepriklausančios šiai briaunai, – šoniniame kūgio paviršiuje. Raskite kūgio ir kubo tūrių santykį.

13.111. Apie kūgį, kurio aukštinė 2 cm, apibrėžta taisyklingoji trikampė piramidė, kurios pagrindo kraštinė lygi $3\sqrt{3}$ cm. Į trisienį kampą prie piramidės pagrindo įbrėžtas rutulys, iš išorės liečiantis kūgio šoninį paviršių. Raskite šio rutulio spindulį.

13.112. Nupjautinio kūgio sudaromoji, kuri lygi $r\sqrt{2}$, pasvirusi į pagrindo plokštumą kampu $\frac{\pi}{4}$, o viršutinio pagrindo spindulys lygus r. Raskite apie šį kūgį apibrėžto rutulio spindulį.

13.113. Apie rutulį apibrėžtas nupjautinis kūgis. Šio kūgio ir rutulio tūrių santykis lygus 13 : 6. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo.

13.114. Nupjautinis kūgis apibrėžtas apie rutulį. Šio rutulio spindulys $\sqrt{30}$ kartų mažesnis už sferos, apibrėžtos apie nupjautinį kūgį, spindulį. Raskite kampą tarp kūgio sudaromosios ir jo pagrindo.

13.115. Ritinio viduje yra du rutuliai, kurių spinduliai lygūs r, ir vienas rutulys, kurio spindulys lygus 2,5 r. Be to, kiekvienas rutulys liečia kitus du, vieną ritinio pagrindą ir šoninį jo paviršių. Raskite ritinio pagrindo spindulį.

13.116. Ritinio aukštinė lygi $3r$. Šio ritinio viduje yra trys vienodi rutuliai, kurių spinduliai lygūs r. Kiekvienas rutulys liečia kitus du ir šoninį ritinio paviršių, be to, du rutuliai liečia apatinį ritinio pagrindą, o trečiasis rutulys liečia viršutinį ritinio pagrindą. Raskite ritinio pagrindo spindulį.

13.117. Du rutuliai, kurių spinduliai lygūs r, ir dar du vienodi nežinomo spindulio rutuliai sudėti taip, kad kiekvienas rutulys liečia tris kitus ir duotąją plokštumą. Raskite nežinomus rutulių spindulius.

13.118. Į pusiausferą, kurio spindulys R, įbrėžti trys vienodi rutuliai taip, kad kiekvienas jų liečia kitus du rutulius, pusiausferą ir jos pagrindą. Raskite šių rutulių spindulius.

13.119. Į dvisienį kampą α įbrėžti du rutuliai, kurių spinduliai r, liečiantys vienas kitą. Raskite rutulio, liečiančio kampo sienas ir duotuosius rutulius, spindulį.

I SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

1.3. Teiginiai $\{2+4 \leqslant 10\}$, $\{5^3=125\}$ yra teisingi, o teiginiai $\{5<2\}$, $\{11+3=18\}$, $\{6^3 \neq 216\}$ – klaidingi.

1.4. $\neg M \equiv \{257$ – nelyginis skaičius$\}$,
$\neg Q \equiv \{\sqrt{2}$ – neracionalusis skaičius$\}$,
$\neg R \equiv \{7$ – neteigiamas skaičius$\}$,
$\neg S \equiv \{5$ – neneigiamas skaičius$\}$.

1.5. Teisingi yra šie teiginiai: $\neg M$, $\neg Q$, R, $\neg S$.

1.6. Abu teiginiai A, B yra teisingi. Teiginys B nėra teiginio A neiginys.
$\neg A \equiv \{$visi lyginiai skaičiai yra sudėtiniai$\}$,
$\neg B \equiv \{$visi nelyginiai skaičiai yra sudėtiniai$\}$.

1.7. $\neg C \equiv \{27$ dalijasi iš $2\}$,
$\neg D \equiv \{$yra (bent vienas) lyginis pirminis skaičius$\}$,
$\neg E \equiv \{5 \cdot 7=35\}$.
Teiginiai C, $\neg D$, $\neg E$ yra teisingi.

1.8. $\neg A \equiv \{15$ nesidalija iš $3\}$,
$\neg B \equiv \{5$ – neteigiamas skaičius$\}$,
$\neg C \equiv \{3 \geqslant 7\}$.

1.9. Teiginiai $A(1)$, $A(3)$, $A(5)$, $A(7)$ yra teisingi, o teiginiai $A(2)$, $A(4)$, $A(6)$ – klaidingi.

1.10. Teiginiai $B(1)$, $B(2)$, $B(3)$, $B(4)$, $B(5)$, $B(6)$, $\neg B(7)$, $\neg B(8)$, $\neg B(9)$, $B(10)$ yra teisingi; visi kiti teiginiai – klaidingi.

1.11. Teiginiai $K(3)$, $L(3)$, $K(5)$, $L(5)$, $K(7)$, $L(7)$ yra teisingi, o teiginiai $K(4)$, $L(4)$, $K(6)$, $L(6)$, $K(8)$, $L(8)$ – klaidingi; teiginio funkcijos $K(x)$ ir $L(x)$ aibėje M sutampa, bet nesutampa aibėje, kurią sudaro skaičiai 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

1.12. (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (3, 2) (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (6, 1).

1.13. Teiginiai $F(a, b)$ teisingi, kai $a=1$, b – bet koks aibės N skaičius ir kai $a=b$. Be to, dar bus teisingi teiginiai $F(2, 4)$, $F(2, 6)$, $F(2, 8)$, $F(2, 10)$, $F(3, 6)$, $F(3, 9)$, $F(4, 8)$, $F(5, 10)$. Galima rasti porų (a, b), su kuriomis vienas iš teiginių $F(a, b)$, $F(b, a)$ yra teisingas, o kitas klaidingas; pavyzdžiui, teiginys $F(1, 2)$ yra teisingas, o teiginys $F(2, 1)$ – klaidingas. Teiginiai $F(a, b)$ ir $F(b, a)$ yra teisingi kartu tada ir tik tada, kai $a=b$. Teiginiai $F(2, 5)$ ir $F(5, 2)$ yra klaidingi.

1.14. $\neg A \equiv \{$egzistuoja (bent viena) $a>0$ reikšmė, su kuria lygtis $x^2=a$ neturi realiųjų šaknų$\}$; A – teisingas, $\neg A$ – klaidingas teiginys.

1.15. $\neg A \equiv \{$egzistuoja realusis skaičius a, su kuriuo lygtis $x^2=a$ neturi realiųjų šaknų$\}$; A – klaidingas, $\neg A$ – teisingas teiginys.

1.16. $\neg A \equiv \{$bet kokios kvadratinės lygties šaknys yra realios$\}$; A – teisingas, $\neg A$ – klaidingas teiginys.

1.17. $\neg A \equiv \{$egzistuoja du trikampiai, kurie yra nepanašūs$\}$; A – klaidingas, $\neg A$ – teisingas teiginys.

1.18. $\neg A \equiv \{$egzistuoja du skaičiai a, b, kurių nė vienas nesidalija iš $3\}$; A – klaidingas, $\neg A$ – teisingas teiginys.

1.19. 1. Kai aibėje M, kurią sudaro visi pirminiai skaičiai, apibrėžta teiginio funkcija $A_1(x) \equiv \{$skaičius x yra nelyginis$\}$, tai $(\forall x)\, A_1(x) \equiv \{$visi pirminiai skaičiai yra nelyginiai$\}$.

2. Kai aibėje K, kurią sudaro visi sveikieji skaičiai, yra apibrėžta teiginio funkcija $A_2(x) \equiv \left\{ \text{skaičius } \frac{1}{x} \text{ yra apibrėžtas} \right\}$, tai $(\forall x)\ A_2(x) \equiv \left\{ \text{su bet kuria sveikąja } x \text{ reikšme yra abiprėžtas dalmuo } \frac{1}{x} \right\}$.

3. Kai aibėje N, kurią sudaro visi natūriniai skaičiai, apibrėžta teiginio funkcija $A_3(x) \equiv \{x^2 > x\}$, tai $(\forall x)\ A_3(x) \equiv$ {kiekvienas natūrinis skaičius x tenkina nelygybę $x^2 > x$}.

4. Kai aibėje D, sudarytoje iš visų realiųjų skaičių, yra apibrėžta teiginio funkcija $A_4(x) \equiv$ {skaičių x galima išreikšti baigtine dešimtaine trupmena}, tai $(\forall x)\ A_4(x) \equiv$ $\equiv$ {kiekvieną realųjį skaičių galima išreikšti baigtine dešimtaine trupmena}.

Teiginiai $(\forall x)\ A_n(x)\ (n=1, 2, 3, 4)$ yra klaidingi, o teiginiai $\neg\big((\forall x)\ A_n(x)\big) \equiv$ $\equiv (\exists x)\ \big(\neg A_n(x)\big)\ (n=1, 2, 3, 4)$ – teisingi.

1.20. 1. Kai aibėje, kurią sudaro visos paprastosios trupmenos, yra apibrėžta teiginio funkcija $B_1(x) \equiv$ { skaičių x galima išreikšti baigtine dešimtaine trupmena}, tai teiginys $\neg\big((\forall x)\ B_1(x)\big) = (\exists x)\ \big(\neg B_1(x)\big)$ reiškia: ne kiekvieną paprastąją trupmeną galima išreikšti baigtine dešimtaine trupmena, t.y. egzistuoja paprastoji trupmena, kurios negalima išreikšti baigtine dešimtaine trupmena.

2–4. Tarkime, kad visų natūrinių skaičių aibėje N yra apibrėžtos šios teiginio funkcijos:

$$E_2(x, y) \equiv \{x+y \text{ — pirminis skaičius}\},$$

$$E_3(x, y) \equiv \{x^2+y^2 < 100\},$$

$$E_4(x, y) \equiv \{x+y \text{ — lyginis skaičius}\}.$$

Tuomet 2–4 teiginius galima parašyti taip:

2. $(\forall x)\ (\exists y)\ E_2(x, y)$,
3. $(\forall x)\ (\exists y)\ E_3(x, y)$,
4. $(\forall y)\ (\exists x)\ E_4(x, y)$.

5. Kai aibėje, kurią sudaro visi tiesės l taškai, yra apibrėžta teiginio funkcija $E_5(x, y) \equiv$ {atstumas tarp taškų x ir y lygus trims vienetams}, tai teiginys $(\forall x)\ (\exists y)\ E_5(x, y)$ reiškia: koks bebūtų tiesės l taškas x, egzistuoja šios tiesės taškas y, nutolęs nuo taško x atstumu, lygiu trims vienetams.

1.21. 1. Kai visų natūrinių skaičių aibėje N yra apibrėžta teiginio funkcija $A_1(x) \equiv$ $\equiv$ {skaičius x dalijasi iš 5}, tai $(\forall x)\ A_1(x) \equiv$ {bet koks natūrinis skaičius dalijasi iš 5}; teiginys $\neg\big((\forall x)\ A_1(x)\big) \equiv (\exists x)\ \big(\neg A_1(x)\big)$ reiškia: ne kiekvienas natūrinis skaičius dalijasi iš 5, t.y. egzistuoja natūrinis skaičius x, kuris nesidalija iš 5.

2. Kai visų lyginių skaičių aibėje yra apibrėžta teiginio funkcija $A_2(x) \equiv \{x$ – pirminis skaičius$\}$, tai $(\exists x)\ A_2(x) \equiv$ {egzistuoja lyginiai pirminiai skaičiai}; teiginys $\neg\big((\exists x)\ A_2(x)\big) \equiv (\forall x)\ \big(\neg A_2(x)\big)$ reiškia: nėra lyginių pirminių skaičių, t.y. visi lyginiai skaičiai yra sudėtiniai.

3. Kai visų natūrinių skaičių aibėje N apibrėžta teiginio funkcija $A_3(x) \equiv$ {skaičius x yra lyginis}, tai $(\forall x)\ A_3(x) \equiv$ {visi natūriniai skaičiai yra lyginiai}; teiginys $\neg\big((\forall x)\ A_3(x)\big) \equiv (\exists x)\ \big(\neg A_3(x)\big)$ reiškia: ne visi natūriniai skaičiai yra lyginiai, t.y. egzistuoja nelyginis natūrinis skaičius.

4. Kai visų trikampių aibėje yra apibrėžta teiginio funkcija $A_4(x) \equiv$ {visi trikampio x kampai yra statieji}, tai $(\exists x)\ A_4(x) \equiv$ {egzistuoja trikampis, kurio visi kampai yra statieji}; teiginys $\neg\big((\exists x)\ A_4(x)\big) \equiv (\forall x)\ \big(\neg A_4(x)\big)$ reiškia: nėra trikampio, kurio visi kampai būtų statieji, t.y. kiekvieno trikampio bent vienas kampas yra nestatusis.

1.22. $A(x) \equiv$ {keturkampis x – lygiagretainis},
$B(x) \equiv$ {keturkampio x įstrižainės susikirtimo taške dalijasi pusiau}.

1.23. $A(x, y) \equiv$ {skaičiai x ir y yra teigiamieji},
$B(x, y) \equiv$ {skaičiams x ir y galioja lygybė $\lg(xy) = \lg x + \lg y$}.

1.24. $A(x) \equiv$ {sveikasis skaičius x baigiasi dviem nuliais},
$B(x) \equiv$ {sveikasis skaičius x dalijasi iš 4}.

1.25. $A \Rightarrow B$. (Kad sandauga xy būtų lygi nuliui, pakanka, jog skaičius x yra lygus nuliui. Kitaip: kad skaičius x būtų lygus nuliui, būtina, jog sandauga xy būtų lygi nuliui.)

1.26. $B \Rightarrow A$. (Kad tiesės l_1 ir l_2 būtų lygiagrečios, būtina, jog jos būtų vienoje plokštumoje. Kitaip: kad tiesės l_1 ir l_2 būtų vienoje plokštumoje, pakanka, jog jos yra lygiagrečios.)

1.27. $B \Rightarrow A$. (Kad galiotų sąryšis $a^2 \neq 0$, pakanka, jog $a > 0$. Kitaip: kad nelygybė $a > 0$ būtų teisinga, būtina, jog galiotų sąlyga $a^2 \neq 0$.)

1.28. $(A \Rightarrow B) \equiv$ {dvi lygiašonės trikampio pusiaukraštinės yra lygios}; $(B \Rightarrow A) \equiv$ $\equiv$ {kai dvi trikampio pusiaukraštinės yra lygios, tai šis trikampis yra lygiašonis}; atvirkštinė teorema teisinga, t.y. teiginys $(B \Rightarrow A)$ – teisingas.

1.29. $(A \Rightarrow B) \equiv$ {rombo įstrižainės dalija jo kampus pusiau}; $(B \Rightarrow A) \equiv$ {kai keturkampio įstrižainės dalija jo kampus pusiau, tai šis keturkampis yra rombas}; atvirkštinė teorema teisinga, t.y. teiginys $(B \Rightarrow A)$ – teisingas.

1.30. $(A \Rightarrow B) \equiv$ {kai natūrinis skaičius a dalijasi iš 9, tai skaičiaus a skaitmenų suma dalijasi iš 3}; $(B \Rightarrow A) \equiv$ {kai natūrinio skaičiaus a skaitmenų suma dalijasi iš 3, tai skaičius a dalijasi iš 9}; atvirkštinė teorema neteisinga, t.y. teiginys $(B \Rightarrow A)$ – klaidingas.

1.32. Funkcija $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ yra pastovi tada ir tik tada, kai $ad = bc$ (laikome, kad funkcija $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ turi prasmę, t.y. bent vienas iš skaičių c, d yra nelygus nuliui).

1.33. Iš trijų atkarpų, kurių ilgiai lygūs a, b, c galima sudaryti trikampį tada ir tik tada, kai skaičiai a, b, c tenkina nelygybes $a+b>c$, $b+c>a$, $a+c>b$.

1.34. Daugianaris $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ tada ir tik tada dalijasi iš $x - \alpha$, kai $P(\alpha) = 0$.

1.36. Abi teoremos teisingos, t.y. galioja teorema: piramidė P yra taisyklingoji tada ir tik tada, kai visos šios piramidės pagrindo kraštinės lygios viena kitai ir visos jos briaunos irgi lygios viena kitai.

1.37. Teorema $A \wedge B \Leftrightarrow C$ teisinga, t.y. piramidė P yra taisyklingoji tada ir tik tada, kai visi piramidės pagrindo kampai lygūs ir visos šoninės sienos vienodai pasvirusios į pagrindo plokštumą.

1.39. Teoremos 1 ir 6 yra teisingos, o 2, 3, 4 ir 5 teoremos – klaidingos. 1 ir 4 teoremos yra viena kitai atvirkštinės, 2 ir 5 teoremos irgi yra viena kitai atvirkštinės. 2 ir 3 teoremos yra viena kitai priešingos, 4 ir 6 teoremos irgi yra viena kitai priešingos.

1.40. $\neg\big(A(x) \vee B(x)\big) \equiv \big(\neg A(x)\big) \wedge \big(\neg B(x)\big) \equiv$ {paskutinysis skaičiaus x skaitmuo yra lyginis ir nelygus nuliui}.

1.41. $\big(\neg A(x)\big) \vee \big(\neg B(x)\big) \equiv \neg\big(A(x) \wedge B(x)\big) \equiv$ {x nesidalija iš 6}.

II SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

2.4. Ne. **2.5.** Ne. **2.6.** Taip. Pavyzdžiui, $\sqrt{3} + (5 - \sqrt{3}) = 5$. **2.7.** Taip. Pavyzdžiui, $(\sqrt{2})(\sqrt{8}) = 4$. **2.14.** 7,9 (su pertekliumi). **2.15.** 15,7 (su pertekliumi). **2.16.** 1,7 (su trūkumu). **2.17.** 1,5 (su pertekliumi). **2.18.** 0,394.

2.19. $0,\underbrace{99\ldots9}_{100 \text{ skaitmenų}}\underbrace{00\ldots0}_{100 \text{ skaitmenų}}\ldots$ **2.20.** $0,\underbrace{99\ldots9}_{100 \text{ skaitmenų}}\ldots$ **2.21.** $0,0010\cdot$

2.24. $x > 0$. **2.25.** $x \neq 0$. **2.26.** $|\cos\alpha - \cos\beta|$. **2.27.** $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}} = \begin{cases} 2, & \text{kai } 1 \leqslant a \leqslant 2, \\ 2\sqrt{a-1}, & \text{kai } a > 2. \end{cases}$ **2.28.** $\dfrac{a^2}{b^2}$, kai $|a| \geqslant |b|$; $\dfrac{b^2}{a^2}$, kai $|a| < |b|$.

2.29. $\dfrac{a-b}{2b}$, kai $|a| \geqslant |b|$; $\dfrac{b-a}{2b}$, kai $|a| < |b|$. **2.30.** $x \geqslant 0$. **2.31.** $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. **2.32.** $x = 0$. **2.33.** $x = 1$. **2.34.** $x < -1$. **2.35.** $-1 < x < 1$. **2.36.** $1 \leqslant x \leqslant 5$. **2.37.** $x \leqslant -2$, $x \geqslant 4$.

IV SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

4.1. **1.** 8. **2.** $3-i$ **3.** 0. **4.** $\frac{14}{5}i$.

4.2. **1.** 5, 12. **2.** 0,1. **3.** 0, 24. **4.** 2, -11. **5.** -2, $\frac{3}{2}$. **6.** 2, 0.

4.6. Lygiagretainio įstrižainių kvadratų suma lygi visų jo kraštinių kvadratų sumai.

4.7. **1.** Aibę, sudarytą iš visų taškų, esančių dešiniau menamosios ašies.

2. Aibę, sudarytą iš visų taškų, esančių tiesėje $y=1$ ir žemiau jos.

3. Aibę, sudarytą iš visų taškų, esančių tiesėse $x=0$, $x=1$ ir tarp šių tiesių.

4. Aibę tų taškų, kurie yra tarp tiesių $y=-1$ ir $y=1$.

5. Skritulį, kurio centras taške 0 ir spindulys lygus 1, įskaitant apskritimo taškus.

6. Skritulį, kurio centras taške $-2i$ ir spindulys lygus 4, išskyrus apskritimo taškus.

7. Aibę taškų, esančių apskritimo, kurio centras taške i ir spindulys 1, išorėje.

8. Žiedą tarp dviejų apskritimų, kurių bendras centras taške 1, o spinduliai lygūs 1 ir 2, išskyrus apskritimų taškus.

9. Tiesę, statmeną atkarpai, jungiančiai taškus $-i$ ir 1, bei einančią per jos vidurio tašką.

10. Aibę, sudarytą iš visų taškų, esančių kairiau menamosios ašies.

4.10. **1.** $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$. **2.** $2(\cos\pi+i\sin\pi)$. **3.** $\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$. **4.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. **5.** $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$. **6.** $\cos\frac{8\pi}{9}+i\sin\frac{8\pi}{9}$.

7. $125(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi)$; čia $\varphi=\pi-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. **8.** $1024(\cos 0+i\sin 0)$.

4.13. **1.** $z=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

2. $z=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}$ $(k=0,\ 1,\ 2)$.

3. $z=2\left(\cos\frac{k\pi}{3}+i\sin\frac{k\pi}{3}\right)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots\ 5)$.

4. $z=\cos\frac{(2k+1)\pi}{7}+i\sin\frac{(2k+1)\pi}{7}$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 6)$.

5. $z=\sqrt[16]{2}\left(\cos\frac{(8k+1)\pi}{32}+i\sin\frac{(8k+1)\pi}{32}\right)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ 7)$.

6. $z=\pm(2-i)$.

4.15. $z_k=z_0\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1)$.

4.16. **1.** $z_1=0$, $z_{2,3}=\pm 1$, $z_{4,5}=\pm i$. **2.** $z=\frac{3}{2}-2i$. **3.** $z=-1-i$. **4.** $z=1-i$. **5.** $z=(1-\sqrt{2})i$.

4.17. **1.** $z=1+i$. **2.** $z=\pm(1-i)$.

V SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

5.1. 100.

5.2. Bent vienas skaičių p, q nėra realusis skaičius.

5.3. Gali. Pavyzdys: $x^2-ix=0$. Jeigu žinotume, kad p ir q – realieji skaičiai, tai ne.

5.4. Kai p ir q – realieji skaičiai, tai antroji lygties šaknis lygi $1-i$; jeigu nereikalautume, kad p ir q būtų realieji skaičiai, tai antroji šaknis galėtų būti bet koks skaičius.

5.7. **1.** Ne. **2.** Taip. **5.8.** Ne.

5.9. Ne. Pavyzdys: $ix^2-3ix+2i$. Bet jeigu koeficientas prie x^2 būtų realusis skaičius, tai (esant tai pačiai uždavinio sąlygai) ir kiti du koeficientai irgi būtų realieji skaičiai.

5.10. Ne. Pavyzdys: ix^2+0x-i. Jeigu realusis koeficientas būtų nelygus nuliui, tai (esant tai pačiai uždavinio sąlygai) ir kiti du koeficientai irgi būtų realieji skaičiai.

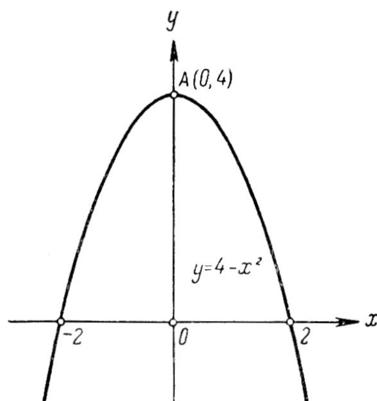
5.12. $r_1=1$, $r_2=-1$.

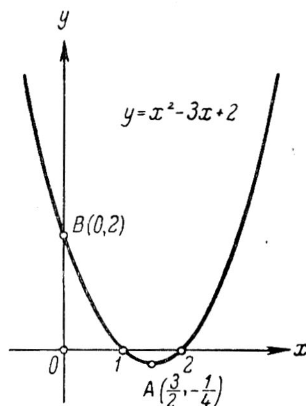
5.13. **1.** $\frac{1}{a^4}(b^4-4ab^2c+2a^2c^2)$. **2.** $\frac{1}{a^6}(b^2-2ac)(b^4-4ab^2c+a^2c^2)$.

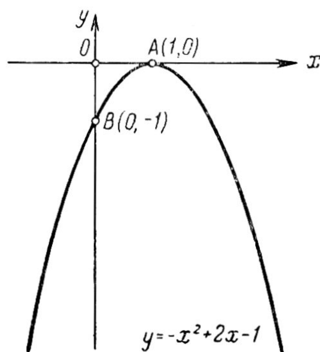
5.14. $p=-2$, $q=-1$; $p=1$, q – bet koks. **5.15.** $-\frac{100}{243}$. **5.16.** $x^2-58x+\frac{1}{8}=0$.

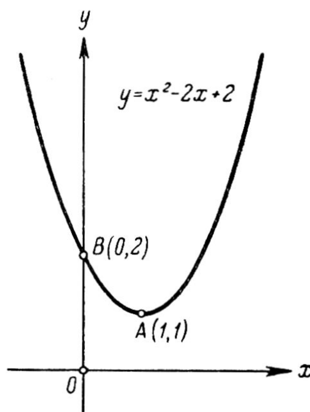
5.17. Žr. 113 pav.

5.18. a) $a<0$, $b<0$, $c>0$;
b) $a>0$, $b<0$, $c>0$;
c) $a>0$, $b>0$, $c=0$;
d) $a<0$, $b>0$, $c<0$.









113 pav.

5.20. Taip suformulavę uždavinio sąlygas, galime tvirtinti, kad visada egzistuoja, ir, be to, tik vienas, kvadratinis trinaris, kurio grafikas eina per taškus A, B, C.

Imdami konkrečius taškus A, B, C, kurie nurodyti sąlygoje, turime: **1.** $y=2x^2-2x-4$. **2.** $y=x^2-4x+3$. **3.** $y=-x^2-6x-5$.

5.21. Taip suformulavę uždavinio sąlygas, galime tvirtinti, kad visada egzistuoja, ir, be to, tik vienas, kvadratinis trinaris, kurio grafiko viršūnė yra taške A, o pats grafikas eina per tašką B.

Imdami konkrečius taškus A, B, kurie nurodyti sąlygoje, turime: **1.** $y=2x^2+1$. **2.** $y=-x^2+6x-8$. **3.** $y=-x^2+4x$.

5.22. **1.** $x<0$ ir $x>4$. **2.** Neturi sprendinių. **3.** $-4<x<1$. **4.** $x=1$. **5.** $x\neq\frac{1}{2}$. **5.23.** **1.** $0\leqslant x\leqslant 4$. **2.** $-1<x<1$. **5.24.** $r=1$. **5.25.** -9.

5.26. $x=-\dfrac{ab+cd}{a^2+c^2}$, $y_{\min}=\dfrac{(ad-bc)^2}{a^2+c^2}$. **5.27.** **1.** $r=1$, $r=-1$. **2.** $r=-2$.

5.28. **1.** $D=b^2-4ac\geqslant 0$, $ac>0$. **2.** $D\geqslant 0$, $ac<0$.

5.29. Abi šaknys yra teigiamos, kai $r\geqslant 4$; abi šaknys yra neigiamos, kai $-\frac{1}{2}<r\leqslant 0$; šaknys yra priešingų ženklų, kai $r<-\frac{1}{2}$; viena šaknų yra lygi nuliui, o kita yra neigiama, kai $r=-\frac{1}{2}$.

5.32. $-1<r<1$. **5.34.** $r<-3$ ir $1\leqslant r\leqslant\frac{3}{2}$. **5.35.** $r<-3$ ir $r\geqslant 1$.

5.36. $r<-2$. **5.37.** $p^2-4q\geqslant 0$, $-2\beta<p<-2\alpha$, $\alpha^2+\alpha p+q>0$, $\beta^2+\beta p+q>0$.

5.38. $r<-\frac{2}{3}$ ir $r\geqslant 3+2\sqrt{2}$.

5.40. Didžiausioji funkcijos reikšmė lygi $\frac{4}{3}$ $\left(\text{taške } x=-\frac{1}{2}\right)$, mažiausioji reikšmė lygi $\frac{1}{3}$ (taške $x=1$).

5.41. Didžiausioji funkcijos reikšmė lygi 110 (taške $x=3$), mažiausioji reikšmė lygi 2 (taške $x=0$).

5.42. Didžiausioji reikšmė lygi 3, mažiausioji reikšmė lygi $\frac{3}{4}$.

VI SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

6.1. -1. **6.3.** Ne. **6.4.** $x+2$. **6.5.** $-\frac{1}{3}x^2-\frac{1}{3}x+3$.

6.6. $x^{40}-x^{39}+x^{35}-x^{34}+x^{30}-x^{28}+x^{25}-x^{23}+x^{20}-x^{17}+x^{15}-x^{12}+x^{10}-x^{8}+x^{5}-x+1$.

6.7. $a=3$, $b=-4$. **6.8.** $x_2=1-\sqrt{3}$, $x_3=1+\sqrt{2}$, $x_4=1-\sqrt{2}$.

6.9. $x_2=1-\sqrt{2}$, $x_3=1$, $x_4=-1$, $x_5=-2$.

6.10. $x_1=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

6.11. $x_1=-1+i$, $x_2=-1-i$. **6.14.** $x_3=3$. **6.15.** -1. **6.19.** $4p^3+27q^2=0$.

6.20. Daugianario $A(x)$ šaknys yra skaičiai $-x_1, -x_2, \ldots, -x_n$, o daugianario $B(x)$ šaknys – skaičiai $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$.

6.22. x^3-1. **6.35.** Egzistuoja.

7.1. Apibrėžimo sritis: $]-\infty; -2[\cup]-2; -1[\cup]-1; +\infty[$, t.y. $x\neq-1$ ir $x\neq-2$; $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(1)=0$, $f(-3)=-2$.

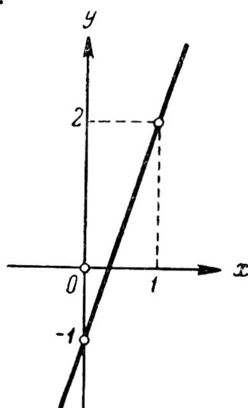
7.2. Apibrėžimo sritis: $[-2; 0]\cup[2; +\infty[$, t.y. $-2\leqslant x\leqslant 0$ arba $x\geqslant 2$; $f(-1)=\sqrt{3}$, $f(2)=0$, $f(3)=\sqrt{15}$.

7.3. Apibrėžimo sritis: $[-3; -1[\cup]-1; 3]$, t.y. $|x|\leqslant 3$ ir $x\neq-1$; $f(0)=3$, $f(1)=\sqrt{2}$, $f(-2)=-\sqrt{5}$.

7.4. Apibrėžimo sritis: $x\neq k\pi$ $(k=0, \pm1, \pm2\ldots)$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$, $f\left(\frac{7\pi}{2}\right)=1$.

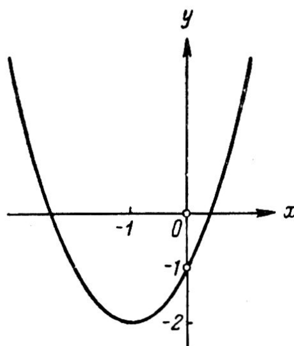
7.5. Apibrėžimo sritis: $x\neq\frac{1}{2}+k$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$; $f(0)=0$, $f(-1)=1$, $f(100)=100$.

7.6.



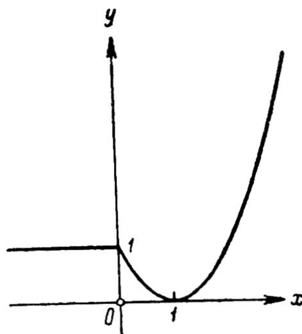
114 pav.

7.7.



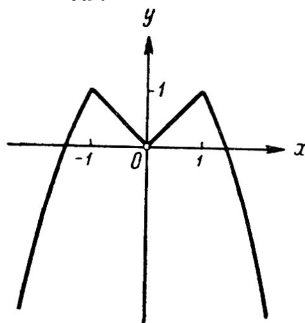
115 pav.

7.8.



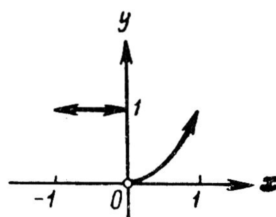
116 pav.

7.9.



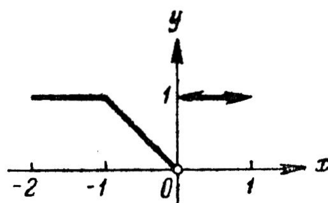
117 pav.

7.10.



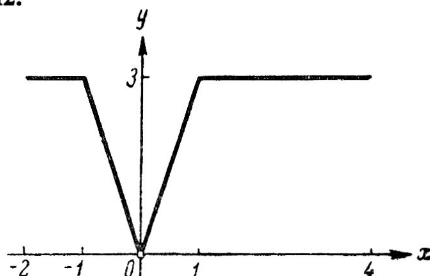
118 pav.

7.11.



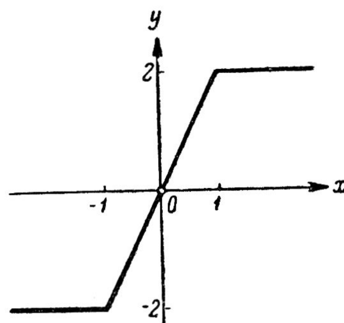
119 pav.

7.12.



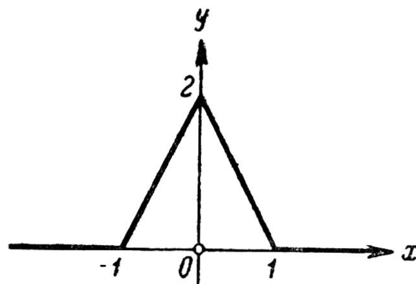
120 pav.

7.13.



121 pav.

7.14.



122 pav.

7.16. $y=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{kai } 0<x\leqslant 1, \\ 1, & \text{kai } x=0. \end{cases}$

7.17. Funkcijos $f_1(x)+f_2(x)$ ir $f_1(x)\,f_2(x)$ yra aprėžtos, funkcija $f_1(x)+f_3(x)$ — neaprėžta, o apie funkcijas $f_1(x)\,f_3(x)$, $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ir $\dfrac{f_1(x)}{f_3(x)}$ nieko tikro pasakyti negalima.

7.18. Mažėja visoje x ašyje.

7.19. Didėja visoje x ašyje.

7.20. Didėja atvirame intervale $]-\infty; -1[$, mažėja atvirame intervale $]-1; +\infty[$.

7.21. Mažėja atviruose intervaluose $]-\infty; -1[$ ir $]-1; +\infty[$.

7.22. Didėja atviruose intervaluose $]\pi+2k\pi; 2\pi+2k\pi[$, mažėja atviruose intervaluose $]2k\pi; \pi+2k\pi[$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7.23. Didėja atviruose intervaluose $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7.24. Didžiausioji reikšmė lygi 5 $\left(\text{taškuose } x=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}+2\pi k \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\right)$, mažiausioji reikšmė lygi -5 $\left(\text{taškuose } x=\operatorname{arctg}\frac{4}{3}-\frac{\pi}{2}+2\pi k \ (k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\right)$.

7.25. Didžiausioji reikšmė lygi $2+\sqrt{5}$, kai $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, mažiausioji reikšmė lygi $2-\sqrt{5}$, kai $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7.26. Didžiausioji reikšmė lygi 1, kai $x=\frac{\pi k}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, mažiausioji reikšmė lygi $\frac{1}{4}$, kai $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7.27. Didžiausioji reikšmė lygi 1, kai $x=\frac{\pi k}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, mažiausioji reikšmė lygi $\frac{1}{2}$, kai $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7.28. Didžiausioji reikšmė lygi $\frac{1}{2}$ (taške $x=1$).

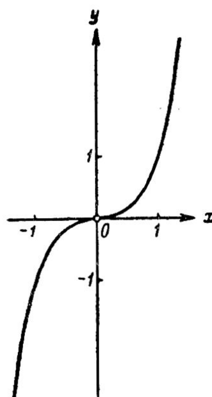
7.29. Didžiausioji reikšmė lygi $\frac{1}{3}$ (taške $x=1$).

7.30. Mažiausioji reikšmė lygi 2 (taške $x=1$).

7.31. Lyginė. **7.32.** Nelyginė. **7.33.** Nei lyginė, nei nelyginė. **7.34.** Lyginė. **7.35.** Nelyginė. **7.36.** Nei lyginė, nei nelyginė. **7.39.** π. **7.40.** 2π. **7.41.** π. **7.42.** 2π. **7.43.** π.

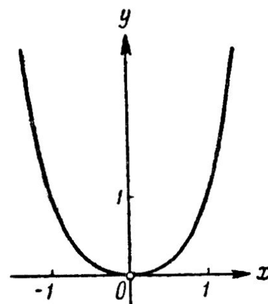
7.44. 6π. **7.46.** Periodinė; periodas lygus 2π. **7.47.** Neperiodinė. **7.48.** Periodinė; periodas lygus π.

7.49.



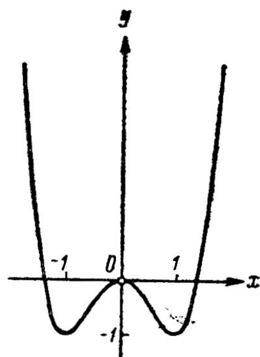
123 pav.

7.50.



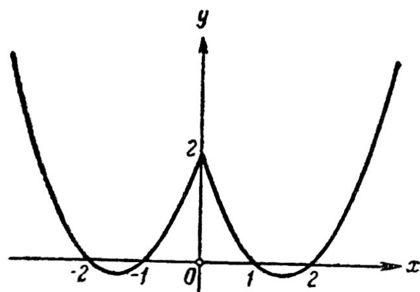
124 pav.

7.51.



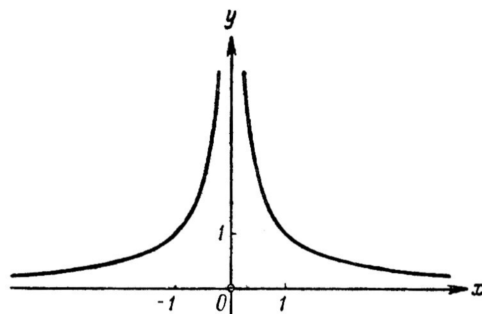
125 pav.

7.52.



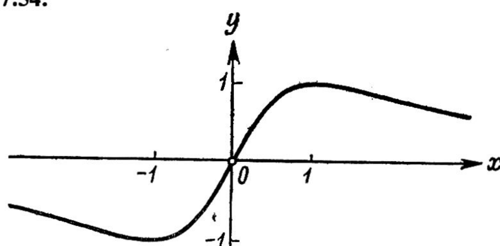
126 pav.

7.53.



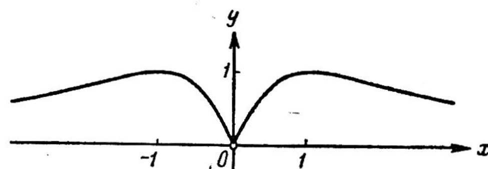
127 pav.

7.54.



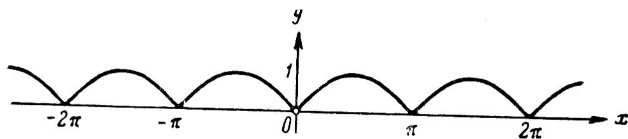
128 pav.

7.55.



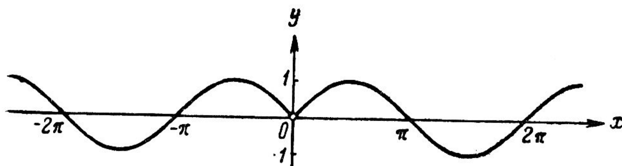
129 pav.

7.56.



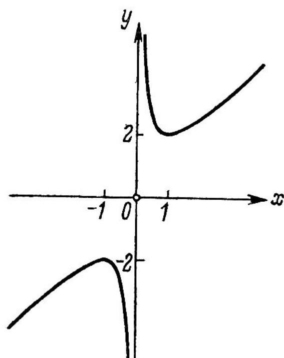
130 рав.

7.57.



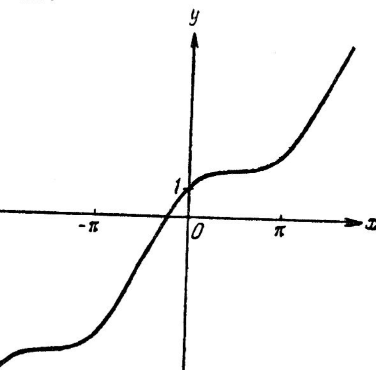
131 рав.

7.58.



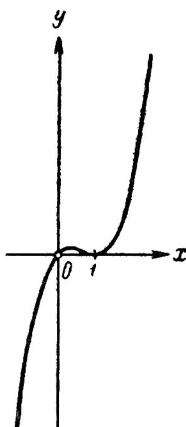
132 рав.

7.59.



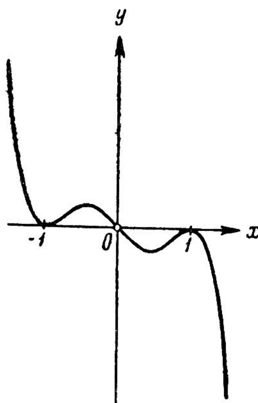
133 рав.

7.60.



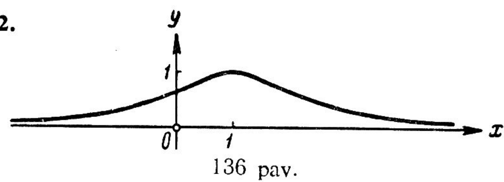
134 рав.

7.61.



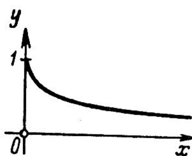
135 рав.

7.62.



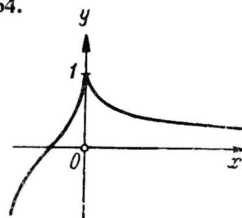
136 pav.

7.63.



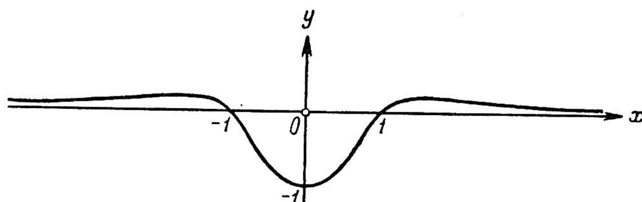
137 pav.

7.64.



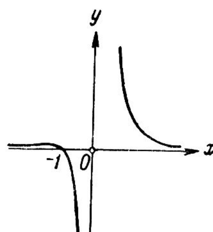
138 pav.

7.65.



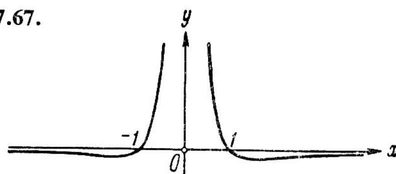
139 pav.

7.66.



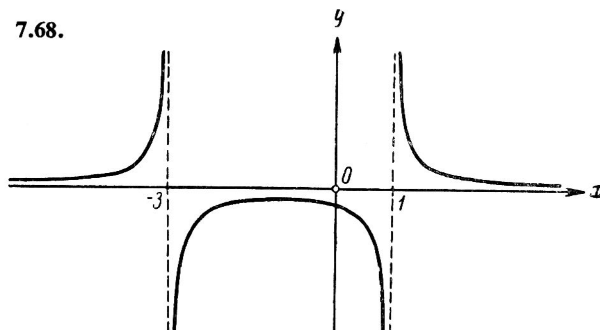
140 pav.

7.67.



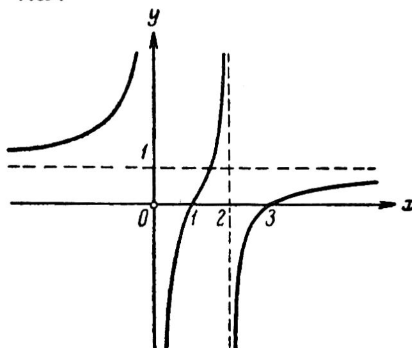
141 pav.

7.68.



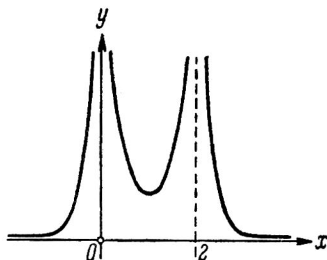
142 pav.

7.69.



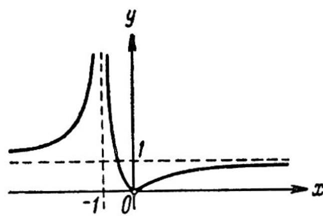
143 pav.

7.70.



144 pav.

7.71.



145 pav.

7.72. $\dfrac{|t|}{\sqrt{t-1}}$. **7.73.** $\dfrac{|t^2-t|}{2t^2-2t+1}$, $t\neq 1$.

7.74. $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, $x\neq 0$. **7.75.** $|x|$. **7.76.** $\dfrac{\sin^2 x}{|\cos x|}$.

7.77. $f(x)=\dfrac{x+4}{3x-2}$, kai $x\neq \dfrac{2}{3}$, 3. **7.78.** $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{(x-1)^2}$, kai $x\neq 1$.

7.80. $f(x)=\dfrac{1}{6}(x^2-1)$, $g(x)=-\dfrac{1}{3}(2x^2+3x+1)$.

7.81. $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{1-x}$, $g(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-1}$, $x\neq 1$.

7.82. $f(x)=-2$, $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$, $x\neq 1, 2$.

7.83. $f(x)=\dfrac{1}{2}(7x+12)$, $g(x)=-\dfrac{1}{4}(3x+7)$.

7.84. $f(x)=\dfrac{x^2-2x-19}{2(x-7)}$, $x\neq 7$; $g(x)=\dfrac{2(x-4)}{10-x}$, $x\neq 10$.

7.85. $f(x)=x-1$, $x\neq 0$, 2; $g(x)=2$, $x\neq 1$, 5.

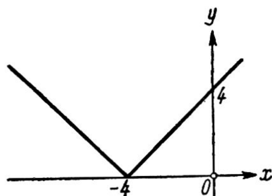
7.86. $f(x)=x$, $x\neq 1$; $g(x)=1+x$, $x\neq 0$. **7.87.** $f(x)=\dfrac{2-x^2}{3x}$, kai $x\neq 0$.

7.88. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, kai $x\neq 0$, 1. **7.89.** $f(x)=\dfrac{4x-2}{x-1}$, kai $x\neq \dfrac{1}{2}$, 1,

7.90. $f(x)=\frac{1}{x}$, kai $x\neq -2,\ 0,\ \frac{1}{3}$. **7.91.** $y=\sqrt[3]{x}$. **7.92.** $y=\frac{1}{x-1}$.

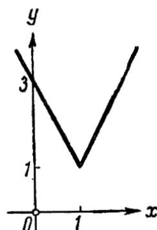
7.93. $y=\frac{ax+b}{cx-a}$. **7.94.** $y=x^4$, kai $x\geqslant 0$.

7.95.



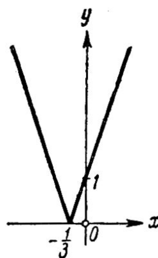
146 pav.

7.96.



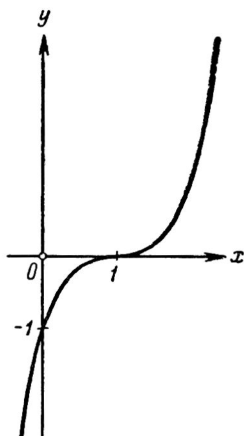
147 pav.

7.97.



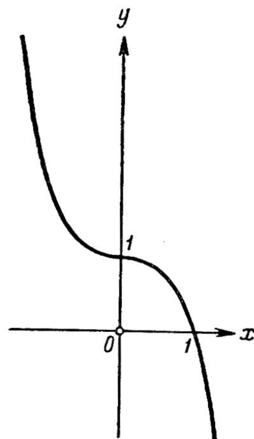
148 pav.

7.98.



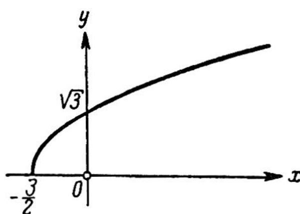
149 pav.

7.99.



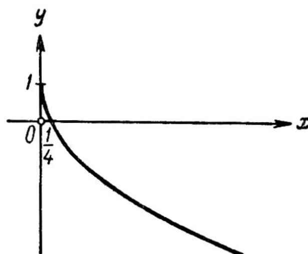
150 pav.

7.100.



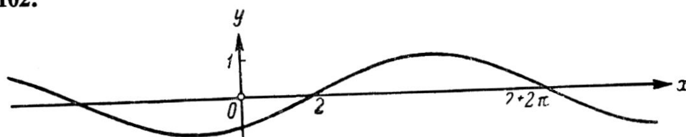
151 pav.

7.101.



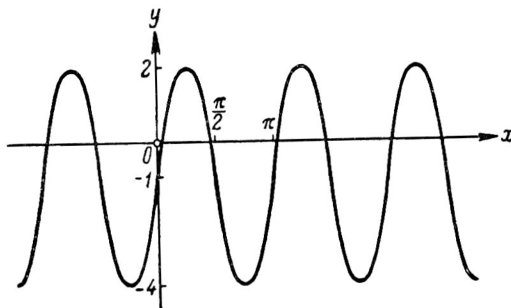
152 pav.

7.102.



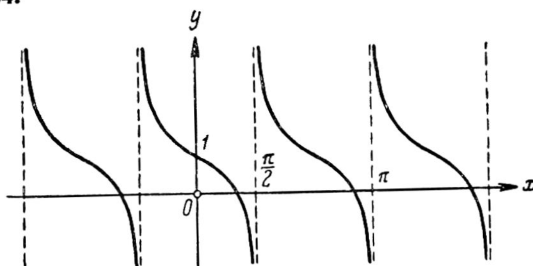
153 pav.

7.103.



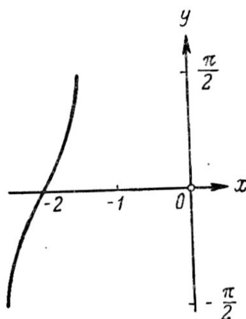
154 pav.

7.104.



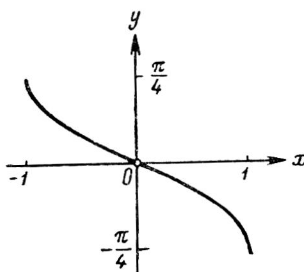
155 pav,

7.105.



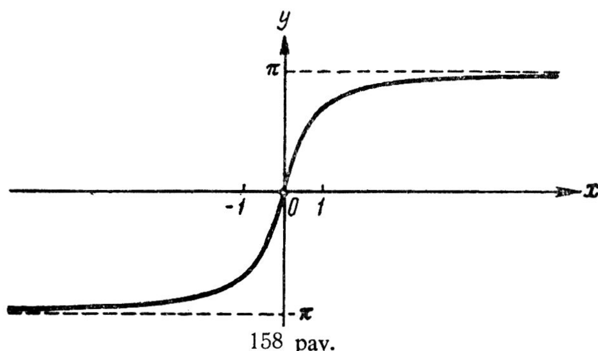
156 pav.

7.106.



157 pav.

7.107.



158 pav.

7.108. Dvi.
7.109. Tris.
7.110. Lygtis turi be galo daug šaknų.
7.111. Šešiasdešimt tris.
7.112. $x_1=-1$, $x_2=3$.
7.113. $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=4$. **7.114.** $x=\frac{1}{3}$.
7.115. $x\approx 2{,}875$. **7.116.** $x_1=0$, $x_2\approx 2{,}625$.
7.117. $-3<x<3$. **7.118.** $0<x<1$.
7.119. $1<x<2$ ir $3<x<4$.
7.120. $x<-2$, $-1<x<0$ ir $x>1$.

VIII SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

8.1. **1.** 2; **2.** $-\frac{1}{2}$; **3.** 2; **4.** -2; **5.** $\frac{2}{3}$; **6.** $\frac{4}{3}$.

8.2. **1.** $\frac{1}{3}$; **2.** $\frac{1}{12}$; **3.** -7; **4.** $\frac{2}{3}$. **8.3.** **1.** 100; **2.** 9; **3.** $\frac{1}{7}$; **4.** 4.

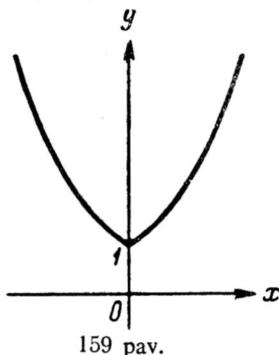
8.4. **1.** 9; **2.** $2\sqrt{2}$; **3.** 16; **4.** 9. **8.5.** **1.** 2; **2.** 16; **3.** 1; **4.** 25.

8.6. **1.** $\log_3 5>0$; **2.** $\log_5 2>0$; **3.** $\log_{0,2} 0{,}8>0$; **4.** $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{7}<0$.

8.7. **1.** $\log_3 4>\log_4 \frac{1}{3}$; **2.** $\log_{0,1} \sqrt{2}<\log_{0,2} 0{,}34$; **3.** $\log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{5}>\log_{\frac{5}{2}} \frac{3}{4}$;
4. $2^{\log_3 3}>1>3^{\log_5 \frac{1}{2}}$.

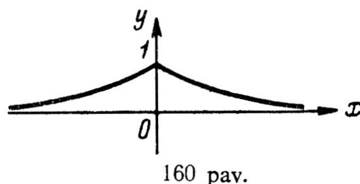
8.11. $\frac{5}{2(a-1)}$. **8.12.** $\frac{4}{2b-a}$.

8.18.



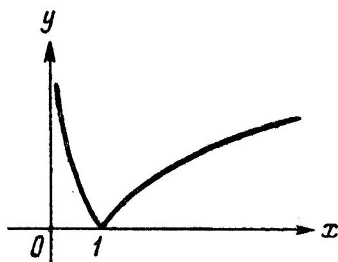
159 pav.

8.19.



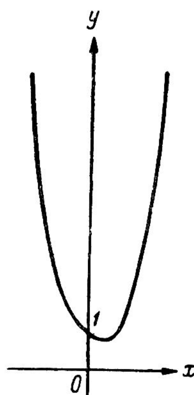
160 pav.

8.20.



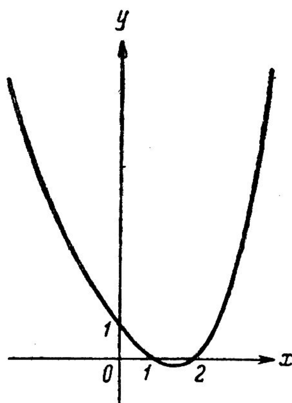
161 pav.

8.21.



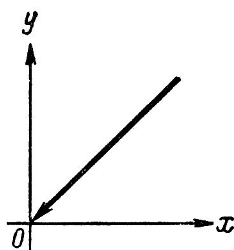
162 pav.

8.22.



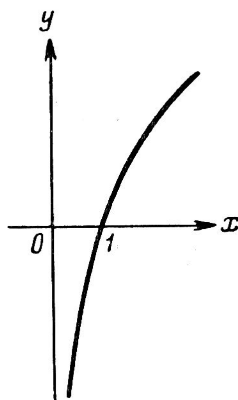
163 pav.

8.23.



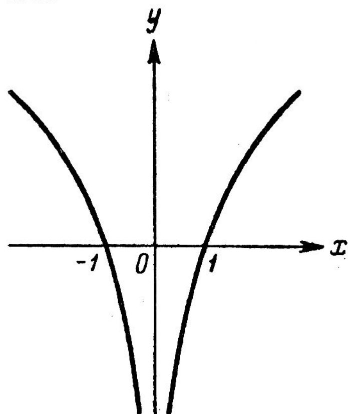
164 pav.

8.24.



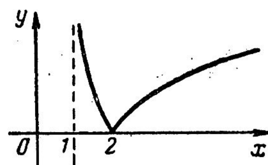
165 pav.

8.25.



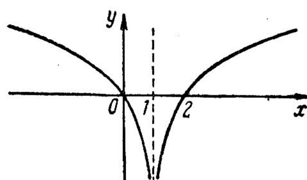
166 pav.

8.26.



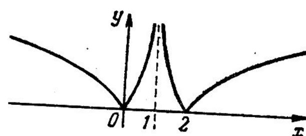
167 pav.

8.27.



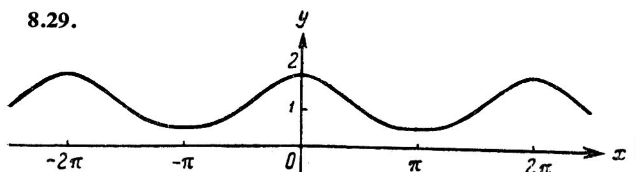
168 pav.

8.28.



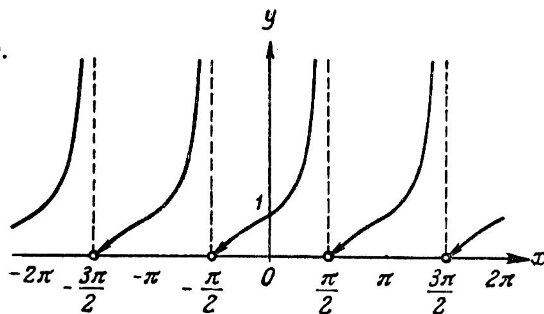
169 pav.

8.29.



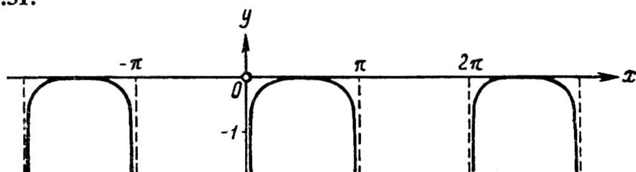
170 pav.

8.30.



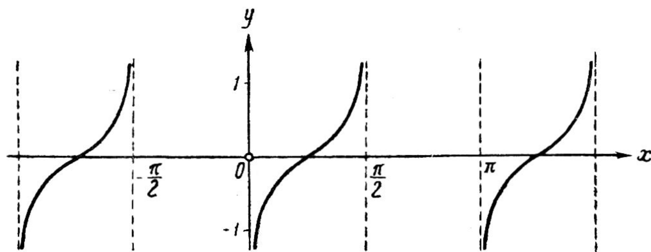
171 pav.

8.31.



172 pav.

8.32.



173 pav.

IX SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

9.1. Taip.

9.2. a) Taip.

b) Padauginę abi klaidingos lygybės puses iš skaičiaus, nelygaus nuliui, gauname klaidingą lygybę. Jeigu abi klaidingos lygybės puses padaugintume iš nulio, gautume teisingą lygybę.

c) Kai n — nelyginis skaičius, tai, pakėlę abi neteisingos lygybės puses n-tuoju laipsniu, gauname neteisingą lygybę. Kai n — lyginis skaičius, tai iš neteisingos lygybės $a=-a$ (čia $a \neq 0$) gauname teisingą lygybę, o iš bet kokios kitos neteisingos lygybės vėl gauname neteisingą lygybę. (Tariame, kad abiejose lygybės pusėse yra realieji skaičiai.)

9.3. Taip.

9.8. a) Lygtys $f(x)=g(x)$ ir $\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{g(x)}$ paprastai esti neekvivalenčios, pirmoji lygtis yra antrosios išvada. Kai bent viena funkcijų $f(x)$, $g(x)$ aibėje M nelygi nuliui, tai šioje aibėje lygtys būna ekvivalenčios.

b) Lygtys $f(x)=g(x)$ ir $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ paprastai esti neekvivalenčios, pirmoji lygtis yra antrosios išvada. Kai bent viena funkcijų $f(x)$, $g(x)$ aibėje M įgyja neneigiamas reikšmes, tai šioje aibėje lygtys esti ekvivalenčios.

c) Lygtys $f(x)=g(x)$ ir $\sin f(x)=\sin g(x)$ yra neekvivalenčios, antroji lygtis yra pirmosios išvada.

d) Lygtys $f(x)=g(x)$ ir $\arcsin f(x)=\arcsin g(x)$ esti neekvivalenčios, pirmoji lygtis yra antrosios išvada. Kai bent vienos funkcijų $f(x)$, $g(x)$ visos reikšmės, kurias ji įgyja aibėje M, priklauso atkarpai $[-1; 1]$, tai aibėje M lygtys esti ekvivalenčios.

e) Lygtys $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ ir $f(x)g_1(x)=f_1(x)g(x)$ paprastai esti neekvivalenčios, antroji lygtis yra pirmosios išvada. Jeigu aibėje M funkcijos $g(x)$ ir $g_1(x)$ nelygios nuliui, tai šioje aibėje lygtys esti ekvivalenčios.

f) Lygtys $\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)}=\varphi(x)$ ir $\sqrt{f(x)g(x)}=\varphi(x)$ paprastai esti neekvivalenčios, antroji lygtis yra pirmosios išvada. Jeigu aibėje M funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ įgyja neneigiamas reikšmes, tai šioje aibėje lygtys būna ekvivalenčios.

9.12. a) $x_1=1$, $x_2=3$, $x_3=-1$. b) $x_1=\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$, $x_2=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$, $x_3=\frac{-5+i\sqrt{3}}{2}$, $x_4=\frac{-5-i\sqrt{3}}{2}$.

9.13. $x=18$. **9.14.** $x=8$. **9.15.** $x=20$. **9.16.** $x_1=2$, $x_2=-\frac{7}{2}$.

9.17. $x_1=0$, $x_2=2$. **9.18.** $x=\frac{12}{5}$. **9.19.** $x=\frac{63}{13}$. **9.20.** $x=-1$.

9.21. $2\leqslant x\leqslant 7$. **9.22.** $x_1=3$, $x_2=178$. **9.23.** $x=-1$. **9.24.** $x_1=2$, $x_2=\frac{1}{2}$.

9.25. $x=9$. **9.26.** $x=2$. **9.27.** $x=2$. **9.28.** $x_1=2$, $x_2=-3$. **9.29.** $x=\frac{1}{2}$.

9.30. $x=1$. **9.31.** $x=2$. **9.32.** $x_1=0$, $x_2=1$. **9.33.** $x=-1$. **9.34.** $x=2$.

9.35. $x_1=3$, $x_2=-3$. **9.36.** $x=0$. **9.37.** $x_1=0$, $x_2=1$. **9.38.** $x_1=1$, $x_2=-1$.

9.39. $x_1=1$, $x_2=n^{\frac{n}{n-1}}$, kai $n>1$; x – bet koks teigiamas skaičius, kai $n=1$.

9.40. $x_1=1$, $x_2=n^{\frac{1}{1-n}}$, kai $n>1$; x – bet koks teigiamas skaičius, kai $n=1$.

9.41. $x_1=1$, $x_2=n^{\frac{n}{1-n}}$, kai $n>1$; x – bet koks teigiamas skaičius, kai $n=1$.

9.42. $x=512$. **9.43.** $x_1=9$, $x_2=91$. **9.44.** $x_1=-1$, $x_2=-32$.

9.45. $x_1=9$, $x_2=\frac{1}{9}$. **9.46.** $x_1=4$, $x_2=4\sqrt[3]{4}$. **9.47.** $x_1=\frac{1}{\sqrt{a}}$, $x_2=\frac{1}{a_2}$.

9.48. $k=4$, taip pat bet koks $k<0$.

9.49. Kai $a=0$ ir $a=-1$, lygtis neturi sprendinių. Kai $a<-1$, turi vieną sprendinį $x=a^2$; kai $a>0$, turi vieną sprendinį $x=(a+1)^2$; kai $a=-\frac{1}{2}$, turi vieną sprendinį $x=\frac{1}{4}$; kai $-1<a<0$, $a\neq-\frac{1}{2}$, turi du sprendinius $x_1=a^2$ ir $x_2=(a+1)^2$.

9.50. $x=4$. **9.51.** $x=2$. **9.52.** $x_1=0$, $x_2=-1$.

9.53. $x=0$. **9.54.** $x=2$. **9.55.** $x_1=100$, $x_2=0{,}1$.

X SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

10.9. (3; 2). **10.10.** (2; -1), (1; -2).

10.11. (2; 3), (3; 2), (-2; -3), (-3; -2).

10.12. (2; 1), (-2; -1), $\left(-\frac{5}{\sqrt{3}};\ \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{5}{\sqrt{3}};\ -\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$.

10.13. (3; 5), (-3; -5), $\left(36;\ -\frac{23}{2}\right)$, $\left(-36;\ \frac{23}{2}\right)$.

10.14. (2; 1), $\left(-1+i\sqrt{3};\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-1-i\sqrt{3};\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$.

10.15. (1; 2), (2; 1), $(-2+i\sqrt{5};\ -2-i\sqrt{5})$, $(-2-i\sqrt{5};\ -2+i\sqrt{5})$.

10.16. (4; 2), (2; 4).

10.17. (-1; -2), (-2; -1), $(-1+i\sqrt{2};\ -1-i\sqrt{2})$, $(-1-i\sqrt{2};\ -1+i\sqrt{2})$.

10.18. (-2; 3), (3; -2).

10.19. (1; 3), (-1; -3), (i; $-3i$), ($-i$; $3i$), (3; 1), (-3; -1), ($3i$; $-i$), ($-3i$; i).

10.20. $x_1=13$, $x_2=78$.

10.22. $(2;\ 1)$, $\left(-1+i\sqrt{3};\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-1-i\sqrt{3};\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}};\ 2\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right);\ \sqrt[3]{\frac{3}{2}}(-1-i\sqrt{3})\right)$, $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right);\ \sqrt[3]{\frac{3}{2}}(-1+i\sqrt{3})\right)$.

10.23. $(2;\ 3)$, $(-3;\ -2)$, $\left(\frac{1+i\sqrt{23}}{2};\ \frac{-1+i\sqrt{23}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-i\sqrt{23}}{2};\ \frac{-1-i\sqrt{23}}{2}\right)$.

10.24. $(-4;\ -5)$, $(-5;\ -4)$, $(-1+2\sqrt{3};\ -1+2\sqrt{3})$, $(-1-2\sqrt{3};\ -1-2\sqrt{3})$, $(4+\sqrt{13};\ 4-\sqrt{13})$, $(4-\sqrt{13};\ 4+\sqrt{13})$.

10.25. $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $(1+i\sqrt{2};\ 1-i\sqrt{2})$, $(1-i\sqrt{2};\ 1+i\sqrt{2})$.

10.26. $(2;\ 1)$, $(1;\ 2)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{\frac{11}{3}}}{2};\ \frac{-1-\sqrt{\frac{11}{3}}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{\frac{11}{3}}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{\frac{11}{3}}}{2}\right)$.

10.27. $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$. $\left(\frac{3+i\sqrt{19}}{2};\ \frac{3-i\sqrt{19}}{2}\right)$, $\left(\frac{3-i\sqrt{19}}{2};\ \frac{3+i\sqrt{19}}{2}\right)$.

10.28. $(0;\ 0)$, $(6;\ 3)$, $(3;\ 6)$, $(-2;\ 1)$, $(1;\ -2)$. **10.29.** $(0;\ 0)$, $(1;\ 1)$.

10.30. $(3;\ 2)$, $(-2;\ -3)$. **10.31.** $(2;\ 3)$, $(-2;\ 3)$.

10.32. $\left(3\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right);\ 2\left(\cos\frac{2k\pi}{5}+i\sin\frac{2k\pi}{5}\right)\right)$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

10.33. $(0;\ 0)$. $(7;\ 7)$, $\left(\frac{-1+i\sqrt{15}}{2};\ \frac{-1-i\sqrt{15}}{2}\right)$, $\left(\frac{-1-i\sqrt{15}}{2};\ \frac{-1+i\sqrt{15}}{2}\right)$.

10.34. $(0;\ 0)$, $(\sqrt{11};\ \sqrt{11})$, $(-\sqrt{11};\ -\sqrt{11})$, $(3;\ -3)$; $(-3;\ 3)$, $(\sqrt{2}+\sqrt{3};\ \sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}+\sqrt{3};\ -\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(\sqrt{2}-\sqrt{3};\ \sqrt{2}+\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}-\sqrt{3};\ -\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

10.35. $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $\left(\frac{9}{\sqrt{67}};\ \sqrt{67}\right)$, $\left(-\frac{9}{\sqrt{67}};\ -\sqrt{67}\right)$.

10.36. $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$, $\left(i\sqrt{209};\ -\frac{9i}{\sqrt{209}}\right)$, $\left(-i\sqrt{209};\ \frac{9i}{\sqrt{209}}\right)$.

10.37. $(0;\ 0)$, $(1;\ 2)$, $(2;\ 1)$, $\left(\frac{-3+i\sqrt{15}}{6};\ \frac{-3-i\sqrt{15}}{6}\right)$, $\left(\frac{-3-i\sqrt{15}}{6};\ \frac{-3+i\sqrt{15}}{6}\right)$.

10.38. $(4;\ 3)$, $(3;\ 4)$. **10.39.** $(0;\ 0)$, $(2;\ 1)$, $(-2;\ -1)$, $(1;\ 2)$, $(-1;\ -2)$.

10.40. $(3;\ 1)$, $\left(\frac{1}{3};\ -1\right)$. **10.41.** $(0;\ 2)$, $(0;\ -2)$, $(1;\ -3)$, $(-1;\ 3)$.

10.42. $(2;\ -1)$, $(-1,\ 2)$.

10.43. $\left(2+2\sqrt{3};\ 1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(2-2\sqrt{3};\ 1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

10.44. $\left(\frac{14}{5};\ -\frac{8}{5}\right)$, $\left(\frac{2}{5};\ -\frac{14}{5}\right)$, $\left(\frac{6}{5};\ \frac{8}{5}\right)$, $\left(-\frac{6}{5};\ \frac{2}{5}\right)$. **10.45.** $-1<a<1$.

10.46. Kai $m=n=1$, sistemos sprendiniai turi išraišką $x=\cos\alpha$, $y=\sin\alpha$; čia α – bet koks realusis skaičius. Kitais atvejais sistema turi keturis sprendinius: (1; 0), (0; 1), (−1; 0), (0; −1).

10.47. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

10.48. (2; 3; 1), (−2; −3; −1).

10.49. (0; 0; 0), (3; 2; 1), (−3; −2; 1), (3; −2; −1), (−3; 2; −1).

10.50. (0; 0; 0), (1; 3; 2), (1; −3; −2), (1; $3i$; $-2i$), (1; $-3i$; $2i$), (i; 3; $-2i$), (i; $3i$; −2), (i; −3; $2i$), (i; $-3i$; 2), (−1; 3; −2), (−1; $3i$; $2i$), (−1; −3; 2), (−1; $-3i$; $-2i$), ($-i$, 3; $2i$), ($-i$; $3i$; 2), ($-i$; −3; $-2i$), ($-i$; $-3i$; −2).

10.51. (3; 4; 5), (−3; −4; −5). **10.52.** (1; 2; 4), (−1, −2; −4).

10.53. (1; 2; 3), (−1; −2; −3).

10.54. (1; −1; 3), $\left(-\frac{2}{3};\ \frac{2}{3};\ -2\right)$.

10.55. (0; 1; −1), (3; 4; 5), $\left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{2};\ 2\right)$.

10.56. $\left(\frac{1}{5};\ \frac{5}{4};\ -\frac{1}{2}\right)$, (2; −1; 4). **10.57.** (−2; 3; 1).

10.58. (3; 2; 1), (−3; −2; 1), (3; −2; −1), (−3; 2; −1).

10.59. $\left(\frac{15}{8};\ \frac{15}{8};\ \frac{4}{15}\right)$, $\left(-\frac{37}{72};\ -\frac{37}{8};\ \frac{12}{37}\right)$.

10.60. $\left(\frac{7}{6};\ 1;\ \frac{5}{6}\right)$, $\left(-\frac{7}{6};\ -1;\ -\frac{5}{6}\right)$.

10.61. (1; 2; −2). (2; 1; −2), (−2; 1; 2), (1; −2; 2), (2; −2; 1), (−2; 2; 1).

10.62. (1; 2; −1), (1; −1; 2), (−1; 1; 2), (−1; 2; 1), (2; 1; −1), (2; −1; 1).

10.63. (3; 2; −1), (3; −1; 2), $\left(1;\ \frac{3+\sqrt{17}}{2};\ \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(1;\ \frac{3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

10.64. (0; 0; 0), (3; 2; 1).

10.65. (1; 2; 3), (2; 1; 3), (3; 1; 2), (3; 2; 1), (1; 3; 2), (2; 3; 1).

10.66. Kai $a=0$ ir $a=\frac{1}{2}$, sistema neturi sprendinių, su visomis kitomis a reikšmėmis turi tik vieną sprendinį $\left(\frac{2a^2}{2a-1};\ 2a^2;\ 2a^2\right)$.

10.67. (−5; −3; 0), (3; 1; −2).

10.68. (0; 0; 0), (2; 3; 4), (−2; −3; −4).

10.69. (3; 4; 1), (−3; −4; −1).

10.70. (4; 3; 1), $\left(\frac{32}{3};\ -\frac{1}{3};\ -\frac{7}{3}\right)$, $\left(\frac{32}{3};\ -\frac{31}{3};\ \frac{23}{3}\right)$, $\left(\frac{52}{3};\ -\frac{41}{3};\ \frac{13}{3}\right)$.

10.71. (3; 3; 4), (12; 3; 1).

10.72. $\left(-1;\ -\frac{1}{3};\ \frac{1}{6}\right)$, $\left(1;\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{6}\right)$, $\left(1;\ -1;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;\ 1;\ -\frac{1}{2}\right)$.

10.73. (2; 3; 4), (3; 2; 4).

10.74. (2; −5; 3), (−2; 5; −3), (5; −2; −3), (−5; 2; 3).

10.75. (1; 2; 3). **10.76.** (0; 0; 0), (2; −1; 3), (−1; 2; 3).

10.77. (a; $2a$; $3a$); čia a – bet koks skaičius.

10.78. $(0;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 1)$, $(1;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4}\right)$.

10.79. $(0;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 1)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(1;\ 0;\ 0)$, $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{9}\right)$, $\left(-\frac{5}{9};\ -\frac{5}{9};\ \frac{4}{9}\right)$, $\left(-\frac{5}{9};\ \frac{4}{9};\ -\frac{5}{9}\right)$, $\left(\frac{4}{9};\ -\frac{5}{9};\ -\frac{5}{9}\right)$.

10.80. $(0;\ 0;\ 0)$, $(2;\ 2;\ 0)$, $(4;\ 0;\ 4)$, $(0;\ 6;\ 6)$, $\left(\frac{7}{3};\ \frac{5}{2};\ -1\right)$.

10.81. $(0;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 3)$, $(0;\ 2;\ 0)$, $(1;\ 0;\ 0)$, $\left(\frac{35}{24};\ -\frac{7}{24};\ -\frac{5}{24}\right)$.

10.82. $\left(-3;\ -\frac{5}{3};\ 1\right)$, $\left(-3;\ \frac{5}{3};\ -1\right)$, $\left(-\frac{5}{4};\ -\frac{12\sqrt{2}}{5};\ 2\sqrt{2}\right)$, $\left(-\frac{5}{4};\ \frac{12\sqrt{2}}{5};\ -2\sqrt{2}\right)$.

10.83. $(-2;\ -4;\ 1)$, $\left(\frac{2}{3}\sqrt[3]{9};\ \frac{4}{3}\sqrt[3]{9};\ \sqrt[3]{9}\right)$.

10.84. $3d+a^3+b^3+c^3$.

10.85. $(0;0;0)$, $(1;2;5)$, $(1;-2;-5)$, $(-1;2;-5)$, $(-1;-2;5)$.

10.86. **1.** $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$; čia a, b, c — bet kokie skaičiai.

2. $\left(1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(-1;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(1;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-1;\ \frac{1}{2};\ -\frac{1}{3}\right)$.

10.87. $\left(\frac{1+i}{2};\ \frac{1+i}{2};\ -2(1+i)\right)$, $\left(\frac{-1+i}{2};\ \frac{-1+i}{2};\ 2(1-i)\right)$, $\left(-\frac{1+i}{2};\ -\frac{1+i}{2};\ 2(1+i)\right)$, $\left(\frac{1-i}{2};\ \frac{1-i}{2};\ 2(i-1)\right)$.

10.88. 1. $(a;0;0)$, $(0;b;0)$, $(0;0;c)$; čia a, b, c — bet kokie skaičiai.
2. $(2;1;-1)$, $(2;-1;1)$, $(-2;1;1)$, $(-2;-1;-1)$.

10.89. $(1;3;1)$, $(-1;-3;1)$, $(-1;3;-1)$, $(1;-3;-1)$.

10.90. $(1;1;-2)$, $(-1;-1;2)$, $(1;-2;1)$, $(-1;2;-1)$, $(-2;1;1)$, $(2;-1;-1)$.

10.91. $(2;\ \sqrt[3]{3};\ \sqrt[3]{9})$, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\ -\sqrt[3]{\frac{9}{2}};\ \sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right)$.

10.92. $(2;\ 1;\ 0)$, $(-2;\ -1;\ 0)$.

10.93. $(1;\ 0;\ 1)$, $(-1;\ 0;\ -1)$, $\left(\frac{1}{3};\ \frac{4}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3};\ -\frac{4}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$.

10.94. $(7;\ 7;\ -1)$, $(-7;\ -7;\ 1)$, $(3\sqrt{2};\ 3\sqrt{2};\ 4\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2};\ -3\sqrt{2};\ -4\sqrt{2})$, $\left(\frac{\sqrt{46}+\sqrt{30}}{2};\ \frac{\sqrt{46}-\sqrt{30}}{2};\ \sqrt{46}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{46}-\sqrt{30}}{2};\ \frac{\sqrt{46}+\sqrt{30}}{2};\ \sqrt{46}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{46}+\sqrt{30}}{2};\ \frac{-\sqrt{46}-\sqrt{30}}{2};\ -\sqrt{46}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{46}-\sqrt{30}}{2};\ \frac{-\sqrt{46}+\sqrt{30}}{2};\ -\sqrt{46}\right)$.

10.95. $(1;\ 2;\ -1)$, $(-1;\ -2;\ 1)$.

10.96. $(1;\ 2;\ -1)$, $(-1;\ -2;\ 1)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{7}};\ \frac{5}{\sqrt{7}};\ -\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$, $\left(-\frac{3}{\sqrt{7}},\ -\frac{5}{\sqrt{7}};\ \frac{1}{\sqrt{7}}\right)$.

10.97. $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1;\ 3\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 3;\ 1\right)$.

10.98. $\left(3;\ 3;\ 3;\ -\frac{3}{2}\right)$, $\left(-3;\ -3;\ -3;\ \frac{3}{2}\right)$.

10.99. $x_k=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

10.100. Kai n – nelyginis skaičius, tai $x_1=x_2=\ldots x_n=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$.

Kai n – lyginis skaičius, tai $x_1=x_3=\ldots=x_{n-1}=a$ $x_2=x_4=\ldots=x_n=$ $=\frac{a+2}{3a-1}$; čia a – bet koks skaičius, nelygus $\frac{1}{3}$.

10.101. (8; 1), (1; 8). **10.102.** (1; 1).

10.103. (15; 1), (–15; –1) (–15a; 16a), (15a; –16a); čia $a=\sqrt{\frac{226}{481}}$.

10.104. $\left(\frac{5}{3};\ \frac{9+\sqrt{21}}{6}\right)$, $\left(\frac{5}{3};\ \frac{9-\sqrt{21}}{6}\right)$. **10.105.** (0; –1).

10.106. $(-2\sqrt{2}+\sqrt{3};\ -2\sqrt{2}-\sqrt{3})$, $(2\sqrt{2}-\sqrt{3};\ 2\sqrt{2}+\sqrt{3})$, $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\ -\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\ \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$.

10.107. (0; 1). **10.108.** (4; 2). **10.109.** $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{6}\right)$, $\left(\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right)$. **10.110.** (3; 2).

10.111. (2; 1). **10.112.** (2; 2), $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\ -8\right)$. **10.113.** (1; 1), (9; 3).

10.114. $\left(1;\ 1;\ \frac{4}{9}\right)$, $\left(256;\ 16;\ \frac{4}{3}\right)$. **10.115.** (2; 1). **10.116.** (1; –1).

10.117. (100; 10), $\left(\frac{1}{10};\ \frac{1}{100}\right)$. **10.118.** (6; 2). **10.119.** $\left(\frac{5}{4};\ -1\right)$.

10.120. (3; 1). **10.121.** (3; 1), $\left(\frac{3}{8};\ -\frac{1}{8}\right)$.

10.122. $\left(\frac{7}{2};\ \frac{17}{5}\right)$, $\left(-\frac{7}{5};\ -\frac{32}{5}\right)$. **10.123.** (2; 1), (4; 2).

10.124. (3; –1), $\left(\frac{21}{4};\ \frac{5}{4}\right)$. **10.125.** $\left(27;\ \frac{1}{27}\right)$.

10.126. $(8;\ \sqrt{27})$, $(27;\ \sqrt{8})$.

10.127. (4; 2), (–2; –4), $(2+\sqrt{6};\ -2+\sqrt{6})$, $(2-\sqrt{6};\ -2-\sqrt{6})$.

10.128. (6; 6). **10.129.** (2; 2). **10.130.** $\left(4;\ \frac{1}{4}\right)$. **10.131.** $\left(64;\ \frac{1}{4}\right)$.

10.132. (81; 16). **10.133.** (2; 4), $(\sqrt{2};\ 16)$.

10.134. (1; 2), $(-\sqrt{5};\ 0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$. **10.135.** (2; 32), (32; 2).

10.136. $(3;\ \sqrt{3})$, $(\sqrt{3};\ 3)$. **10.137.** (2; 2). **10.138.** $(9;\ \sqrt[3]{9})$, $(\sqrt[3]{9};\ 9)$.

10.139. (16; 4). **10.140.** $(a^2;\ a)$, $(a^6;\ a^3)$. **10.141.** $(b,\ b)$ $\left(\frac{1}{b};\ \frac{1}{b}\right)$.

10.142. $(\sqrt{a};\ a)$. **10.143.** $\left(a^{\frac{c}{2}};\ a^c\right)$.

10.144. Kai $a=b$, sprendinys turi išraišką (c, c); čia $c>0$ – bet koks skaičius. Kai $ab=1$, sprendinys turi išraišką $\left(c;\ \frac{1}{c}\right)$; čia $c>0$ – bet koks skaičius. Kai $a\neq b$ ir $ab\neq 1$, yra tik vienas sprendinys $\left(\frac{1}{a};\ \frac{1}{b}\right)$.

10.145. 10 m. **10.146.** $\frac{50}{3}$ min ir 50 min.

10.147. $x>\frac{a+\sqrt{a^2+t^2v^2}}{t}$. **10.148.** $2+\sqrt{2}$ kartų. **10.149.** 2 kartus.

10.150. $\frac{s}{2\text{m}}\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$. **10.151.** $3p-q$. **10.152.** 3h.

10.153. $p\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{m}{n-m}}$ ir $2p\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{m}{n-m}}$; $100\left(\left(\frac{2p}{q}\right)^{\frac{1}{m-n}}-1\right)$ %.

10.154. $10\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. **10.155.** $\frac{3kt}{2+k}$ min. **10.156.** $12\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

10.157. 20 darbininkų; 6h per dieną. **10.158.** $\left(1-\sqrt[n]{\frac{k}{1+k}}\right)^{-1}$ litrų.

10.159. $60\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $40\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. **10.160.** Po 4 h. **10.161.** 120 km.

10.162. 3 h 10 min. **10.163.** Trys sprendiniai: 3 h, $\frac{9}{5}$ h=1h 48 min ir 1h.

10.164. $\frac{11}{8}$ h. **10.165.** 7h. **10.166.** 6,5 h. **10.167.** $\frac{10}{3}$ h. **10.168.** 6h.

XI SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

11.1. $x=-\text{arctg}\ \frac{3}{2}+\pi n$. **11.2.** $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. **11.3.** $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$.

11.4. $x=2\pi n$, $x=(-1)^k\ \frac{\pi}{3}+2\pi k$. **11.5.** $x=(2n+1)\pi$, $x=4\pi k$.

11.6. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. **11.7.** $x=\frac{\pi n}{3}$, $n\neq 3m$. **11.8.** Lygtis neturi sprendinių.

11.9. $x=\text{arctg}\ \frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}+\pi n$. **11.10.** $x=\pm\text{arccos}\ \frac{1}{\sqrt{3}+1}+2\pi n$.

11.11. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n$, $x=\frac{3}{14}\pi+\frac{2}{7}\pi k$. **11.12.** Lygtis neturi sprendinių.

11.13. Lygtis neturi sprendinių. **11.14.** Lygtis neturi sprendinių.

11.15. $x=\pi n$. **11.16.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}$. **11.17.** $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi k}{3}$.

11.18. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$. **11.19.** $x=\pi n$. **11.20.** $x=\text{arctg}\ \frac{4}{3}+\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

11.21. $x=-\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi k}{2}$.

11.22. $x=-\frac{\varphi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\varphi+\pi}{2}+\pi k$, $\varphi=\text{arctg}\ \frac{4}{3}$. **11.23.** $x=\frac{\pi k}{4}$.

11.24. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **11.25.** $x=-\frac{\pi}{52}+\frac{\pi n}{13}$, $x=\frac{\pi}{92}+\frac{\pi n}{23}$.

11.26. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $x=\frac{3\pi}{22}+\frac{2\pi k}{11}$. **11.27.** $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$, $x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{18}$.

11.28. $x=2\pi n,\ x=\pm 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}+2\pi k,\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m.$

11.29. $x=\pi(2n+1),\ x=\frac{\pi}{2}(4k+1).$ **11.30.** $x=\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right),\ x=\pi(2k+1).$

11.31. $x=\frac{\pi}{4}.$ **11.32.** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}.$ **11.33.** $x=\pi n,\ x=\frac{\pi}{3}+\pi k.$

11.34. $x=\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{3},\ x=\frac{3\pi}{32}+\frac{\pi k}{4}.$ **11.35.** $x=\frac{\pi n}{2},\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi.$

11.36. $x=\pi n,\ x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k.$ **11.37.** $x=\frac{\pi n}{2}.$ **11.38.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$

11.39. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$ **11.40.** $x=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\frac{\pi n}{2},\ x=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}.$

11.41. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}.$ **11.42.** $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k.$

11.43. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}\pi k.$ **11.44.** $x=\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi k}{5}.$

11.45. $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7},\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}.$ **11.46.** $x=\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi k}{5}.$

11.47. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ x=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{\pi k}{2}.$ **11.48.** $x=\frac{\pi n}{4},\ x=\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{10}.$

11.49. $x=\frac{\pi n}{12}.$ **11.50.** $x=\frac{\pi n}{3}.$ **11.51.** $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{17}-1}{4}+\pi k.$

11.52. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k.$ **11.55.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}.$

11.56. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k.$ **11.57.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi k.$

11.58. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n.$ **11.59.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n.$ **11.60.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi.$

11.61. $x=2\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k.$ **11.62.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=2\pi k,\ x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m.$

11.63. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi k,\ x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}.$

11.64. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}.$ **11.65.** Lygtis neturi sprendinių.

11.66. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}.$ **11.67.** $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n.$

11.68. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ x=2\pi m.$ **11.69.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi k.$

11.70. $x=\frac{\pi n}{4},\ x=(-1)^k\frac{\pi}{36}+\frac{\pi k}{6}.$ **11.71.** $x=\frac{\pi n}{3}.$

11.72. $x=(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}.$ **11.73.** $x=\pm\arcsin\frac{1}{4}+\pi n.$

11.74. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+\pi m.$

11.75. $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4},\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3},\ n\neq 1+3m.$

11.76. $x=2\pi n,\ x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^m\arcsin\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi m.$

11.77. $x=\pm\frac{5\pi}{12}+\pi n$. **11.78.** $x=\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{2\pi k}{5}$.

11.79. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m$.

11.80. $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+\frac{2}{3}\pi m$. **11.81.** $x=\pi n$, $x=\pm\arccos\frac{-1\pm\sqrt{3}}{4}+2\pi k$.

11.82. $x=\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\arccos\frac{2}{3}+2\pi k$. **11.83.** $x=\pi n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$.

11.84. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=\pi(2m+1)$.

11.85. $x=(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+\frac{\pi n}{2}$. **11.86.** $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$, $x=2\pi k$.

11.87. $x=\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{3}$. **11.88.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$.

11.89. $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$. **11.90.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$.

11.91. $x=(-1)^n\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{2}$. **11.92.** $x=\frac{\pi n}{4}$.

11.93. $x=\pi n$, $x=\pi k-\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{12}+\pi m$. **11.94.** Lygtis neturi sprendinių.

11.95. $x=\pi n$. **11.96.** $x=\pi n$, $x=\pm\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi k$. **11.97.** Lygtis neturi sprendinių.

11.98. $x=-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}4+\frac{\pi n}{4}$. **11.99.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$.

11.100. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. **11.101.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=\pi(2k+1)$.

11.102. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi m}{2}$.

11.103. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x=(-1)^{m+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi m$.

11.104. $x=\pi n$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$.

11.105. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x=(-1)^k\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$.

11.106. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$, $x=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{2}$.

11.107. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$.

11.108. $x2\pi_n$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m$.

11.109. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$, $x=\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi k}{9}$ $(2k+1\neq 9m)$.

11.110. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n$.

11.111. $x=2\pi n$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi l}{2}$.

11.112. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\frac{\pi}{8}+\pi m$.

11.113. Kai $|a|\geq 1$, tai lygtis turi tokius sprendinius: $x=\operatorname{arctg}(2a\pm\sqrt{3a^2-3})+\pi n$. Kai $|a|<1$, tai sprendinių nėra.

11.114. Kai $|a| \leqslant \sqrt{2}$, tai lygtis turi tokius sprendinius: $x=(-1)^n \arcsin(3-2\sqrt{3-a^2})+\pi n$. Kai $|a|>\sqrt{2}$, tai lygtis neturi sprendinių.

11.115. Kai $|B|>1$, tai lygtis neturi sprendinių. Kai $|B| \leqslant 1$, lygtis turi sprendinius. Be to, kai $|B| \leqslant \frac{1}{3}$, lygtis turi tokias dvi sprendinių serijas:

$$x=-\frac{\pi}{4}-(-1)^n \arcsin B+\pi n, \quad x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k \arcsin 3B+\pi k.$$

Kai $\frac{1}{3}<|B| \leqslant 1$, lygtis turi vieną sprendinių seriją $x=-\frac{\pi}{4}-(-1)^n \arcsin B+\pi n$.

11.116. Su bet kokiomis B reikšmėmis lygtis turi sprendinių seriją

$$x=\frac{3}{4}\pi+2\pi n. \qquad (*)$$

Kai $0 \leqslant B \leqslant 1$, tai, be sprendinių serijos (*), lygtis turi dar vieną sprendinių seriją

$$x=\frac{\pi}{4}+(-1)^k \arcsin(2B-1)+\pi k.$$

11.117. Lygtį galima išspręsti tada ir tik tada, kai $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$; jos sprendiniai $x= \pm \frac{1}{4} \arccos(4a-3)+\frac{\pi n}{2}$.

11.118. Lygtį galima išspręsti tada ir tik tada, kai $|a| \leqslant 1$; čia $a=2B+1$, t.y., kai $-1 \leqslant B \leqslant 0$. Be to, kai $|a| \leqslant \frac{1}{2}$, t.y. $-\frac{3}{4} \leqslant B \leqslant -\frac{1}{4}$, lygtis turi dvi sprendinių serijas: $x= \pm \frac{1}{2} \arccos a+\pi n$ ir $x= \pm \frac{1}{2} \arccos(-2a)+\pi k$. Jeigu $\frac{1}{2}<|a| \leqslant 1$, t.y. $-1 \leqslant B<-\frac{3}{4}$ arba $-\frac{1}{4}<B \leqslant 0$, tai lygtis turi vieną sprendinių seriją $x= \pm \frac{1}{2} \arccos a+\pi n$.

11.119. Lygtį galima išspręsti tada ir tik tada, kai $|a| \geqslant 1$. Kai $a \geqslant 1$, lygtis turi sprendinių seriją $x= \pm \frac{1}{2} \arccos(-a+\sqrt{a^2-1})+\pi n$, o kai $a \leqslant -1$, sprendinių seriją $x= \pm \frac{1}{2} \arccos(-a-\sqrt{a^2-1})+\pi k$.

11.121. Su visomis realiomis α reikšmėmis, išskyrus $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2}$, lygtį galima išspręsti; ji turi sprendinių seriją

$$x=-2\alpha+\frac{\pi}{4}+\pi n. \qquad (*)$$

Kai $|\cos \alpha|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\left(\text{t.y. } \frac{\pi}{4}+\pi m<\alpha<\frac{3\pi}{4}+\pi m;\ \text{čia } m - \text{sveikasis skaičius}\right)$, tai be serijos (*), lygtis turi dar vieną sprendinių seriją $x=\frac{1}{2}(-1)^{k+1} \arcsin(2\cos^2 \alpha)+\frac{\pi k}{2}-2\alpha$. Kai $\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi l}{2}$, tai lygtis neturi sprendinių.

11.122. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$.

11.123. $x= \pm \frac{1}{2} \arccos(1-\sqrt{2})+\pi n$, $x= \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2}+\pi k$.

11.124. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$. **11.125.** $x=4\pi n$, $x= \pm \frac{\pi}{3}+2\pi k$. **11.126.** $x=\frac{3\pi}{5}+2\pi n$.

11.127. $x=\frac{10\pi n}{7}$ ($n\neq 7k$, k — sveikasis skaičius).

$x=\frac{5}{9}\pi+\frac{10}{9}\pi m$ ($m\neq 9l+4$, l — sveikasis skaičius).

11.128. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. **11.129.** $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$.

11.130. $x=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$. **11.131.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$. **11.132.** $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

11.133. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **11.134.** $x=\frac{\pi n}{2}$. **11.135.** $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$.

11.136. $x=\pi\left(n+\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)$, $y=\pi\left(n-\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)$.

11.137. $x=\pi\left(\frac{k}{2}+n+\frac{1}{3}\right)$, $y=\pi\left(\frac{k}{2}-n+\frac{1}{6}\right)$;

$x=\pi\left(\frac{k}{2}+n+\frac{1}{6}\right)$, $y=\pi\left(\frac{k}{2}-n+\frac{1}{3}\right)$.

11.138. $x=\pi\left(k+n+\frac{1}{3}\right)$, $y=\pi\left(k-n+\frac{1}{3}\right)$;

$x=\pi\left(k+n-\frac{1}{3}\right)$, $y=\pi\left(k-n-\frac{1}{3}\right)$.

11.139. $x=\pi\left(\frac{7}{24}+k+n\right)$, $y=\pi\left(\frac{1}{24}+k-n\right)$; $x=\pi\left(\frac{1}{24}+k+n\right)$,

$y=\pi\left(\frac{7}{24}+k-n\right)$; $x=\pi\left(-\frac{1}{24}+k+n\right)$, $y=\pi\left(-\frac{7}{24}+k-n\right)$;

$x=\pi\left(-\frac{7}{24}+k+n\right)$, $y=\pi\left(-\frac{1}{24}+k-n\right)$.

11.140. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $y=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}+2\pi k$.

11.141. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{6}+2\pi m$; $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $y=\frac{\pi}{2}+2\pi m$.

11.142. $x=\pi\left(2n\pm\frac{1}{3}\right)$, $y=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$; $x=\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)$, $y=\pi\left(2n\pm\frac{1}{3}\right)$.

11.143. $x=2\pi n$, $y=\pi(2k+1)$.

11.144. Sistemą galima išspręsti tada ir tik tada, kai $|2a-\sin\alpha|\leqslant 1$; ji turi šiuos sprendinius:

$$x=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}(-1)^n\arcsin(2a-\sin\alpha)+\frac{\pi n}{2},$$

$$y=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\arcsin(2a-\sin\alpha)-\frac{\pi n}{2}.$$

11.145. Sistema išsprendžiama, kai $a<0$ arba $a\geqslant 2$; jos sprendiniai tokie:

$$x=\operatorname{arctg}\frac{a\pm\sqrt{a^2-2a}}{2}+\pi k,\quad y=\operatorname{arctg}\frac{a\pm\sqrt{a^2-2a}}{a}+\pi n.$$

11.146. Jeigu $\cos\alpha=0$ $\left(\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi m\right)$, tai sistemą galima išspręsti tik tada, kai $a=1$; tuomet ji turi sprendinius $x=b$, $y=\alpha-b$; čia b — bet koks realusis skaičius.

Jeigu $\cos\alpha\neq 0$, tai sistemą galima išspręsti tada ir tik tada, kai $\left|\frac{a-1}{\cos\alpha}\right|\leqslant 1$; tuomet ji turi tokias sprendinių serijas:

$$x=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{\cos\alpha}+\pi k,\quad y=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{\cos\alpha}-\pi k;$$

$$x=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{\cos\alpha}+\pi k,\quad y=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{\cos\alpha}-\pi k.$$

11.147. Sistema išsprendžiama, kai $a=0$; jos sprendiniai yra

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k+n}{2}\pi,\quad y=(k-n)\pi.$$

11.148. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ y=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k;$

$x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n.$

11.149. $x=\frac{\pi}{6}+\pi(k+n),\ y=\frac{\pi}{6}+\pi(k-n);$

$x=-\frac{\pi}{6}+\pi(k+n),\ y=-\frac{\pi}{6}+\pi(k-n).$

11.150. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k;\quad x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ y=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.$

11.151. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ y=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi n}{2}+2\pi k.$ **11.152.** $x=\frac{\pi n}{2},\ y=\frac{\pi k}{2}.$

11.153. $x=\pi n,\ y=2\pi k;\ x=\frac{\pi}{2}+\pi m,\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi l.$

11.154. $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{11}{24}+\pi n,\ y=(-1)^n\arcsin\frac{43}{48}+\pi(n+2m).$

11.155. $x=\frac{3\pi}{4}+\pi(n+2k),\ y=-\frac{\pi}{4}+\pi n;$

$x=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}+\pi l+2\pi m,\ y=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}+\pi l.$

11.156. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ y=\frac{\pi n}{2};\ x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ y=-\frac{\pi}{3}+\pi n;$

$x=-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ y=\frac{\pi}{3}+\pi n.$

11.157. $x=\pi n,\ y=\pi k.$ **11.158.** $x=\pi n,\ y=(-1)^n\operatorname{arctg}2+\pi k.$

11.159. $x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ y=(-1)^n\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k;\ x=\pi m,\ y=(-1)^m\operatorname{arctg}2+\pi l.$

11.160. Kai $a=0$, tai $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, y – bet koks skaičius;

kai $a=-1$, tai $y=\frac{\pi}{2}-x+2\pi k$, x – bet koks skaičius;

kai $a\neq 0$ ir $a\neq -1$, tai $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ y=\frac{\pi}{4}+2\pi l.$

11.161. $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ y=\frac{\pi}{2}+\pi k;$

$x=\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi m,\ y=\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi l;$

$x=-\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi m,\ y=-\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi l.$

11.162. $x=\pi n,\ y=\pi k;\ x=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n,\ y=\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi k;$

$x=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n,\ y=\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi k;$

$x=-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi n,\ y=-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+\pi k;$

$x=-\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n,\ y=-\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi k.$

11.163. $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n,\ y=2\pi k;$

$x=(-1)^m\arcsin\frac{13}{15}+\pi m,\ y=(-1)^{m+1}\arccos\frac{1}{15}+2\pi l;$

$x=2\pi n,\ y=\frac{3\pi}{2}+2\pi k;$

$x=(-1)^{m+1}\arccos\frac{1}{15}+2\pi l,\ y=(-1)^m\arcsin\frac{13}{15}+\pi m.$

11.164. $x=2\pi n,\ y=\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ y=2\pi l;$

$x=(-1)^n\arccos\left(-\frac{19}{20}\right)+2\pi k,\ y=(-1)^n\arcsin\frac{7}{20}+\pi n;$

$x=(-1)^m\arcsin\frac{7}{20}+\pi m,\ y=(-1)^m\arccos\left(-\frac{19}{20}\right)+2\pi l.$

11.165. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ y=\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ y=\frac{\pi}{6}+2\pi k.$

11.166. $x=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m,\ y=(-1)^{m+1}\frac{\pi}{6}+\pi(2l+1)+\pi m.$

XII SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

12.1. $\frac{h}{2}(\sqrt{h^2+l^2}-h).$ **12.2.** $h\sqrt{5}.$ **12.3.** $\frac{h}{2}\sqrt{l^2+4h^2}.$ **12.4.** $\left(m^{\frac{2}{3}}+l^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$

12.5. $\frac{bc\sqrt{2}}{b+c}.$ **12.6.** $\frac{2b\sqrt{R}}{\sqrt{b+2R}}.$ **12.7.** $\frac{c}{2}$ ir $\frac{c\sqrt{3}}{2}.$ **12.8.** $ab.$

12.11. $\sqrt{p^2+r^2}.$ **12.12.** 3 cm ir 4 cm. **12.13.** $\frac{\pi}{6}$ ir $\frac{\pi}{3}.$ **12.14.** $r+R\pm$
$\pm\sqrt{R^2-r^2-2rR}.$ **12.15.** $\frac{c}{2}\sqrt{3-2(\cos\alpha+\sin\alpha)}.$ **12.16.** $\frac{h\sqrt{h^2+l^2}}{h+l}.$

12.17. $c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right).$ **12.18.** $\frac{R^2\sin 2\alpha}{1+\sin^2 2\alpha}.$ **12.19.** $\frac{2R}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}.$

12.20. $r,\ \frac{4}{3}r$ ir $\frac{5}{3}r.$ **12.21.** $\frac{\pi}{4}.$ **12.22.** $\frac{(a+b)^2}{4}.$ **12.23.** $\frac{144}{23}$ cm.

12.24. $\frac{8\sqrt{11}-19}{7}$ cm. **12.25.** $\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}.$ **12.26.** $\frac{a\sqrt{7}}{3}.$ **12.27.** $\frac{13a}{15}.$

12.28. $\frac{\pi}{3}$ ir $\frac{\pi}{6}.$ **12.29.** $r^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right).$ **12.30.** $\frac{b^2}{32}(2\pi+3\sqrt{3}).$

12.31. $\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}$. **12.32.** $\frac{1}{2}(\sqrt{4R^2-r^2}\pm r\sqrt{3})$. **12.33.** $\frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{r^2-rR+R^2}}$.

12.34. $\frac{b\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}$. **12.35.** $\frac{b^2h}{4\sqrt{b^2-h^2}}$. **12.36.** $\frac{2}{3}$ cm. **12.37.** $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$.

12.38. $\frac{2b\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$. **12.39.** $\frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}$. **12.40.** Pagrindas lygus 6 cm, šoninė kraštinė – 5 cm. **12.41.** $\frac{b^2}{16a^2}(2a-b)\sqrt{4a^2-b^2}$. **12.42.** $2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$.

12.43. $\mathrm{ctg}^2\frac{3\pi}{16}$. **12.44.** $\frac{|b-a|}{2}$. **12 45.** $\frac{\pi}{2}$ ir $\frac{\pi}{4}$. **12.46.** $\frac{2}{9}(3+\sqrt{5})$.

12.47. $\frac{1}{3}R$ ir $\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)R$. **12.48.** Kampas prie pagrindo lygus $\arccos\frac{2}{3}$.

12.49. $\frac{1}{2}(m+n)$. **12.50.** $\sqrt{b^2+bc}$. **12.51.** $\frac{1}{2}(a-b+c)$. **12.52.** $\frac{2bc\cos\alpha}{b+c}$.

12.53. $2\sqrt{5}$ cm. **12.54.** $\frac{4}{25}$. **12.55.** $\frac{2bh}{(b+h)^2}$. **12.56.** $mn\sqrt{3}$.

12.57. $(b+c)\sqrt{1-\frac{l^2}{bc}}$. **12.58.** $\frac{25}{\sqrt{39}}$ cm. **12.59.** $\sqrt{\frac{29}{5}}$ cm. **12.60.** 3 : 1.

12.61. $\frac{|AO|}{|OM|}=n\left(1+\frac{1}{m}\right)$, $\frac{|BO|}{|ON|}=m\left(1+\frac{1}{n}\right)$. **12.62.** $\hat{A}=\frac{\pi}{3}$, $\hat{B}=\frac{\pi}{2}$ ir $\hat{C}=\frac{\pi}{6}$.

12.63. $48\sqrt{6}$ cm². **12.64.** 16 cm. **12.65.** 6 cm². **12.66.** $\frac{\pi}{12}$ ir $\frac{7\pi}{12}$.

12.67. $\frac{\pi}{2}$, $\arcsin\frac{3}{5}$ ir $\arcsin\frac{4}{5}$. **12.68.** $\sqrt{ac}$. **12.69.** $R\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

12.70. $\frac{R(5-\sqrt{5})}{10}$. **12.71.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm². **12.72.** $b\sin\alpha\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\right)^{-\frac{1}{2}}$ ir $b\sin\beta\left(\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)\right)^{-\frac{1}{2}}$.

12.73. $\frac{6}{5}(3\sqrt{21}-8)$ cm². **12.74.** $\frac{1}{2}|a^2-b^2|\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **12.75.** 2 cm ir 1 cm, $\frac{2}{3}$ cm ir $\frac{4}{3}$ cm.

12.76. 3 : 5. **12.77.** $\left(\frac{r}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)^2$. **12.78.** 204 cm². **12.79.** 588 cm² ir 1680 cm².

12.80. $l\sqrt{\frac{l^2+ab}{4l^2-(a-b)^2}}$. **12.81.** a^2+b^2. **12.82.** $\frac{1}{2R}(S\pm\sqrt{S^2-16R^4})$. **12.83.** $\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

12.84. $\sin\alpha=\frac{2S}{c^2-2S}$. **12.85.** $\frac{ab}{a+2b}$. **12.86.** 5 : 27. **12.87.** 6 cm ir 10 cm.

12.88. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **12.89.** $\frac{ab(a+b)}{2|a-b|}\,\mathrm{tg}\,\alpha$. **12.90.** 1 : 2. **12.91.** 1 : 2. **12.92.** 3. **12.93.** $\frac{\pi}{4}$.

12.94. 5 cm. **12.95.** $\frac{\pi}{2}$. **12.96.** $1:1:\sqrt{2-\sqrt{3}}:\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **12.97.** $S_2\sqrt{\frac{2S_2}{S_1+S_2}}$.

12.98. $b\sqrt{\frac{a}{2a-b}}$. **12.99.** $\frac{\alpha(1+\sin\alpha)^2}{\pi\sin^2\alpha}$. **12.100.** $\frac{rR^2}{R-r}$. **12.101.** $\frac{R}{4}$.

12.102. $\left(4\sqrt{3}-\frac{11\pi}{6}\right) r^2$. **12.103.** Uždavinį galima išspręsti, jeigu $R<a\leqslant R\sqrt{5}$. Be to, kai $R<a<2R$ ir $a=R\sqrt{5}$, tai yra vienas sprendinys. $\frac{2}{5}(2a-\sqrt{5R^2-a^2})$, o kai $2R\leqslant a<R\sqrt{5}$ – du sprendiniai: $\frac{2}{5}(2a\pm\sqrt{5R^2-a^2})$. **12.104.** $\sqrt{R^2+r^2+\frac{10}{3}Rr}$.

12.105. $a\sqrt{\left(1+\frac{r_1}{R}\right)\left(1+\frac{r_2}{R}\right)}$. **12.106.** $2\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

12.107. $\frac{R}{4}$. **12.108.** $\frac{R}{2}$ ir $\frac{R}{18}$. **12.109.** $\frac{4rR(R-r)}{(R+r)^2}$.

12.110. $\frac{R}{4R-r}(r+2R+2\sqrt{R^2+2rR})$; sprendinys egzistuoja tik tada, kai $r<4R$.

12.111. $\frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2}$. **12.112** $\frac{22-2\sqrt{21}}{75}R$. **12.113.** $\sqrt{ab}$.

XIII SKYRIAUS UŽDAVINIŲ ATSAKYMAI

13.1. $\frac{a\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$. **13.2.** $\frac{b(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$. **13.3.** $\frac{a}{2(1+\sqrt{6})}$. **13.4.** $\frac{a^2(1+\sqrt{2})}{6\sqrt{3}}$.

13.5. $\frac{2a^2}{27}(2\pi+3\sqrt{3})$. **13.6.** $3R$. **13.7.** $\frac{a}{8}(\sqrt{6}\pm 1)$. **13.8.** $(5\sqrt{6}+\sqrt{22})R$.

13.9. $\frac{13a}{6\sqrt{51}}$. **13.10** $\frac{3\sqrt{2}a^2}{25}$. **13.11.** $\frac{a}{\sqrt{10}}$ ir $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$.

13.12. $r\sqrt{6}+\sqrt{R^2-3r^2}$. **13.13.** $\frac{bh}{b+h}$. **13.14.** $\sin\alpha\sqrt{\frac{S}{3\sqrt{3}\cos\alpha}}$.

13.15. $\sqrt{\frac{S}{3}\left(\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$. **13.16.** $\frac{h}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

13.17. $\frac{a}{\sqrt{9\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-3}}$. **13.18.** $\frac{a^3\cos\frac{\alpha}{2}}{12\sqrt{1-2\cos\alpha}}$ ir $\frac{3a^2}{4\sqrt{1-2\cos\alpha}}$.

13.19. $\frac{2b^2\sqrt{11}}{49}$. **13.20.** $\frac{3a^2h(h\sqrt{3}\cos\alpha-a\sin\alpha)}{(a\sin\alpha+2h\sqrt{3}\cos\alpha)^2}$. **13.21.** $\frac{bh}{b+\sqrt{4h^2-3b^2}}$.

13.22. $2R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sqrt{1-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$. **13.23.** $\frac{7}{2}$. **13.24.** $\frac{18b^3h^3}{(h^2-b^2)\sqrt{4b^2-h^2}}$.

13.25. $\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$. **13.26.** $\frac{8\sqrt{3}}{\pi}$. **13.27.** $\frac{a(2l-a)}{2\sqrt{3l^2-a^2}}$.

13.28. $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2}}$. **13.29.** $\frac{2}{2\sqrt{3}}$. **13.30.** $\frac{b^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{1+2\cos\alpha}$.

13.32. $\frac{2}{25}$. **13.33.** $\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$. **13.35.** $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **13.36.** $\frac{b}{2\sin 2\beta}$.

13.37. $\frac{1}{4\pi}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta\sin^3 2\beta$. **13.38.** $\frac{h^3}{12}\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta(tg^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta)^{\frac{3}{2}}$.

13.39. $\dfrac{ah}{a+2h+\sqrt{a^2+2h^2}}$. **13.40.** $\dfrac{1}{3}\ pR^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}^2 \dfrac{\alpha}{2}$.

13.41. $\dfrac{a}{2\sin\alpha}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta\cos^4\dfrac{\alpha}{2}}$. **13.42.** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ cm³.

13.43. $\dfrac{l}{2\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}+\sqrt{2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\right)}$. **13.44.** 5 cm. **13.45.** $\dfrac{1}{8h}\sqrt{a^4+64h^4}$.

13.46. $\dfrac{R}{9}\left(3\sqrt{2}+1\pm\sqrt{10+6\sqrt{2}}\right)$ ir $\dfrac{R}{9}\left(3\sqrt{2}-1\pm\sqrt{10-6\sqrt{2}}\right)$.

13.47. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^{-1}$. **13.48.** $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^{-1}$. **13.49.** $\dfrac{9}{\pi}$.

13.50. $\dfrac{b}{4}(\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{ctg}\alpha)$. **13.51.** $\dfrac{a}{4}\left|2\operatorname{ctg}\alpha+2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{tg}\alpha\right|$. **13.52.** $\dfrac{2ah}{\sqrt{4h^2+9a^2}}$.

13.53. $\dfrac{2b^3h^3}{3(h^2-b^2)\sqrt{2b^2-h^2}}$. **13.54.** $2R\sqrt{\cos\alpha}$. **13.55.** $4R^2$. **13.56.** $\dfrac{19\sqrt{2}}{6}-1$.

13.57. $\dfrac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$. **13.58.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ cm. **13.59.** $m-n+p$. **13.60.** $\dfrac{2r}{5}(8\sqrt{3}+\sqrt{37})$.

13.61. $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}a^2$. **13.62.** $0<r\leqslant\dfrac{b\sqrt{2}}{6}$ ir $r=\dfrac{b\sqrt{2}}{4}$. **13.63.** $\dfrac{1}{3}$.

13.64. $\dfrac{a}{2}(1+\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta-\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2\beta})$. **13.65.** $\dfrac{a}{h}(\sqrt{a^2+h^2}-a)$.

13.66. $\dfrac{2a}{15}\sqrt{16a^2+2h^2}$. **13.67.** $\dfrac{b}{6}\sqrt{a^2+h^2}$. **13.68.** $\dfrac{5}{4}$. **13.69.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4ab-a^2-b^2}$.

13.70. $\sqrt{l^2-\dfrac{4}{3}(a^2-ab+b^2)}$. **13.71.** $1+\sqrt{\dfrac{7}{3}}$. **13.72.** $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}(3+4\operatorname{ctg}^2\alpha)}$.

13.73. $\dfrac{b(n+2m)}{\sqrt{9b^2-12n^2}}$. **13.74.** $l\left(1\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$. **13.75.** $\sqrt{S_2^2-\dfrac{1}{2}S_1^2}$.

13.76. $2\cos\alpha$. **13.77.** $\dfrac{h}{a}\sqrt{2h^2+\dfrac{1}{2}a^2}\pm\dfrac{a}{2}$. **13.78.** $\dfrac{11\sqrt{3}}{2\cos\alpha}a^2$. **13.79.** $\dfrac{a\sqrt{41}}{8}$.

13.80. $\dfrac{\pi}{9\sqrt{3}}b^3$. **13.81.** $\dfrac{2a}{3}$. **13.82.** $\dfrac{3b}{4}$. **13.83.** $a\sqrt{\dfrac{7}{8}}$.

13.84. $2\operatorname{arctg}\dfrac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac}$. **13.85.** $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **13.86.** $\dfrac{25}{2(5\sqrt{2}\pm3)}$ cm.

13.87. $\dfrac{3a}{14}$. **13.88.** $\left(\dfrac{3}{2}\pm\dfrac{3}{\sqrt{14}}\right)$ cm. **13.89.** $\dfrac{a^2}{\sin\beta}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\beta\right)$.

13.90. Pagrindo kraštinė lygi $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{3R^2\pm\sqrt{9R^4-3S^2}}$, šoninė briauna lygi $\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqrt{3R^2\mp\sqrt{9R^4-3S^2}}$. **13.91.** $3\sqrt{3}$ cm³. **13.92.** $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}(2b\sqrt{b^2+4h^2}-b^2)$.

13.93. $\sqrt{\dfrac{2}{3}(a^2+b^2+\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2})}$. **13.94.** $\dfrac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{5}-1)$.

13.95. $\dfrac{b}{8}\sqrt{15b^2+4l^2}$. **13.96.** $\dfrac{c^3}{8}(1+\sqrt{6}-\sqrt{3})$. **13.97.** $\dfrac{3}{5}$. **13.98.** $\dfrac{3b\sqrt{111}}{35}$.

13.99. $2\sin^4\alpha\cos^2\alpha$. **13.100.** $\frac{\pi}{3}$. **13.101.** $\frac{2}{3}\pi a^3\sin^2 2\alpha$. **13.102.** $\frac{1}{3}\pi R^3\sqrt{7}$.

13.103. $\frac{8\pi}{5\sqrt{5}}R^2$ ir $\frac{16\pi}{5\sqrt{5}}R^2$. **13.104.** $h\sqrt{\sqrt{1+\frac{m}{n}}-1}$.

13.105. $\frac{3\pi h^2}{2(9+4\sqrt{5})}$. **13.106.** $2\arcsin\left(\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt[3]{a}}}\right)\right)$. **13.107.** $r=\frac{1}{2}R,\ h=\frac{1}{2}H$. **13.108.** $\frac{b^4}{2(b^2-1)}$. **13.109.** $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$.

13.110. $\frac{\pi\sqrt{2}}{48}(53-7\sqrt{3})$. **13.111.** $\frac{1}{3}$ cm. **13.112.** $r\sqrt{5}$. **13.113.** $\frac{\pi}{3}$.

13.114. arcctg 2. **13.115.** $\frac{121r}{36}$. **13.116.** $\frac{3+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}r$. **13.117.** $(2\pm\sqrt{3})r$.

13.118. $\frac{R}{4}(\sqrt{21}-3)$. **13.119.** $\frac{r}{1+\cos\alpha}(3-\cos\alpha\pm\sqrt{7-8\cos\alpha+\cos^2\alpha})$.

II SKYRIAUS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI IR NURODYMAI

2.4. Tam tikra operacija $a * b$ vadinama komutatyvia, kai su bet kokiais skaičiais a ir b lygybė $a * b = b * a$ teisinga. Taigi atimties komutatyvumas reikštų, kad $a - b = b - a$ (šį sąryšį gauname, ženklą $*$ pakeitę ženklu $-$). Bet ši lygybė, kokie bebūtų skaičiai a ir b, yra klaidinga (kai $a \neq b$). Analogiškai nagrinėjamas ir dalybos atvejis.

Tam tikra operacija $a * b$ vadinama asociatyvia, kai su bet kokiais skaičiais a, b, c lygybė $(a * b) * c = a * (b * c)$ yra teisinga. Todėl dalybos asociatyvumas reikštų, kad $(a : b) : c = a : (b : c)$. Bet ši lygybė, kokie bebūtų a, b, c, yra neteisinga. Analogiškai nagrinėjamas atimties atvejis.

2.9. Iš pradžių įrodykite lygybę

$$0,\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ nulių}}1 = 0,\underbrace{00\ldots0}_{k+1\text{ nulių}}0999\ldots$$

2.10. Tarkime, kad α ir β – du realieji skaičiai, be to, $\alpha < \beta$. Parenkame tokį racionalųjį skaičių a, kad $\alpha < a < \beta$ (žr. 16 pavyzdį, p. 46). Po to parenkame tokį racionalųjį skaičių b, kad galiotų nelygybė $a < b < \beta$. Toliau įrodykite, kad skaičius $c = a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ yra iracionalusis ir tenkina nelygybę $\alpha < c < \beta$.

2.11 ir **2.12.** Įrodymas analogiškas tiems samprotavimams, pagal kuriuos išsprendėme 13 pavyzdį, p. 41.

2.13. Iš pradžių įrodykite, kad $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Norėdami įrodyti, kad $\alpha_{k+1} \neq \alpha_{k+2}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, lygybę $\frac{n}{73} = 0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ padauginkite iš 10^k, o gautąjį rezultatą parašykite taip:

$$\frac{n \cdot 10^k - 73 \cdot \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}{73} = 0,\ \alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots$$

2.19. Pasinaudokite lygybe

$$\frac{1}{\underbrace{1,00\ldots01}_{\substack{99\\\text{skaitmenys}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{10^{100}}} = 1 - \frac{1}{10^{100}} + \frac{1}{10^{200}} - \frac{1}{10^{300}} + \ldots$$

Kitas sprendimas:

$$\frac{1}{\underbrace{1,00\ldots01}_{\substack{99\\\text{skaitmenys}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{10^{100}}} = \frac{1 - \frac{1}{10^{100}}}{1 - \frac{1}{10^{200}}} =$$

$$= \frac{0,\overbrace{999\ldots9}^{\substack{100\\\text{skaitmenų}}}}{0,\underbrace{999\ldots9}_{\substack{200\\\text{skaitmenų}}}} = \frac{0,\overbrace{99\ldots9}^{\substack{100\\\text{skaitmenų}}}\overbrace{00\ldots0}^{\substack{100\\\text{skaitmenų}}}}{0,\underbrace{99\ldots9}_{\substack{200\\\text{skaitmenų}}}} = 0,\ (\overbrace{99\ldots9}^{\substack{100\\\text{skaitmenų}}}\overbrace{00\ldots0}^{\substack{100\\\text{skaitmenų}}}) =$$

$$= 0,\overbrace{99\ldots9}^{\substack{100\\\text{skaitmenų}}}\overbrace{00\ldots0}^{100}\overbrace{99\ldots9}^{100}\overbrace{00\ldots0}^{100}\overbrace{9\ldots}^{100\ldots}$$

2.20. Įrodykite, kad

$$a<\sqrt{a}<1,$$

kai $0<a<1$.

2.27. Pasinaudokite tokiu pertvarkymu:

$$\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}=\sqrt{(a-1)+2\sqrt{a-1}+1}=\sqrt{(\sqrt{a-1}+1)^2}=$$
$$=|\sqrt{a-1}+1|=\sqrt{a-1}+1$$

(analogiškai pertvarkykite antrąją šaknį).

III SKYRIAUS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI IR NURODYMAI

Įvadinė pastaba. Tarkime, jog reikia įrodyti, kad su bet kokiu teigiamuoju skaičiumi a nelygybė

$$a+\frac{1}{a}\geqslant 2 \qquad (*)$$

yra teisinga.

Ši nelygybė $(*)$, remiantis sąlyga $a>0$ ir veiksmų su nelygybėmis taisyklėmis, galioja tada ir tik tada, kai $(a-1)^2\geqslant 0$. Pažymėję nelygybę $(*)$ raide A, galėsime parašyti, kad

$$A\Leftrightarrow[(a-1)^2\geqslant 0].$$

Sutarsime, kad užrašas

$$A\Leftrightarrow[B]$$

reiškia, jog nelygybė A yra teisinga tada ir tik tada, kai yra teisinga nelygybė B. Tokius užrašus vartosime nurodymuose, kaip spręsti šio skyriaus uždavinius.

3.4. **1.** $A\Leftrightarrow[(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0]$.

2. $5a^2-6ab+5b^2=5\left(a-\frac{3}{5}b\right)^2+\frac{16}{5}b^2$.

3. $A\Leftrightarrow[a^2b^2(a-b)^2\geqslant 0]$.

3.5. $bc-ad=bc-ac+ac-ad=c(b-a)-a(d-c)=(b-a)(c-a)$.

3.6. $A\Leftrightarrow\left[\left(a+\frac{\alpha b}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\alpha^2}{4}\right)b^2\geqslant 0\right]$.

3.8. $A\Leftrightarrow[(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})\geqslant 0]$.

3.9. **1.** Parašykite binomo $(a+b)^n$ dėstinį (arba pritaikykite matematinės indukcijos metodą).

2. $\frac{a^3+b^3}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^3=\frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2$.

3. $A\Leftrightarrow[(a+b+2\sqrt{ab})^2\geqslant 8\sqrt{ab}(a+b)]\Leftrightarrow[(a+b)^2+4\sqrt{ab}(a+b)+4ab\geqslant$
$\geqslant 8\sqrt{ab}(a+b)]\Leftrightarrow[(a+b-2\sqrt{ab})^2\geqslant 0]$.

3.10. Kairiosios ir dešiniosios nelygybės pusių skirtumas lygus $(a^k-b^k)(a^{n-k}-b^{n-k})$; išnagrinėkite du galimus atvejus: $a\leqslant b$, $a>b$.

3.11. Pritaikykite **3.10.** uždavinio nelygybes, kai $k=0, 1, \ldots, \ldots, n$, ir formulę $\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n$.

3.12. Pakelkite kvadratu.

3.14. **1.** $A\Leftrightarrow[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geqslant 0]$; žr. 3 pavyzdžio nelygybę, p. 64.

2. Pažymėję

$$xy=z_1,\ xz=y_1,\ y^z=x_1,$$

turėsime ankstesnį uždavinį.

3. Sudauginkite nelygybes

$$\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2,\ \sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3$$

(žr. **3.14, 1** ir **2** uždavinį).

4. Sudauginkite nelygybes $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$ (**3.14, 1** uždavinys) ir $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$ (**3.14, 3** uždavinys).

5. Sudauginkite nelygybes $\sigma_2^2 \geqslant 3\sigma_1\sigma_3$ (**3.14, 2** uždavinys) ir $\sigma_1\sigma_2 \geqslant 9\sigma_3$ (**3.14. 3** uždavinys).

6. Abi nelygybės $\sigma_1^2 \geqslant 3\sigma_2$ (žr. **3.14, 1** uždavinį) puses padauginkite iš $\sigma_1 \geqslant 0$.

3.15. 1 ir **2**. $A \Leftrightarrow [(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geqslant 0]$.

3.16. 1-asis būdas. Pažymėkite $x=a^3$, $y=b^3$, $z=c^3$ ir panaudokite nelygybę $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3\,abc$ (žr. 6 pavyzdį, p. 65).

2-asis būdas. Žr. Koši nelygybę (13), kai $n=3$ (p. 65).

3.17. 1. $A \Leftrightarrow [(a+b+c)(ab+bc+ac) \geqslant 9\,abc]$ (žr. **3.14, 3** uždavinį).

2. 1-asis būdas. $A \Leftrightarrow [a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2 \geqslant 0]$.

2-asis būdas. Kairėje nelygybės pusėje atskliauskite skliaustus ir tris kartus panaudokite nelygybę $x^2y+z^2y \geqslant y \cdot 2xz$, $y \geqslant 0$, kuri išplaukia iš (2) nelygybės, p. 65.

3-asis būdas. **3.17, 2** pavyzdys — tik kitoks **3.17, 1** pavyzdžio užrašymo būdas.

3. $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$.

4. $A \Leftrightarrow [(a+b+c)^3 \geqslant 2(a+b+c)(ab+bc+ca)+9abc]$; sudėkite nelygybes, įrodytas **3.14, 6** ir **3** uždaviniuose.

5. 1-asis būdas. Pažymėkite

$$\frac{y+z-x}{2}=a,\ \frac{x+z-y}{2}=b,\ \frac{y+x-z}{2}=c.$$

Kai $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, panaudokite 5 pavyzdžio (p. 65) nelygybę.

Kai bent vienas skaičių a, b, c yra neigiamas, pavyzdžiui, $a<0$, tai $x>z+y$; iš čia $x \geqslant z$, $x \geqslant y$, ir todėl $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. Bet tada $abc \leqslant 0$ ir nelygybė $xyz \geqslant 8abc$ yra savaime aiški.

2-asis būdas. Galima laikyti, kad skaičiai a, b, c (žr. 1-ąjį būdą) yra neneigiami, nes priešingu atveju, kaip ką tik įrodėme, nelygybė būtų teisinga. Norint įrodyti nelygybę, kai $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, pakanka sudauginti savaime aiškias nelygybes

$$x^2 \geqslant x^2-(y-z)^2,\ y^2 \geqslant y^2-(z-x)^2,\ z^2 \geqslant z^2-(x-y)^2$$

ir ištraukti iš abiejų nelygybės pusių kvadratinę šaknį.

6. Nelygybę, kurią įrodėme **3.17, 5** uždavinyje, parašykite taip: $\sigma_3 \geqslant (\sigma_1-2x)(\sigma_1-2y)(\sigma_1-2z)$, arba

$$\sigma_3 \geqslant \sigma_1^3-\sigma_1^2(2x+2y+2z)+\sigma_1(4xy+4xz+4yz)-8xyz,$$

ir t.t.

3.18. 1. Pažymėkite $x=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{b}}$, $z=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$ ir panaudokite nelygybę $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+xz+yz$ (žr. 3 pavyzdį, p. 64).

2. 1-asis būdas. $A \Leftrightarrow [2\sigma_1^3-7\sigma_1\sigma_2+9\sigma_3 \geqslant 0]$; kad įrodytumėte nelygybę, parašytą skliaustuose, pasinaudokite tapatybėmis

$$x^3+y^3+z^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3,\ x^2+y^2+z^2=\sigma_1^2-2\sigma_2.$$

2-asis būdas. Tris kartus panaudokite nelygybę

$$a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2\ (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0)$$

(žr. **3.10** uždavinį).

3. 1-asis būdas. Pritaikykite nelygybę

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}.$$

2-asis būdas. $A \Leftrightarrow \left[\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geqslant 6\right]$, žr. (4), p. 60.

3-asis būdas. Pritaikykite Koši–Buniakovskio nelygybę (p. 67):

$$a_1=\sqrt{a},\ a_2=\sqrt{b},\ a_3=\sqrt{c},\ b_1=\frac{1}{\sqrt{a}},\ b_2=\frac{1}{\sqrt{b}},\ b_3=\frac{1}{\sqrt{c}}.$$

4. Panaudokite **3.16** uždavinio nelygybę.
5. Pažymėkite

$$a_1=\frac{b+c}{2},\ b_1=\frac{a+c}{2},\ c_1=\frac{a+b}{2}$$

ir pritaikykite **3.18**, **3** uždavinio nelygybę.
6. 1-asis būdas.

$$A \Leftrightarrow [(a+b)(a-b)^2+(b+c)(b-c)^2+(c+a)(c-a)^2 \geqslant 0].$$

2-asis būdas. Kairiąją nelygybės pusę galima parašyti taip:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3=$$

$$=\frac{1}{2}\left((b+c)+(c+a)+(a+b)\right)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-3.$$

Toliau panaudokite **3.18**, 3 uždavinio nelygybę.
3.19. 1. $A \Leftrightarrow [(a^3-a^2b-ab^2+b^3)+(a^3-a^2c-ac^2+c^3)+(b^3-b^2c-bc^2+c^3) \geqslant 0] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow [(a-b)^2(a+b)+(a-c)^2(a+c)+(b-c)^2(b+c) \geqslant 0]$.
3. Prie **3.19**, **1** uždavinio nelygybės pridėkite 6 pavyzdžio nelygybę, p. 65.
4. Prie **3.19**, **1** uždavinio patrigubintos nelygybės pridėkite 6 pavyzdžio padvigubintą nelygybę, p. 65.
5. Uždavinys pertvarkomas į ankstesnį.
6. 1-asis būdas.

$$a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2,$$
$$b^4+c^4 \geqslant 2b^2c^2,$$
$$c^4+a^4 \geqslant 2a^2c^2,$$

po to panaudokite (2) išraiškos nelygybes, p. 60.
2-asis būdas.

$$A \Leftrightarrow [\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2+3\sigma_1\sigma_3 \geqslant 0];$$

prie **3.17**, **6** uždavinio nelygybės, padaugintos iš σ_1, pridėkite nelygybę $2\sigma_2^2 \geqslant 6\sigma_1\sigma_3$ (žr. **3.14**, **2** uždavinį).

3.20. Pakelkite kvadratu; $A \Leftrightarrow [bc+ad \geqslant 2\sqrt{abcd}]$; toliau panaudokite (5) nelygybę, p. 60.

3.21. $a^4+b^4 \geqslant 2a^2b^2$, $c^4+d^4 \geqslant 2c^2d^2$; toliau panaudokite (5) nelygybę, p. 60. Taip pat galima taikyti (13) nelygybę, p. 66.

3.22. Pakelkite kvadratu;

$$A \Leftrightarrow [(a^2-1)(1-b^2)<0].$$

3.24. $A \Leftrightarrow [ab-(a+b)^2 \leqslant 0] \Leftrightarrow [a^2+ab+b^2 \geqslant 0]$.

3.25. 1-asis būdas. Pažymėkite $a=\cos\varphi$, $b=\sin\varphi$; tada

$$a+b=\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right).$$

2-asis būdas.

$$|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)-(a-b)^2}\geqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}=\sqrt{2}.$$

3.26. Panaudokite nelygybę $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{1}{3}(a+b+c)^2$ (žr. **3.15, 1** uždavinį).

3.27. Pažymėkite $\sqrt{2a+1}=u$, $\sqrt{2b+1}=v$, $\sqrt{2c+1}=w$; tada $u^2+v^2+w^2=5$; toliau panaudokite **3.15, 1** uždavinio nelygybę.

3.28. 1. $a^2+b^2=\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{2}(a-b)^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$;

$$(a+b)^2\geqslant c^2.$$

2. Nelygybei $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}c^2$ pritaikykite būdą, kuriuo išsprendėme **3.28, 1** uždavinį.

3. Žr. **3.28. 1** ir **2.**

3.29. Nelygybę

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^2>1+\frac{1}{n}$$

pakelkite n-tuoju laipsniu.

3.30. Sudauginkite nelygybes

$$\frac{1}{2}<\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5},\ \ldots,\ \frac{99}{100}<\frac{100}{101};$$

gausime $a<\frac{1}{101\cdot a}$; čia a – sandauga, kuri yra įrodomos nelygybės kairėje pusėje; iš čia

$$a<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{10}.$$

3.31. Sudėkite nelygybes, kurios gaunamos iš nelygybės

$$\frac{1}{(2k+1)^2}<\frac{1}{2k(2k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k+2}\right),\ \text{imant}\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Tuomet

$$S_n<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)<\frac{1}{4}.$$

3.32. 1. Pritaikykite matematinės indukcijos metodą. Jeigu nelygybė $(1+a)^k>1+ak$ yra teisinga, tai, padauginę ją iš $1+a>0$, gausime $(1+a)^{k+1}>$ $>(1+ak)(1+a)=1+(k+1)a+ka^2>1+a(k+1)$.

2. Binomo $(1+a)^n$ dėstinio visi dėmenys yra teigiami, kai $a>0$.

3.33. $\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+$ $+\frac{1}{2^n}+\ldots=2.$

3.34. Pagal Niutono binomo formulę

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{1\cdot 2\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\ldots k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Iš čia $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>2$ ir, be to,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<3$$

(žr. **3.33** uždavinį).

3.35. Remiantis Koši nelygybe (13), p. 66,

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{a_1+a_n}{2}.$$

Toliau $a_k a_{n-k+1}\geqslant a_1 a_n$ (kai $k=1, 2, \ldots, n$) (žr. **3.5** uždavinį). Todėl

$$(a_1a_2\ldots a_n)^2=(a_1a_n)(a_2a_{n-1})\ldots(a_na_1)\geqslant(a_1a_n)^n,$$

arba

$$\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\geqslant\sqrt{a_1a_n}.$$

3.36. $$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n}}<\sqrt[n(n+1)]{\frac{3}{3}}=1,$$

kai $n\geqslant 3$ (žr. **3.33** uždavinį).

3.37. Kai $n\geqslant 2$, turime $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n]{1}=1$ (žr. 10 savybę, p. 59). Nelygybė $\sqrt[n]{n}<1+$ $+\frac{2}{\sqrt{n}}$ pertvarkoma į nelygybę

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n>n.$$

Pritaikę **3.32**, **2**: $a=\frac{2}{\sqrt{n}}$, $k=2$, turime

$$\left(1+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^n>1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{4}{n}>1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2}{n}=n.$$

3.38. $\frac{1}{\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{n}}$, kai $k=1, 2, \ldots, n-1$; iš čia

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Patikrinkite, kad

$$\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}-2\sqrt{k-1} \qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

3.39. $a^m+\frac{1}{a^m}-a^n-\frac{1}{a^n}=a^n(a^{m-n}-1)+\frac{1-a^{m-n}}{a^m}=\frac{(a^{m-n}-1)(a^{m+n}-1)}{a^m}$;

išnagrinėkite du atvejus: $a\geqslant 1$ ir $0<a<1$.

3.40. $A\leftrightarrow\left[n\left(a^n+\frac{1}{a^n}\right)\geqslant 2+\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)+\left(a^{n-2}+\frac{1}{a^{n-2}}\right)+\ldots+\right.$

$\left.+\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+\left(a+\frac{1}{a}\right)\right]$;

toliau panaudokite ankstesnio uždavinio nelygybę.

3.41. $A^2\leqslant a_k^2\leqslant B^2$ $\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

3.42. $m\leqslant\frac{a_k}{b_k}\leqslant M$ $\quad (k=1,\ 2.\ \ldots,\ n)$, iš čia $(b_k>0)$

$$mb_k\leqslant a_k\leqslant Mb_k,\ m\sum_{k=1}^{n} b_k\leqslant\sum_{k=1}^{n} a_k\leqslant M\sum_{k=1}^{n} b_k.$$

3.43. 1-asis būdas. Pasinaudokite Koši–Buniakovskio nelygybe (p. 67).

2-asis būdas. Išnagrinėkite nelygybę $\frac{1}{2}\sum_{k\neq l}(a_k-a_l)^2\geqslant 0$ (sumuojama pagal visas k ir l reikšmes nuo 1 iki n, be to, imant $k\neq l$). Prie šios nelygybės pridėkite lygybę

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n} a_k^2+\sum_{k\neq l} a_k a_l.$$

3.44. Kairiąją nelygybę galima įrodyti pagal Koši nelygybę (p. 66), parašytą skaičiams

$$\frac{1}{a_1},\ \frac{1}{a_2},\ \ldots,\ \frac{1}{a_n};$$

vidurinioji nelygybė įrodyta ((13) formulė, p. 66); dešiniąją nelygybę galima įrodyti, remiantis ankstesnio uždavinio nelygybe.

3.45. Išnagrinėkite tapatybę

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n} a_k^2+\sum_{k\neq l} a_k a_l.$$

3.46. **1.** Pakėlę kvadratu, gaukite Koši–Buniakovskio tipo nelygybę ((15), p. 67).
2. Pakėlę kvadratu, gaukite nelygybę

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2\cdot\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

kuri išplaukia iš Koši–Buniakovskio nelygybės (kai $|a|\geqslant|b|$, tai $|a|\geqslant b$).

3.47. Reiškinys $4(m_k^2-m_{k+1}m_{k-1})$ yra kvadratinio trinario $m_{k+1}x^2-2m_kx+m_{k-1}$ diskriminantas. Todėl užtenka parodyti, kad šis trinaris su visomis realiomis x reikšmėmis įgyja neneigiamas reikšmes.

V SKYRIAUS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI IR NURODYMAI

5.20. Kai $A(x_1, 0)$, $B(x_2, 0)$, $C(0, y_0)$ – duotieji taškai, tai trinario išraiška turi būti tokia: $a(x-x_1)(x-x_2)$. Kadangi grafikas turi eiti per tašką C, tai $ax_1x_2=y_0$. Ieškomojo trinario ax^2+bx+c koeficientai apibrėžiami formulėmis

$$a=\frac{y_0}{x_1 x_2}, \quad b=-\frac{y_0(x_1+x_2)}{x_1 x_2}, \quad c=y_0.$$

5.21. Kai $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ – duotieji taškai ($x_2 \neq x_1$), tai ieškomojo trinario išraiška turi būti tokia:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2+y_1.$$

Kadangi grafikas turi eiti per tašką B, tai $a(x_2-x_1)^2+y_1=y_2$, iš čia

$$a=\frac{y_2-y_1}{(x_2-x_1)^2}, \quad b=-\frac{2x_1(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2}, \quad c=y_1+\frac{x_1^2(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)^2}.$$

Be to, $a \neq 0$, nes $y_1 \neq y_2$.

5.34. Žr. 2 pavyzdį, p. 94

5.37. Pažymėkite $y_1=x_1-\alpha$, $y_2=x_2-\alpha$ ir panaudokite 2 pavyzdį, p. 94; pažymėkite $z_1=x_1-\beta$, $z_2=x_2-\beta$ ir panaudokite **5.33** uždavinį.

5.38. Žr. **5.37** uždavinį.

5.39. Tarę priešingai, gautume neteisingą nelygybę $(p_1-p_2)^2<0$.

VI SKYRIAUS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI IR NURODYMAI

6.2. 1-asis būdas. Pritaikę Niutono binomo formulę arba matematinės indukcijos metodą, įrodykite, kad su bet kokiu $n=0, 1, 2, \ldots$ skaičius $(a+\sqrt{b})^n+(a-\sqrt{b})^n$ yra sveikasis skaičius, kai a ir b – sveikieji skaičiai.

2-asis būdas. Skaičiai $a+\sqrt{b}$ ir $a-\sqrt{b}$ yra kvadratinės lygties $x^2-2ax+(a^2-b)=0$ su sveikaisiais koeficientais šaknys. Toliau panaudokite 6 pavyzdžio, p. 122, rezultatą.

6.3. Įrodykite, kad daugianario $A(x)$ šaknys bus daugianario $f(x)$ šaknys, kai daugianaris $f(x)$ dalysis (be liekanos) iš daugianario $A(x)$.

6.4. Žr. 9 pavyzdį, p. 128.

6.8. Iš pradžių įrodykite, kad skaičius $1-\sqrt{3}$ yra duotosios lygties šaknis.

6.9. Iš pradžių įrodykite, kad skaičius $1-\sqrt{2}$ yra duotosios lygties šaknis.

6.10. Tarkime, kad, padalijię daugianarį $f(x)$ iš mažesnio laipsnio daugianario $\varphi(x)$, gavome dalmenį $A_1(x)$ ir liekaną $R_1(x)$, t.y.

$$f(x)=A_1(x)\varphi(x)+R_1(x).$$

Iš šios formulės išplaukia, kad daugianarių $f(x)$ ir $\varphi(x)$ bendroji šaknis, jeigu tokia tik yra, turi būti daugianario $R_1(x)$, kurio laipsnis mažesnis už daugianario $\varphi(x)$ laipsnį, šaknis.

Padalijię $\varphi(x)$ iš $R_1(x)$, gauname

$$\varphi(x)=A_2(x)R_1(x)+R_2(x);$$

čia daugianario $R_2(x)$ laipsnis yra mažesnis už daugianario $R_1(x)$ laipsnį, be to, bendroji daugianarių $\varphi(x)$ ir $R_1(x)$ (taigi ir $f(x)$) šaknis yra daugianario $R_2(x)$ šaknis. Pratęsę šį procesą, šiame uždavinyje gautume antrojo laipsnio daugianarį $R_4(x)$. Suradę daugianario $R_4(x)$ šaknis, turėsime patikrinti, kurios jų yra daugianarių $f(x)$ ir $\varphi(x)$ bendrosios šaknys.

6.11. Žr. nurodymą, kaip spręsti **6.10** uždavinį.

6.12. 1-asis būdas. Įrodykite, kad $x_1^3=1$, kai x_1 – daugianario x^2+x+1 šaknis.

2-asis būdas. $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}=x^{3m}-1+x(x^{3n}-1)+x^2(x^{3p}-1)+x^2+x+1$. Toliau pasinaudokite tuo, kad $x^{3k}-1$ (k – natūrinis skaičius) dalijasi iš x^3-1 (o kartu ir iš x^2+x+1).

6.15. Žr. pirmąjį nurodymą, kaip spręsti **6.12** uždavinį.

6.17. Iš pradžių įrodykite, kad $x_1+x_2+x_3=0$, ir pasinaudokite tuo, jog a^3+b^3+ $+c^3-3abc$ dalijasi iš $a+b+c$.

6.18. Tarkime, kad x_1, x_2 – dvi teigiamos šaknys, x_3 – trečioji šaknis. Tuomet $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-ax^2-bx-c$; iš čia $c=x_1x_2x_3$, ir todėl $x_3\geqslant 0$. Bet tada $b=-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)<0$, o tai prieštarauja sąlygai.

6.25. Kadangi $f(c)=0$, tai

$$f(m)=f(m)-f(c)=(m^n-c^n)+a_1(m^{n-1}-c^{n-1})+\ldots+a_{n-1}(m-c).$$

Toliau panaudokite teiginį, kad sveikasis skaičius m^q-c^q, koks bebūtų natūrinis skaičius q, dalijasi iš sveikojo skaičiaus $m-c$.

6.27. Panaudokite lygybę

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2.$$

6.31. Pritaikę **6.28** uždavinio rezultatą, parodykite, kad daugianarį $f(x)$ galima išreikšti taip:

$$f(x)=a_0\left((x-a_1)^2+b_1^2\right)\left((x-a_2)^2+b_2^2\right)\ldots\left((x-a_n)^2+b_n^2\right).$$

Belieka panaudoti **6.27** uždavinio rezultatą.

6.34. Matematinės indukcijos metodu įrodykite, kad $x_1^n+x_2^n+x_3^n$ su bet kokiu $n=1, 2, 3, \ldots$ yra sveikasis skaičius.

6.35. Kai $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – n-tojo laipsnio daugianario $f(x)$ viena kitai nelygios šaknys, tai $f(x)=a_0(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_n)$. Iš sąlygos $f(c_{n+1})=1$ turime

$$a_0=\frac{1}{(c_{n+1}-c_1)(c_{n+1}-c_2)\ \ldots\ (c_{n+1}-c_n)}.$$

6.36. 1-asis būdas. Kai (n – 1)-tojo laipsnio daugianaris $P(x)$ taškuose c_2, $c_3, \ldots, c_{n+1}$ įgyja atitinkamas reikšmes $\frac{d_2-d_1}{c_2-c_1}$, $\frac{d_3-d_1}{c_3-c_1}$, $\ldots$, $\frac{d_{n+1}-d_1}{c_{n+1}-c_1}$, tai daugianaris $f(x)=d_1+(x-c_1)P(x)$ atitinka uždavinio sąlygas. Turėdami galvoje šią pastabą ir pritaikę matematinės indukcijos metodą, nesunkiai galėsite įrodyti, kad egzistuoja daugianaris, atitinkantis uždavinio sąlygas. Vienatumas išplaukia iš 5 teoremos, p. 114.

2-asis būdas. Tarkime, kad $P_k(x)$ (čia k – bet koks iš skaičių $1, 2, \ldots, n+1$) yra n-tojo laipsnio daugianaris, kuris visuose taškuose $c_1, c_2, \ldots, c_n$, išskyrus c_k, įgyja reikšmę 0, o taške c_k – reikšmę 1 (žr. **6.35** uždavinį),. Tada $d_1P_1(x)+d_2P_2(x)+\ldots+$ $+d_{n+1}P_{n+1}(x)$ – ieškomasis daugianaris.

VII SKYRIAUS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI IR NURODYMAI

7.13. Duotąją funkciją parašykite taip:

$$y=\begin{cases}-2, \text{ kai } x\leqslant -1,\\ 2x, \text{ kai } -1<x\leqslant 1,\\ 2, \text{ kai } x>1.\end{cases}$$

7.14. Duotąją funkciją išreikškite taip:

$$y=\begin{cases}2x+2, \text{ kai } -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -2x+2, \text{ kai } 0<x\leqslant 1,\\ 0, \text{ kai } |x|>1.\end{cases}$$

7.81. Pažymėję $2x+1=t$, iš pirmosios lygties gauname $f(t)+2g(t)=t-1$, t.y.

$$f(x)+2g(x)=x-1. \qquad (1)$$

Pažymėję $\frac{x}{x-1}=z$, iš antrosios lygybės turime $f(z)+g(z)=\frac{z}{z-1}$, $z\neq 1$, t.y.

$$f(x)+g(x)=\frac{x}{x-1}, \text{ kai } x\neq 1. \qquad (2)$$

Išsprendę (1)—(2) lygčių sistemą, randame

$$f(x)=\frac{x^2-4x+1}{1-x}, \; g(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}, \; x\neq 1.$$

7.83. Pažymėję pirmoje lygtyje $2x+2=t-1$, gauname $x=\frac{t-3}{2}$, $4x+7=2t+1$,

$$f(t-1)+2g(2t+1)=\frac{t-3}{2}-1, \text{ t.y.}$$

$$f(x-1)+2g(2x+1)=\frac{x-5}{2}.$$

Išsprendę lygčių sistemą, sudarytą iš šios lygties bei duotosios sistemos antrosios lygties, randame

$$f(x)=\frac{1}{2}(7x+11), \; g(x)=-\frac{1}{4}(3x+7).$$

7.84. Pirmoje lygtyje pakeiskite:

$$4x+3=2t+1.$$

7.85. Pirmoje lygtyje pakeiskite

$$3x-1=t+1.$$

7.86. Antroje lygtyje pakeiskite:

$$\frac{x}{x+1}=2t-1.$$

7.87. Pažymėję $x=\frac{1}{t}$, kai $x\neq 0$, turime

$$f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{1}{t},$$

t.y.

$$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}.$$

Toliau šią lygtį išsprendžiame kartu su duotąja lygtimi. Gauname $f(x)=\frac{2-x^2}{3x}$, kai $x\neq 0$.

7.88. Panaudokite keitinį $x=\frac{1}{t}$.

7.89. Panaudokite keitinį $\frac{x}{2x-1}=t$.

7.90. Panaudokite keitinį $\frac{3x-2}{2x+1}=\frac{t}{t-1}$.

IX SKYRIAUS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI IR NURODYMAI

9.16. Įveskite naują nežinomąjį $t=2x^2+3x$.
9.17. Įveskite naują nežinomąjį $t=x^2-2x+4$.

9.19. Pažymėję $t=\sqrt[6]{\frac{5+x}{5-x}}$, gaukite lygtį $t-\frac{2}{t}=1$.

9.20. Lygtį parašykite taip: $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+1}=-\sqrt[3]{x+2}$, po to gautosios lygties abi puses pakelkite kubu. Gausite lygtį $\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}=x+1$, kuri bus duotosios lygties išvada.

9.21. Lygtį parašykite taip:

$$|2-\sqrt{x+2}|+|3-\sqrt{x+2}|=1.$$

9.22. Lygtį pakeiskite dviejų nežinomųjų $u=\sqrt[4]{78+x}$, $v=\sqrt[4]{259-x}$ sistema (plg. p. 248, 249]. Gausite sistemą

$$\begin{cases} u+v=7, \\ u^4+v^4=337. \end{cases}$$

Spręsdami sistemą, panaudokite keitinius $w=u+v$, $t=uv$ ir lygybę $u^4+v^4=w^4-4w^2t+$ $+2t^2$.

9.35. Panaudokite lygybę $3-\sqrt{8}=\frac{1}{3+\sqrt{8}}$.

9.37. Lygtį parašykite taip: $(5^x+5^{1-x})^3=6^3$.

9.38. Lygtį parašykite taip: $(2^x+2^{-x})^3=\left(\frac{5}{2}\right)^3$.

9.50. 1-asis būdas. Duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai $10^{4-x}=x-3$, kuri turi vienintelį sprendinį $x=4$. Iš tiesų, kai $x>4$, tai $10^{4-x}<1<x-3$, o kai $x<4$, tai $10^{4-x}>1$ $>x-3$.

2-asis būdas. Pakeitę $z=x-3$, duotąją lygtį pertvarkome į lygtį $z+\lg z=1$. Kadangi abi funkcijos z bei $\lg z$ (taigi ir jų suma) yra didėjančios, tai ši lygtis gali turėti ne daugiau kaip vieną šaknį. Aišku, kad tokia šaknis bus $z=1$, t.y. $x=4$.

X SKYRIAUS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI IR NURODYMAI

10.24. Iš duotosios sistemos gauname dvi sistemas:

$$\begin{cases} x-y=0, \\ (x+1)(y+1)=12 \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} x^2+y^2+xy=61, \\ (x+1)(y+1)=12. \end{cases}$$

10.25. Iš pradžių pažymėkite $u=x+y$, $v=xy$, o paskui $u+v=w$, $uv=t$.

10.27. Įveskite kintamuosius $x+y=u$, $xy=v$ ir panaudokite formulę $x^5+y^5=$ $=u^5-5u^3v+5uv^2$ (žr. p. 247, (55) formulę).

10.28. Įveskite kintamuosius $u=x+y$, $v=xy$ ir, eliminavę v, gaukite lygtį u^4-8u^3- $9u^2=0$.

10.29. 1-asis būdas. Pakėlę pirmąją lygtį kvadratu ir atėmę (iš gautosios lygties) padvigubintą antrąją lygtį, gauname lygtį $(x^2-y^2)^2=0$. Ši lygtis yra pradinės sistemos išvada; iš jos gauname, kad arba $x=y$, arba $x=-y$.

2-asis būdas. Pakeičiame kintamuosius $x+y=u$, $xy=v$ ir gauname

$$\begin{cases} u^2-2v=u, & (1) \\ u^4-4u^2v+2v^2=\frac{1}{2}u^2. & (2) \end{cases}$$

Pakėlę (1) lygtį kvadratu ir panaudoję (2) lygtį, gauname lygtį $u^2=4v^2$. Iš čia $u=\pm 2v$ ir t.t.

10.32. Pažymėkite $x+y=u$, $x-y=v$, o paskui vieną lygtį panariui padalykite iš kitos (arba iš pirmosios lygties atimkite antrąją, padaugintą iš 5). Tuomet gausime $u=5v$ ir $v^5=1$.

10.33. Iš pirmosios lygties atimkite antrąją; gausite lygtį $(x-y)(x+y+1)=0$.

10.34. Sudėję ir atėmę sistemos lygtis, gaukite sistemą

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+xy+y^2-9)=0, \\ (x+y)(x^2-xy+y^2-11)=0, \end{cases}$$

ekvivalenčią pradinei.

10.35. Iš duotosios sistemos lygčių eliminuokite narius, turinčius y^2, o paskui išspręskite lygtį $(xy)^2-11xy+18=0$.

10.37. Pažymėkite $x+y=u$, $xy=v$. Antroji lygtis pertvarkoma į lygtį $4u^2=9v^2$.

10.38. Pažymėkite $(x-y)^2=u$, $x+y=v$ ir iš sistemos eliminuokite u. Gausite lygtį $v^3=7^3$.

10.39. Pažymėkite $u=x+y$, $v=xy$. Tada sistema atrodys taip:

$$\begin{cases} v(u^2-2v)=\frac{10}{9}u^2, & (1) \\ uv(u^2-3v)=\frac{2}{3}u^3. & (2) \end{cases}$$

Kai $u=0$, tai iš (1) gauname $v=0$. Kai $u\neq 0$, tai, atėmę iš (1) lygties (2) lygtį, padalytą iš u, gauname $v^2=\frac{4}{9}u^2$ ir t.t.

10.40. Pakėlę abi lygtis kvadratu, sudėję bei suprastinę, turėsime $(x^2-1)(y^2-1)=0$. Bet $x^2\neq 1$ (žr. antrąją sistemos lygtį). Todėl $y^2=1$ ir t.t.

10.41. Sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} x(x^2-16)=y(y^2-4), & (1) \\ 5x^2=y^2-4. & (2) \end{cases}$$

Galimi du atvejai: $x\neq 0$ ir $x=0$. a) Kai $x\neq 0$, tai, (1) lygtį padaliję iš (2) lygties, turime

$$y=\frac{x^2-16}{5x}. \quad (3)$$

Įrašę šią y reikšmę į (2) lygtį, gauname lygtį $31x^4+33x^2-64=0$; iš čia $x^2=1$, $x^2=-\frac{64}{31}$ (šį kartą pradinė sistema neturi realiųjų sprendinių). b) Kai $x=0$, tai $y^2=4$.

10.42. Įveskite naujus nežinomuosius $u=x+y$, $v=xy$ ir duotąją sistemą pertvarkykite į sistemą

$$\begin{cases} u(u^2-2v)=5, \\ v^2(u^2-2v)=20, \end{cases}$$

iš kurios gaukite

$$u=\frac{v^2}{4}.$$

10.43. Įveskite naujus nežinomuosius $\frac{x+2y}{xy}=u$, $\frac{x-2y}{xy}=v$, o po to išspręskite kintamųjų $\frac{1}{y}$ ir $\frac{2}{x}$ atžvilgiu dvi tiesines sistemas.

10.44. Įvedę naujus nežinomuosius $x+\frac{y}{2}=u$, $\frac{x}{2}-y=v$, gausite sistemą

$$\begin{cases} u^2-u-2=0, \\ v^2-2v-3=0. \end{cases}$$

10.45. Įrašę $y=ax+b$ į lygtį $x^2-y^2=1$, gauname

$$x^2(1-a^2)-2abx-(1+b^2)=0. \qquad (1)$$

Pradinė sistema su bet kokia realiąja b reikšme turės realiuosius sprendinius tada ir tik tada, kai (1) lygtis turės realiąsias šaknis (nes (1) lygtis kartu su antrąja duotosios sistemos lygtimi sudaro sistemą, ekvivalenčią pradinei). (1) lygties diskriminantas $D=1+b^2-a^2$.

Kai $-1<a<1$, tai $D=b^2+(1-a^2)>b^2\geqslant 0$, ir todėl (1) lygtis turi realiąsias šaknis su bet kokiu realiuoju b. Jeigu $|a|=1$, tai (1) lygtis neturi sprendinių, kai $b=0$.

Kai $|a|>1$, tai $D<0$, jeigu $b=0$. Todėl, kai $|a|\geqslant 1$, galima rasti b (būtent $b=0$), su kuriuo pradinė sistema neturės realiųjų šaknų.

10.46. Aišku, kad skaičių poros $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$ sudaro duotosios lygčių sistemos sprendinius.

Įrodysime, kad sistema neturi kitų realiųjų sprendinių, kai bent vienas natūrinių skaičių m, n yra nelygus vienetui.

Tarkime, kad $(x_0;\ y_0)$ – realusis sistemos sprendinys, nelygus nė vienam iš keturių minėtų sprendinių. Tada $0<|x_0|<1$, $0<|y_0|<1$ ir

$$|x_0|^2+|y_0|^2=x_0^2+y_0^2=1. \qquad (1)$$

Panaudoję laipsnio su natūriniu rodikliu savybes (žr. p. 183), galėsime parašyti, kad

$$|x_0|^2=x_0^2\geqslant x_0^{2m}, \qquad (2)$$

$$|y_0|^2=y_0^2\geqslant y_0^{2n}, \qquad (3)$$

be to, bent viena šių nelygybių yra griežta. Sudėję (2) ir (3) nelygybes ir atsižvelgę į (1) lygybę, gauname

$$x_0^{2m}+y_0^{2n}<1. \qquad (4)$$

Bet skaičių pora $(x_0;\ y_0)$ pagal prielaidą sudaro sistemos sprendinį. Todėl ji turi tenkinti antrąją sistemos lygtį, t.y.

$$x_0^{2m}+y_0^{2n}=1, \qquad (5)$$

o tai prieštarauja (4) sąlygai.

Gautas prieštaravimas ir įrodo, kad duotoji sistema neturi jokių kitų realiųjų sprendinių, išskyrus sprendinius $(1;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$, $(0;\ -1)$.

10.47. Išnagrinėsime du atvejus: $x=y$ ir $x\neq y$. Pirmuoju atveju sistema turi tokius du sprendinius:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ir } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Parodysime, kad sistema neturi sprendinių, kai $x\neq y$.

Iš sistemos antrosios lygties išplaukia, kad

$$x\neq 0,\quad y\neq 0, \qquad (1)$$

o iš pirmosios lygties, remiantis (1) sąlyga, turime, kad

$$|x|<1,\ |y|<1. \qquad (2)$$

Kadangi galioja (1) sąlyga ($xy\neq 0$), tai arba $xy<0$ (x ir y yra priešingų ženklų), arba $xy>0$ (x ir y – to paties ženklo skaičiai).

a) Iš pradžių tarkime, kad $xy<0$. Tuomet arba $x>0$, $y<0$, arba $x<0$, $y>0$. Sakykime, pavyzdžiui, kad

$$x>0,\quad y<0. \qquad (3)$$

Antrąją sistemos lygtį parašome taip:

$$\frac{1-x^{2(m+n+1)}}{x^{2m+1}}=\frac{1-y^{2(m+n+1)}}{y^{2m+1}}. \qquad (4)$$

Tuomet, remiantis (2) ir (3) sąlygomis, gauname, kad (4) lygties kairioji pusė yra teigiama, o dešinioji – neigiama ir, vadinasi, antroji lygtis neturi sprendinių. Atvejis $x<0$, $y>0$ nagrinėjamas analogiškai.

b) Dabar tarkime, kad

$$xy>0. \tag{5}$$

(5) sąlyga, turint galvoje, kad $x \neq y$, galioja tik šiais atvejais:

$$x<y<0, \tag{6}$$

$$y<x<0, \tag{7}$$

$$0<x<y, \tag{8}$$

$$0<y<x. \tag{9}$$

Sakykime, kad galioja (6) sąlyga. Tada

$$x^{2n+1}<y^{2n+1} \tag{10}$$

ir

$$\frac{1}{y^{2m+1}}<\frac{1}{x^{2m+1}}. \tag{11}$$

Sudėję (10) ir (11) nelygybes, turime

$$x^{2n+1}+\frac{1}{y^{2m+1}}<y^{2n+1}+\frac{1}{x^{2m+1}}.$$

Taigi antroji lygtis neturi sprendinių.

Analogiškai galėtume parodyti, kad ir (7), (8) bei (9) atvejais antoji lygtis neturi sprendinių.

10.48. Sudauginkite lygtis.

10.51. Sudėkite lygtis ir raskite xy, xz, yz.

10.54. Sudėkite lygtis ir iš lygties

$$(x+y+z)^2-(x+y+z)=6$$

raskite $x+y+z$.

10.55. Panaudoję antrąją ir trečiąją lygtis, nežinomuosius y, z išreikškite nežinomuoju x ir įrašykite į pirmąją lygtį.

10.56. Panaudoję dvi pirmąsias lygtis, nežinomuosius x ir z išreikškite nežinomuoju y ir įrašykite į trečiąją lygtį.

10.57. Panaudoję antrąją ir trečiąją lygtis, nežinomuosius x, y išreikškite nežinomuoju z ir įrašykite į pirmąją lygtį.

10.58. Sistemą parašykite taip:

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{z}+\dfrac{xz}{y}=\dfrac{15}{2}, \\ \dfrac{yz}{x}+\dfrac{xy}{z}=\dfrac{20}{3}, \\ \dfrac{xz}{y}+\dfrac{yz}{x}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$$

ir išspręskite kaip tiesinę sistemą kintamųjų $\dfrac{xy}{z}$, $\dfrac{xz}{y}$, $\dfrac{yz}{x}$ atžvilgiu.

10.59. Pirmąją ir trečiąją sistemos lygtis parašome taip:

$$(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)=13\ \frac{xy}{z},$$

$$3x-y=\frac{1}{z}. \tag{1}$$

Iš čia gauname $9x^2-10xy+y^2=0$, ir, vadinasi, $\frac{x}{y}=1$ arba $\frac{x}{y}=\frac{1}{9}$. Kai $x=y$, tai iš (1) lygties išplaukia, kad

$$x=\frac{1}{2z}=y. \quad (2)$$

Įrašę šias x ir y reikšmes į antrąją pradinės sistemos lygtį, gauname $z=\frac{4}{15}$. Atvejis $y=9x$ nagrinėjamas analogiškai.

10.60. Išskaidę lygčių kairiąsias puses dauginamaisiais, o paskui sudėję, turime $(x+y+z)^2=9$ ir t.t.

10.61. Iš tapatybės

$$(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3\,(x+y+z)\,(xy+xz+yz)-3xyz$$

raskite $xyz=-4$, paskui išspręskite kubinę lygtį $t^3-t^2-4t+4=0$ (žr. pastabą, p. 250).

10.63. Pažymėję $y+z=u$, $yz=v$, eliminuokite iš sistemos x. Gausite sistemą

$$\begin{cases} u^2-4u-v+1=0, \\ u^2-4u+v+5=0, \end{cases}$$

iš kurios rasite $v=-2$, o paskui $u_1=1$, $u_2=3$.

10.64. Kai vienas nežinomųjų lygus nuliui, tai ir kiti du nežinomieji lygūs nuliui. Kai $xyz\neq 0$, tai sistema ekvivalenti šiai:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{2}, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3} \end{cases}$$

ir t.t.

10.65. Įvesime naujus nežinomuosius:

$$x+y+z=u, \quad xy+xz+yz=v, \quad xyz=w.$$

Tuomet kintamųjų u, v, w atžvilgiu gausime sistemą, turinčią du sprendinius: (6 11; 6) ir (−6; 11; 6). Taigi pradinė sistema išsiskaido į dvi sistemas:

$$\begin{cases} x+y+z=6, \\ xy+xz+yz=11, \\ xyz=6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=-6, \\ xy+xz+yz=11, \\ xyz=6. \end{cases} \quad (1)$$

Pirmoji šių sistemų, remiantis 7 teorema, p. 249, turi šešis sprendinius: (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2, 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1). Norėdami išspręsti antrąją sistemą, turime pagal tą pačią teoremą išnagrinėti kubinę lygtį $t^3+6t^2+11t-6=0$. Parodysime, kad ši lygtis turi tik vieną realiąją šaknį ir todėl antroji sistema (1) neturi realiųjų sprendinių. Iš tiesų kvadratinis trinaris $t^2+6t+11$ su visomis t reikšmėmis yra teigiamas, ir todėl, kai $t<0$, turime $t^3+6t^2+11t-6=t\,(t^2+6t+11)-6<0$. Aišku, kad pustiesėje $t\geqslant 0$ funkcija $t^3+6t^2+11t-6$ monotoniškai didėja ir todėl daugianaris $t^3+6t^2+11t-6$ turi tik vieną realiąją šaknį. Nesunku patikrinti, kad ši šaknis nėra kartotinė (tad ir kitos dvi šaknys nerealios).

10.66. Nesunku įsitikinti, kad, kai $a=0$, sistema neturi sprendinių.

Tarkime, kad $a \neq 0$. Tada $xyz \neq 0$, ir todėl pradinę sistemą galima parašyti taip:

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a}, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=\frac{1}{a}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a^2}. \end{cases}$$

Iš šios sistemos randame $\frac{1}{x}=\frac{2a-1}{2a^2}$ ir t.t.

10.67. Prie kiekvienos lygties abiejų pusių pridėkite po vienetą ir sistemą parašykite taip:

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=8, \\ (y+1)(z+1)=-2, \\ (z+1)(x+1)=-4. \end{cases}$$

Šias lygtis sudauginkite.

10.68. Sulyginkite lygčių kairiąsias puses ir nežinomuosius y bei z išreikškite nežinomuoju x. Įrašę į pirmąją lygtį $z=2x$, $y=\frac{3}{2}x$, gaukite lygtį $4x=x^3$.

10.69. Sistemą parašykite taip:

$$\begin{cases} \frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{7}{12}, \\ \frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{5}{12}, \\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

ir iš jos raskite $\frac{1}{xy}$, $\frac{1}{xz}$, $\frac{1}{yz}$.

10.70. Sistema

$$\begin{cases} (x+2y)^2=100, \\ (y+2z)^2=25, \\ x+y+z=8, \end{cases}$$

kurios pirmosios dvi lygtys yra gautos, sudedant bei atimant pirmąsias dvi pradinės sistemos lygtis, ekvivalenti pradinei sistemai. Ši sistema išsiskaido į keturias tiesines sistemas.

10.71. Pakėlę pirmąją lygtį kvadratu ir atėmę gautąją lygtį iš antrosios lygties, turime

$$2xy-3xz+6yz=54,$$

iš kurios, atsižvelgę į trečiąją lygtį, gauname

$$xy-2y^2+3yz=27. \qquad (1)$$

Toliau pirmąją lygtį dauginame iš y ir gautą rezultatą atimame iš (1) lygties. Turime $27-9y=0$, $y=3$. Belieka išspręsti sistemą

$$y=3,\ x-2y+3z=9,\ 3xz=4y^2,$$

kuri yra pradinės sistemos išvada, ir patikrinti gautuosius sprendinius.

10.72. Išsprendę trečiąją lygtį kaip kvadratinę y atžvilgiu, randame $y=-z$, $y=-2z$ ir t.t.

10.73. Pažymėję $x+y=u$, $xy=v$, sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} u-1=z, & (1)\\ u^2-2v+3=z^2, & (2)\\ u^3-3uv+29=z^3. & (3)\end{cases}$$

Iš (1) ir (2) lygčių randame $(u-1)^2=u^2-2v+3$; iš čia

$$v=u+1. \qquad (4)$$

Iš sistemos eliminuojame z. Dėl to (1) lygtį dauginame iš (2) lygties ir, atsižvelgę į (3) lygtį, turime

$$(u-1)(u^2-2v+3)=u^3-3uv+29. \qquad (5)$$

Iš (5) lygties, turėdami galvoje (4) lygybę, randame $u=5$. Taigi reikia išspręsti sistemą

$$x+y=5,\ xy=6.$$

10.74. Įveskite naujus nežinomuosius $x+y=u$, $xy=v$. Iš sistemos

$$u+z=0,\ u^2-2v-z^2=20,\ u^4-4u^2v+2v^2-z^4=560$$

eliminavę z, gaukite iš jos, kad $v=-10$, o $u_1=3$ arba $u_2=-3$ ir t.t.

10.75. Sistemą parašome taip ($xyz\neq 0$):

$$\begin{cases} xy+xz=\frac{5}{6}(x+y+z), & (1)\\ xy+yz=\frac{4}{3}(x+y+z), & (2)\\ zx+zy=\frac{3}{2}(x+y+z). & (3)\end{cases}$$

Sudėję (1) bei (2) lygtis ir atėmę (3) lygtį, gauname

$$xy=\frac{1}{3}(x+y+z). \qquad (4)$$

Analogiškai randame

$$yz=x+y+z, \qquad (5)$$

$$zx=\frac{1}{2}(x+y+z). \qquad (6)$$

Padaliję (4) ir (6) lygtis iš (5) lygties, turime

$$z=3x,\ y=2x. \qquad (7)$$

Dabar reikia šias z ir y išraiškas įrašyti į bet kurią pradinės sistemos lygtį.

10.76. Pažymėję $x+y=u$, $xy=v$ ir iš sistemos eliminavę z, gauname

$$u=\frac{1}{5}(u^2-2v), \qquad (1)$$

$$u=\frac{1}{7}(u^3-3uv). \qquad (2)$$

Iš (2) išplaukia, kad arba $u=0$ (tada ir $v=0$), arba

$$v=\frac{u^2-7}{3}. \qquad (3)$$

Įrašę (3) išraišką į (1) lygtį, gauname lygtį

$$u^2-15u+14=0$$

ir t.t.

10.77. Kai $(x_0; y_0; z_0)$ – duotosios sistemos sprendinys, tai su bet kokiu t skaičių rinkinys $(tx_0; ty_0; tz_0)$ irgi sudaro šios sistemos sprendinį. Tarkime, kad $x=0$; tuomet iš sistemos gauname, kad $y=z=0$. Kai $x\neq 0$, tai, pažymėję $\frac{y}{x}=u$, $\frac{z}{x}=v$, iš pirmosios ir antrosios lygties turime $1+u=v$, $u^2+v^2=13$. Todėl

$$u_1=2, \quad v_1=3, \tag{1}$$

$$u_2=-3, \quad v_2=-2. \tag{2}$$

Iš trečiosios lygties išplaukia, kad

$$2(1+v^3)=7u^3. \tag{3}$$

Dar pridursime, kad (1) skaičių rinkinys tinka (3) lygčiai, o (2) rinkinys netinka šiai lygčiai.

10.78. Atskliautę skliaustus ir iš pirmosios lygties atėmę antrąją, o paskui trečiąją lygtį, gauname

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0, & (1)\\ (x-z)(x+z-1)=0. & (2)\end{cases}$$

(1) ir (2) lygtys kartu su bet kokia pradinės sistemos lygtimi sudaro sistemą, ekvivalenčią pradinei sistemai. Pradinė sistema išsiskaido į šias keturias sistemas:

$$1)\begin{cases} x-y=0,\\ x-z=0,\\ (x+y)(x+z)=x;\end{cases} \qquad 2)\begin{cases} x-y=0,\\ x+z-1=0,\\ (x+y)(x+z)=x;\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x+y-1=0,\\ x-z=0,\\ (x+y)(x+z)=x;\end{cases} \qquad 4)\begin{cases} x+y-1=0,\\ x+z-1=0,\\ (x+y)(x+z)=x.\end{cases}$$

10.79. Atskliautę skliaustus ir iš pirmosios lygties atėmę antrąją, o paskui iš antrosios trečiąją lygtį, gauname

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-2z-1)=0, & (1)\\ (y-z)(y+z-2x-1)=0. & (2)\end{cases}$$

(1) ir (2) lygtys kartu su pradinės sistemos pirmąja lygtimi sudaro sistemą, ekvivalenčią pradinei sistemai.

10.80. Sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} xy=x+y-z,\\ \frac{xz}{2}=x-y+z,\\ \frac{yz}{3}=y-x+z.\end{cases} \tag{1}$$

Sudėję visas lygtis, gauname

$$x+y+z=xy+\frac{xz}{2}+\frac{yz}{3}. \tag{2}$$

Įrašę (2) į (1) sistemą, turime

$$\begin{cases} 2z=\dfrac{xz}{2}+\dfrac{yz}{3}, \\ 2y=xy+\dfrac{yz}{3}, \\ 2x=xy+\dfrac{xz}{2}. \end{cases} \tag{3}$$

(3) sistemą, kuri ekvivalenti pradinei sistemai; galima parašyti taip:

$$\begin{cases} z\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-2\right)=0, \\ y\left(x+\dfrac{z}{3}-2\right)=0, \\ x\left(y+\dfrac{z}{2}-2\right)=0. \end{cases}$$

10.81. Nagrinėsime du atvejus: $xyz=0$, $xyz\neq 0$. Pirmuoju atveju bent vienas skaičių x, y, z yra lygus nuliui.

Kai vienas skaičių x, y, z yra lygus nuliui, tai iš sistemos išplaukia, kad tada bent vienas iš visų kitų skaičių irgi lygus nuliui. Kai $x=y=0$, tai $z^2=3z$; kai $x=z=0$, tai $y^2=2y$; pagaliau, kai $y=z=0$, tai $x^2=x$.

Dabar tarkime, kad $xyz\neq 0$. Iš sistemos matome, kad tada nė vienas skaičių $x+y$, $x+z$, $y+z$ negali būti lygus nuliui. Padalijęs antrąją lygtį iš pirmosios, o paskui trečiąją iš pirmosios ir pažymėję $\dfrac{y}{x}=u$, $\dfrac{z}{x}=v$, gauname

$$\frac{u+v}{1+v}=2u, \quad \frac{u+v}{1+u}=3v.$$

Iš čia randame $u=\dfrac{7}{5}v$, o po to $v=-\dfrac{1}{7}$, $u=-\dfrac{1}{5}$. Įrašę gautąsias reikšmes $y=-\dfrac{x}{5}$ ir $z=-\dfrac{x}{7}$ į pirmąją pradinės sistemos lygtį, randame x, o paskui y ir z.

10.82. Padauginę antrąją lygtį iš z ir atėmę iš gautosios lygties pirmąją lygtį, gauname $xz^2=-2-z^2$; iš čia

$$x=-\frac{2+z^2}{z^2}. \tag{1}$$

Iš trečiosios lygties turime

$$y=-\frac{15}{x^2 z}, \tag{2}$$

o iš antrosios, atsižvelgę į (2) lygybę, randame

$$-\frac{15}{xz}+2xz=-z. \tag{3}$$

Įrašę x išraišką, apibrėžtą (1) lygybe, į (3) lygtį ir pertvarkę, gauname lygtį $z^4-9z^2+8=0$. Randame šios lygties šaknis, o paskui iš (1) bei (2) lygčių apskaičiuojame x ir y.

10.83. Padauginę pirmąją lygtį iš y, antrąją iš x ir atėmę gautąsias lygtis, turime

$$8z^2x-4z^2y=0. \tag{1}$$

Kadangi pagal trečiąją lygtį $z\neq 0$, tai iš (1) išplaukia, kad

$$y=2x. \tag{2}$$

Pasinaudoję (2) lygybe, iš pirmosios ir trečiosios lygčių eliminuojame y ir z. Gauname lygtį

$$3x^6+16x^3-64=0. \tag{3}$$

(3) lygtis turi dvi realiąsias šaknis $x_1=-2$ ir $x_2=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$. Dabar reikia iš lygčių

$$y=2x,\quad xyz=8$$

apskaičiuoti atitinkamas y ir z reikšmes.

10.84. Pažymėsime

$$u=x+y+z,\quad v=xy+xz+yz,\quad w=xyz.$$

Tuomet duotąją lygčių sistemą galėsime parašyti taip:

$$\begin{cases} a^2u-av+w-a^3=d, & (1)\\ b^2u-bv+w-b^3=d, & (2)\\ c^2u-cv+w-c^3=d. & (3)\end{cases}$$

Suradę iš sistemos (1)–(3) u, v, w, ieškomąją sumą galėtume apskaičiuoti, panaudoję lygybę

$$x^3+y^3+z^3=3w+u(u^2-3v). \tag{4}$$

Sistemą (1)–(3) išspręsime nežinomųjų u, v, w atžvilgiu. Atėmę iš (1) lygties (2) lygtį, o paskui iš (1) lygties (3) lygtį, gauname (suprastinę iš dauginamųjų $b-a$, $c-a$, kurie nelygūs nuliui)

$$\begin{cases} v-(a+b)u+a^2+ab+b^2=0, & (5)\\ v-(a+c)u+a^2+ac+c^2=0. & (6)\end{cases}$$

(Iš (5)–(6) lygčių randame

$$u=a+b+c,\quad v=ab+bc+ac. \tag{7}$$

Įrašę gautąsias u ir v išraiškas iš (7) į (1) lygtį, turime $w=d+abc$, o paskui iš (4) lygybės randame $x^3+y^3+z^3$.

10.85. Sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{1}{2}\,xyz,\\ y^2+z^2=\frac{29}{10}\,xyz,\\ z^2+x^2=\frac{13}{5}\,xyz.\end{cases}$$

Sudėję dvi pirmąsias lygtis ir atėmę trečiąją, gauname

$$y^2=\frac{2}{5}\,xyz. \tag{1}$$

Analogiškai randame

$$z^2=\frac{5}{2}\,xyz, \tag{2}$$

$$x^2=\frac{1}{10}\,xyz. \tag{3}$$

Sudauginę (1)—(3) lygtis, turime

$$(xyz)^2=\frac{1}{10}(xyz)^3;$$

iš čia $xyz=0$ arba $xyz=10$ ir t.t.

10.86. Nagrinėsime du atvejus: $xyz=0$ ir $xyz\neq0$.

Pirmuoju atveju bent vienas skaičių x, y, z lygus nuliui. Tarkime, pavyzdžiui, kad $x=0$. Tuomet iš sistemos išplaukia, kad $yz=0$, t.y. bent vienas skaičių y, z yra lygus nuliui. Kai $x=y=0$, tai sistemai tinka bet koks z. Taigi sistema turi sprendinį $(0;\ 0;\ c)$; čia c — bet koks skaičius. Lygiai taip pat įsitikintume, kad skaičių trejetai $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ b;\ 0)$ (a, b — bet kokie skaičiai) sudaro sistemos sprendinius.

Tarkime, kad $xyz\neq0$. Tuomet, padauginę pirmąją lygtį iš x, antrąją iš y ir trečiąją iš z, duotąją sistemą pakeistume ekvivalenčia sistema:

$$\begin{cases} x^2y^2+x^2z^2=\frac{13}{6}xyz, \\ x^2y^2+y^2z^2=\frac{5}{3}xyz, \\ x^2z^2+y^2z^2=\frac{5}{6}xyz. \end{cases}$$

Sudėję dvi pirmąsias lygtis ir atėmę trečiąją, gauname

$$x^2y^2=\frac{3}{2}xyz. \qquad (1)$$

Analogiškai gauname

$$x^2z^2=\frac{2}{3}xyz, \qquad (2)$$

$$y^2z^2=\frac{1}{6}xyz. \qquad (3)$$

Sudauginę visas (1)—(3) lygtis, randame xyz ir t.t.

10.87. Panagrinėję sistemą, matome, kad $xyz\neq0$. Padauginę pirmąją lygtį iš xy^2z^2, o antrąją iš yx^2z^2 ir atėmę vieną iš kitos, gauname

$$4z(x-y)=0. \qquad (1)$$

Kadangi $z\neq0$, tai iš (1) lygties išplaukia, kad $y=x$ ir t.t.

10.88. Antrąją lygtį dauginame iš y, trečiąją iš z, pirmosios lygties nekeičiame. Išsprendę gautąją sistemą reiškinių x^2y^2, y^2z^2, z^2x^2 atžvilgiu, turime

$$\begin{cases} y^2z^2=-\frac{1}{2}xyz, \\ z^2x^2=-2xyz, \\ x^2y^2=-2xyz. \end{cases} \qquad (1)$$

Ši sistema yra pradinės sistemos išvada. Sudauginę (1) sistemos lygtis, gauname $xyz=0$ arba $xyz=-2$ ir t.t.

10.89. Iš sistemos išraiškos aišku, kad $xyz\neq0$. Sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} x^2+y^2-z^2=\frac{3xy}{z}, \\ y^2+z^2-x^2=\frac{3yz}{x}, \\ z^2+x^2-y^2=-\frac{21xz}{y}. \end{cases} \qquad (1)$$

Sudėję (1) sistemos pirmąją ir antrąją lygtis, o paskui pirmąją ir trečiąją bei pagalian antrąją ir trečiąją, gauname sistemą

$$\begin{cases} 2y^2 = \dfrac{3xy}{z} + \dfrac{3yz}{x}, \\ 2x^2 = \dfrac{3xy}{z} - \dfrac{21xz}{y}, \\ 2z^2 = \dfrac{3yz}{x} - \dfrac{21xz}{y}. \end{cases} \qquad (2)$$

Ši sistema ekvivalenti duotajai sistemai. (2) sistemą galima pertvarkyti taip:

$$\begin{cases} 2xyz = 3x^2 + 3z^2, \\ 2xyz = 3y^2 - 21z^2, \\ 2xyz = 3y^2 - 21x^2. \end{cases} \qquad (3)$$

(3) sistema, kai $xyz \neq 0$, yra ekvivalenti (2) sistemai. Iš (3) sistemos antrosios ir trečiosios lygčių randame

$$z^2 = x^2, \qquad (4)$$

o paskui, panaudoję (4) lygybę, iš (3) sistemos pirmųjų dviejų lygčių gauname

$$y^2 = 9x^2$$

ir t.t.

10.90. Iš sistemos matome, kad $xyz \neq 0$. Padauginę pirmąją lygtį iš x, antrąją iš y ir atėmę vieną iš kitos, gauname

$$\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = -\frac{3}{2}(x-y);$$

iš čia

$$(x-y)\left(x^2 + \frac{5}{2}xy + y^2\right) = 0.$$

Iš šios lygties turime, kad arba $y = x$, arba $y = -2x$, arba $y = -\dfrac{x}{2}$ ir t.t.

10.91. Visose lygtyse xyz perkeliame į dešiniąją pusę. Išsprendę sistemą x^3, y^3, z^3 atžvilgiu, gauname

$$\begin{cases} x^3 = xyz + 2, \\ y^3 = xyz - 3, \\ z^3 = xyz + 3. \end{cases} \qquad (1)$$

Sudauginę (1) sistemos lygtis ir pažymėję $xyz = t$, turime $t^3 = (t+2)(t-3)(t+3)$, arba $2t^2 - 9t - 18 = 0$; iš čia $t_1 = 6$, $t_2 = -\dfrac{3}{2}$. Toliau iš (1) sistemos randame x, y, z.

10.92. Atėmę iš pirmosios lygties antrąją, o paskui iš antrosios lygties trečiąją, gauname

$$(x-y)(x+y+z) = 3,$$

$$(y-z)(x+y+z) = 3;$$

iš čia išplaukia, kad $x = 2y - z$ ir t.t.

10.93. Atėmę iš sistemos pirmosios lygties trečiąją lygtį, gauname $x^2 - z^2 = 2y(x-z)$; iš čia

$$x = z, \qquad (1)$$

arba

$$x + z - 2y = 0. \qquad (2)$$

Sudėję visas pradinės sistemos lygtis, turime

$$(x+y+z)^2=4.$$

Pradinė sistema išsiskaido į šias keturias sistemas:

$$\begin{cases} x=z, \\ x+y+z=2, \\ x^2+2yz=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x=z, \\ x+y+z=-2, \\ x^2+2yz=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+z-2y=0, \\ x+y+z=2, \\ x^2+2yz=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+z-2y=0, \\ x+y+z=-2, \\ x^2+2yz=1. \end{cases}$$

10.94. Atėmę iš sistemos pirmosios lygties antrąją lygtį, gauname

$$(x-y)(x+y-z)=0.$$

Duotoji sistema išsiskaido į dvi sistemas:

$$\begin{cases} y^2+xz=42, \\ z^2+xy=50; \\ x=y, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} y^2+xz=42, \\ z^2+xy=50; \\ z=x+y. \end{cases} \qquad (2)$$

Išspręsime (1) sistemą. Ši sistema ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} y^2+yz=42, & (3) \\ z^2+y^2=50; & (4) \\ x=y. \end{cases}$$

Išsprendę (3)−(4) lygčių sistemą kaip homogeninę, randame $y=\frac{3}{4}z$ arba $y=-7z$. Dabar iš (3) lygties apskaičiuojame $z_1=4\sqrt{2}$, $z_2=-4\sqrt{2}$, $z_3=1$, $z_4=-1$ ir t.t.

10.95. Padauginę sistemos lygtis atitinkamai iš y, z, x bei sudėję, gauname

$$3y+5z-x=0. \qquad (1)$$

Jeigu sistemos lygtis padaugintume atitinkamai iš z, x, y bei sudėtume, tai gautume

$$3z+5x-y=0. \qquad (2)$$

Iš (1)−(2) lygčių sistemos randame (3)

$$y=-2z, \quad x=-z.$$

Įrašę šias y ir x reikšmes į kokią nors vieną pradinės sistemos lygtį, gauname $z^2=1$ ir t.t.

10.96. Padauginę duotosios sistemos lygtis atitinkamai iš $(x-y)$, $(y-z)$, $(z-x)$ ir sudėję, gauname

$$z=3x-2y. \qquad (1)$$

(1) lygtis yra pradinės sistemos išvada. Įrašę (1) išraišką į pradinę sistemą, gauname homogeninę sistemą

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ 3x^2-3xy+y^2=1 \end{cases}$$

ir t.t.

10.97. Įsidėmėtina, kad $z\neq t$, nes kitaip būtų

$$1=\frac{2}{t}=\frac{5}{t^2}=\frac{14}{t^3}\quad (t\neq 0),$$

o tai neįmanoma.

Atsižvelgdami į tai, kad $z\neq t$, pirmųjų dviejų lygčių kintamuosius x ir y išreiškiame kintamaisiais z bei t:

$$x=\frac{2-t}{z-t},\quad y=\frac{2-z}{t-z},$$

o paskui šias x ir y reikšmes įrašome į trečiąją ir ketvirtąją lygtis. Suprastinę iš $z-t$, gauname sistemą

$$\begin{cases} 2(z+t)-zt=5, \\ 2(z^2+zt+t^2)-zt(z+t)=14. \end{cases} \qquad (1)$$

Pažymėję

$$z+t=v,$$

$$zt=w$$

ir išsprendę (1) sistemą, gauname

$$v=4,\quad w=3.$$

Toliau iš sistemos $z+t=4$, $zt=3$ randame $z_1=1$, $t_1=3$; $z_2=3$, $t_2=1$ ir t.t.

10.98. Iš antrosios lygties atėmę trečiąją, o paskui iš antrosios – ketvirtąją, gauname sistemą

$$\begin{cases} (y-x)(z+t)=0, \\ (z-x)(y+t)=0 \end{cases}$$

ir t.t.

10.99. Sudėję visas lygtis, gauname

$$(n-1)(x_1+x_2+\ldots+x_n)=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

iš čia

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}. \qquad (1)$$

Įrašę į duotosios sistemos k-tąją lygtį ($k=1, 2, \ldots, n$) (1) reiškinį, turime

$$x_k=\frac{n(n+1)}{2(n-1)}-k.$$

10.100. Iš pirmosios lygties atimame antrąją:

$$3x_2(x_1-x_3)=x_1-x_3;$$

iš čia $x_2=\frac{1}{3}$, arba $x_1=x_3$.

Tarkime, kad $x_2=\frac{1}{3}$. Tuomet iš pirmosios lygties randame $x_1=x_1+\frac{7}{3}$, o tai neįmanoma. Taigi $x_1=x_3$.

Analogiškai, išnagrinėję antrąją ir trečiąją lygtis, gautume, kad $x_2=x_4$ ir t.t. Taigi, jeigu sistema turi sprendinius, turi galioti ir lygybės

$$x_1=x_3=x_5=x_7=\ \ldots, \qquad (1)$$

$$x_2=x_4=x_6=x_8=\ \ldots \qquad (2)$$

Atėmę iš priešpaskutinės lygties paskutinę lygtį, gauname

$$x_1 = x_{n-1}. \quad (3)$$

Išnagrinėsime du galimus atvejus:

1) n — nelyginis skaičius. Tada iš (1), (2) ir (3) lygybių išplaukia, kad

$$x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = x. \quad (4)$$

Paėmę bet kokią sistemos lygtį ir panaudoję (4) sąlygą, gauname $3x^2 = 2x + 2$; iš čia

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

2) n — lyginis skaičius. Tada

$$x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = x, \; x_2 = x_4 = \ldots = x_n = y.$$

Iš pradinės sistemos gauname vieną lygtį

$$3xy = x + y + 2.$$

Todėl sistema turi be galo daug sprendinių. Kai $x = a$, tai $y = \frac{a+2}{3a-1}$ $\left(a \neq \frac{1}{3}\right)$.

10.101. Pažymėkite $\sqrt[3]{x} = u$, $\sqrt[8]{y} = v$. Gausite sistemą $u + v = 3$, $u^6 + v^6 = 65$. Spręsdami sistemą, pažymėkite $u + v = w$, $uv = t$ ir panaudokite lygybę

$$u^6 + v^6 = w^6 - 6w^4t + 9w^2t^2 - 2t^3.$$

10.102. Pirmąją lygtį parašome taip:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2xy}.$$

Pakėlę abi šios lygties puses kvadratu, gauname

$$x^2 + y^2 = 8 - 8\sqrt{xy} + 2xy. \quad (1)$$

Antra vertus,

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy. \quad (2)$$

Pakėlę pradinės sistemos antrąją lygtį kvadratu, turime

$$x + y = 4 - 2\sqrt{xy},$$

o pakėlę šią lygtį kvadratu, gauname

$$(x + y)^2 = 16 - 16\sqrt{xy} + 4xy. \quad (3)$$

Iš (1), (2) bei (3) lygčių išplaukia, kad $\sqrt{xy} = 1$ ir t.t.

10.103. Pažymėkite

$$\sqrt[4]{\frac{x+y}{y}} = t;$$

tuomet pirmoji lygtis bus tokia:

$$2t^2 - 5t + 2 = 0.$$

10.104. Duotąją sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y} + y\right)^2 - 2\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) = 3, \\ 3\left(\frac{x}{y} + y\right) - 2\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right) = 3. \end{cases}$$

Pažymėję

$$u=\frac{x}{y}+y,\quad v=2(\sqrt{x^2-1}+x),$$

turime sistemą

$$\begin{cases} u^2-v=3, \\ 3u-v=3, \end{cases}$$

kurią išsprendę, gauname

$$u_1=0,\ v_1=-3;\ u_2=3,\ v_2=6.$$

Kai $v=-3$, tai, pertvarkę lygtį

$$2(\sqrt{x^2-1}+x)=-3$$

į lygtį

$$2\sqrt{x^2-1}=-2x-3, \qquad (1)$$

o paskui, pakėlę abi (1) lygties puses kvadratu, gauname $x=-\frac{13}{12}$. Ši šaknis (1) lygčiai yra pašalinė.

Kai $v=6$, tai iš lygties $\sqrt{x^2-1}=3-x$ gauname $x=\frac{5}{3}$, o paskui, išsprendę lygtį $\frac{5}{3y}+y=3$, randame

$$y_1=\frac{9+\sqrt{21}}{6},\quad y_2=\frac{9-\sqrt{21}}{6}.$$

10.105. Sistemą parašykite taip:

$$\begin{cases} \left(\frac{x}{y}+y\right)^2+2(\sqrt{x^2+1}-x)=3, \\ \left(\frac{x}{y}+y\right)+(\sqrt{x^2+1}-x)=0. \end{cases}$$

10.106. Pakėlę sistemos lygtis kvadratu ir sudėję, turime

$$76-2(x^2+y^2)=(x+y)^2. \qquad (1)$$

Sudauginę pradinės sistemos lygtis, gauname

$$y^2-x^2=\sqrt{8\left(16+(x+y)^2\right)},$$

o pakėlę kvadratu, turime

$$(x-y)^2(x+y)^2=8\left(16+(x+y)^2\right). \qquad (2)$$

Sistema, sudaryta iš (1) ir (2) lygčių, yra pradinės sistemos išvada.

Pažymėję $(x+y)^2=u$, $(x-y)^2=v$, (1) ir (2) lygtį parašome taip:

$$\begin{cases} 76=2u+v, \\ uv=8(16+u). \end{cases} \qquad (3)$$

(3) sistema turi du sprendinius:

$$u_1=32,\ v_1=12;\ u_2=2,\ v_2=72.$$

Toliau turime išspręsti sistemą $(x+y)^2=a$, $(x-y)^2=b$ ir patikrinti gautuosius sprendinius.

10.115. Atėmę iš pirmosios lygties antrąją, padaugintą iš 3^{-1-3x}, randame $x=3y-1$. Įrašę šią x reikšmę į pirmąją lygtį, gauname lygti $8\cdot 3^{1-y}=11y-3$, kuri turi tik vieną šaknį $y=1$, nes funkcija $z=8\cdot 3^{1-y}$ yra mažėjanti, o funkcija $z=11y-3$ — didėjanti.

10.116. Sprendimas analogiškas **10.115** uždavinio sprendimui.

10.161. Tarkime, kad v_1, v_2, v — atitinkamai garlaivio, valties, upės tėkmės greitis $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, s — atstumas tarp prieplaukų A ir B (km).

Pagal uždavinio sąlygą sudarome sistemą

$$\begin{cases} \dfrac{2s}{3(v_1-v)}=\dfrac{s}{3(v_2+v)}, \\ \dfrac{s}{v_1-v}+\dfrac{s}{v_1+v}=\dfrac{s-20}{v_2+v}, \\ \dfrac{s}{2(v_1-v)}=\dfrac{s}{2(3v_2+v)}. \end{cases}$$

Iš pirmosios lygties gauname $v_1=2v_2+3v$, o iš trečiosios — $v_1=3v_2+2v$. Vadinasi, $v_2=v$, $v_1=5v$. Įrašę gautąsias v_2 ir v_1 reikšmes į antrąją lygtį, randame $s=120$ km.

10.163. Tarkime, kad v_1, v_2, v_3 — atitinkami pirmojo, antrojo ir trečiojo dviratininkų greičiai $\left(\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, s — atstumas tarp A ir B (km), t — ieškomasis laikas.

Pirmasis dviratininkas bus vienodai nutolęs nuo kitų dviejų, jeigu: a) po pusantros valandos jis bus tarp antrojo ir trečiojo dviratininko; b) po pusantros valandos antrasis ir trečiasis dviratininkai susitiks. Šiuos atvejus atitiks tokios lygtys:

$$3v_1=\frac{3}{2}v_2+s-\frac{3}{2}v_3, \tag{1a}$$

$$\frac{3}{2}v_2+\frac{3}{2}v_3=s. \tag{1b}$$

Pagal antrąją uždavinio sąlygą sudarome lygtį

$$s-2v_3=v_1+v_2. \tag{2}$$

Antrasis dviratininkas bus vienodai nutolęs nuo pirmojo ir trečiojo, jeigu: a) po t valandų jis bus tarp pirmojo ir trečiojo dviratininko, b) po t valandų pirmasis ir trečiasis dviratininkai susitiks. Šiuos atvejus atitiks tokios lygtys:

$$2tv_2=s-tv_3+tv_1, \tag{3a}$$

$$tv_1+tv_3=s. \tag{3b}$$

Išsprendę sistemą, sudarytą iš (1a), (2) ir (3a) lygčių, gauname $t=3$ (h). Sistema, sudaryta iš (1a), (2) ir (3b) lygčių, turi sprendinį $t=\frac{9}{5}$ (h), o sistema iš (1b), (2) ir (3a) lygčių — sprendinį $t=1$ (h). Pagaliau, išsprendę (1b), (2) ir (3b) lygčių sistemą, vėl gauname $t=3$ (h).

10.164. Sakykime, kad v_1, v_2, v_3 — upės tėkmės greičiai atitinka atkarpas CB, AC, BC, u — valties greitis stovinčiame vandenyje, s — atstumas nuo A iki C. Panaudoję uždavinio sąlygas, sudarome lygčių sistemą ($s=u$):

$$\begin{cases} \dfrac{u}{u-v_1}+\dfrac{u}{u-v_2}=\dfrac{7}{2}, \\ \dfrac{u}{u+v_1}+\dfrac{u}{u+v_2}=\dfrac{17}{12}, \\ \dfrac{u}{u-v_1}+\dfrac{u}{u-v_3}=4. \end{cases} \tag{1}$$

Iš šios sistemos reikia apskaičiuoti dydį

$$x=\frac{u}{u+v_3}+\frac{u}{u+v_1}.$$

Pažymėję

$$\frac{v_1}{u}=x_1,\ \frac{v_2}{u}=x_2,\ \frac{v_3}{u}=x_3,$$

(1) sistemą pakeičiame sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_2}=\frac{7}{12}, \\ \frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}=\frac{17}{12}, \\ \frac{1}{1-x_1}+\frac{1}{1-x_3}=4. \end{cases} \tag{2}$$

Pirmąsias dvi (2) sistemos lygtis galima parašyti taip:

$$\begin{cases} 2-(x_1+x_2)=\frac{7}{2}\left(1-(x_1+x_2)+x_1x_2\right), \\ 2+(x_1+x_2)=\frac{17}{12}\left(1+(x_1+x_2)+x_1x_2\right). \end{cases} \tag{3}$$

Ši sistema yra tiesinė nežinomųjų $z_1=x_1+x_2$ ir $z_2=x_1x_2$ atžvilgiu. Ją išsprendę, turime

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{5}{6}, \\ x_1x_2=\frac{1}{6}. \end{cases} \tag{4}$$

Kadangi pagal sąlygą $v_1<v_2$, tai $x_1<x_2$. Tad iš (4) sistemos gauname $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=\frac{1}{2}$, o paskui iš (2) sistemos trečiosios lygties randame $x_3=\frac{3}{5}$.

Vadinasi,

$$x=\frac{1}{1+x_3}+\frac{1}{1+x_1}=\frac{11}{8}\text{ h}.$$

10.165. Tarkime, kad u – valties greitis stovinčiame vandenyje, v_1 ir v_2 – upės tėkmės greičiai pirmojoje ir antrojoje atšakoje $\left(\frac{\text{km}}{\text{min}}\right)$, s – atstumas (km) nuo A iki B.

Tuomet

$$\begin{cases} \frac{s}{u+v_2}-\frac{s}{u+v_1}=21, \\ \frac{s}{u-v_1}-\frac{s}{u-v_2}=70, \\ \frac{s}{2u-v_1}-\frac{s}{2u-v_2}=12. \end{cases} \tag{1}$$

Reikia rasti $\frac{s}{u}$. Pažymėję $\frac{s}{u}=x$, $\frac{v_1}{u}=y$, $\frac{v_2}{u}=z$, (1) sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} \frac{x}{1+z}-\frac{x}{1+y}=21, \\ \frac{x}{1-y}-\frac{x}{1-z}=70, \\ \frac{x}{2-y}-\frac{x}{2-z}=12. \end{cases} \tag{2}$$

Panaikinę (2) sistemoje vardiklius, gauname

$$\begin{cases} x(y-z)=21(1+y+z+yz), \\ x(y-z)=70(1-y-z+yz), \\ x(y-z)=12(4-2y-2z+yz). \end{cases} \tag{3}$$

Iš (3) sistemos turime

$$\begin{cases} 21\left(1+(y+z)+yz\right)=70\left(1-(y+z)+yz\right), \\ 21\left(1+(y+z)+yz\right)=12\left(4-2(y+z)+yz\right). \end{cases} \tag{4}$$

(4) sistema yra tiesinė nežinomųjų $y+z$ ir yz atžvilgiu. Ją išsprendę, gauname

$$y+z=\frac{7}{12}, \quad yz=\frac{1}{12};$$

iš čia

$$y=\frac{1}{3}, \quad z=\frac{1}{4}.$$

Pagaliau iš (3) sistemos randame

$$x=\frac{s}{u}=420 \text{ min}=7 \text{ h}.$$

10.166. Sakykime, kad s – atstumas nuo A iki B, v – tėkmės greitis, v_1 – motorinės valties greitis stovinčiame vandenyje, v_2 – valties greitis stovinčiame vandenyje, kai plaukiama irkluojant.

Tada

$$\begin{cases} \frac{3s}{4(v_1+v)}+\frac{s}{4(v_2+v)}=\frac{11}{6}, \\ \frac{s}{4(v_1+v)}+\frac{3s}{4(v_2+v)}=\frac{7}{2}, \\ \frac{s}{v_1+v}+\frac{s}{v_1-v}=\frac{25}{12}. \end{cases} \tag{1}$$

Reikia rasti

$$\frac{s}{v_2-v}.$$

Pažymėję

$$\frac{v_1}{s}=x, \quad \frac{v_2}{s}=y, \quad \frac{v}{s}=z,$$

(1) sistemą pakeičiame sistema

$$\begin{cases} \frac{3}{4(x+z)}+\frac{1}{4(y+z)}=\frac{11}{6}, & (2)\\ \frac{1}{4(x+z)}+\frac{3}{4(y+z)}=\frac{7}{2}, & (3)\\ \frac{1}{x+z}+\frac{1}{x-z}=\frac{25}{12}. & (4) \end{cases}$$

Išsprendę (2)–(3) lygčių sistemą kaip tiesinę nežinomųjų $\frac{1}{x+z}$ ir $\frac{1}{y+z}$ atžvilgiu, gauname

$$\frac{1}{x+z}=1, \quad \frac{1}{y+z}=\frac{13}{3};$$

iš čia

$$x+z=1, \tag{5}$$

$$y+z=\frac{3}{13}. \tag{6}$$

Įrašę (5) į (4), turime

$$\frac{1}{x-z}=\frac{13}{12},$$

t.y.

$$x-z=\frac{12}{13}. \tag{7}$$

Išsprendę sistemą, sudarytą iš (5)–(7) lygčių, gauname $y=\frac{5}{26}$, $z=\frac{1}{26}$, o paskui apskaičiuojame ieškomąjį dydį

$$\frac{s}{v_2-v}=\frac{1}{y-z}=\frac{13}{2}=6\ \frac{1}{2}\ \text{(h)}.$$

10.167. Sakykime, kad v – upės tėkmės greitis, v_1 – valties greitis stovinčiame vandenyje, v_2 – medžiotojo greitis, s – atstumas nuo A iki B.

Pagal uždavinio sąlygas sudarome lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{s}{v_1+v}-\frac{s}{v_2}=\frac{3}{7}, \\ \frac{s}{v}-\frac{s}{v_2}=4, & (1)\\ \frac{s}{v_1-v}-\frac{s}{v_2}=\frac{7}{3}. \end{cases}$$

Reikia apskaičiuoti dydį $\frac{s}{v_1-v}$. Tarę, kad $\frac{v}{s}=x$, $\frac{v_1}{s}=y$, $\frac{v_2}{s}=z$, (1) sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}-\frac{1}{z}=\frac{3}{7}, \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{z}=4, & (2)\\ \frac{1}{y-x}-\frac{1}{z}=\frac{7}{3}. \end{cases}$$

Iš (2) sistemos eliminuojame x ir y. Dėl to (2) sistemą pertvarkome į sistemą

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{7z}{7+3z}, & (3) \\ x=\dfrac{z}{1+4z}, & (4) \\ y-x=\dfrac{3z}{3+7z}. & (5) \end{cases}$$

Atėmę iš (3) lygties (5) lygtį, gauname

$$2x=\frac{7z}{7+3z}-\frac{3z}{3+7z}. \qquad (6)$$

Iš (4) bei (6) lygčių išplaukia, kad

$$\frac{7z}{7+3z}-\frac{3z}{3+7z}=\frac{2z}{1+4z}. \qquad (7)$$

Pertvarkę (7) lygtį, turime

$$59z^2-38z-21=0;$$

iš čia

$$z=\frac{19\pm 40}{59}.$$

Kadangi $z>0$, tai $z=1$. Tuomet iš (5) lygties gauname $y-x=\frac{3}{10}$. Nežinomasis dydis $\frac{s}{v_1-v}=\frac{1}{y-x}=\frac{10}{3}$ (h).

10 168. Tarkime, kad v_1 – garlaivio greitis stovinčiame vandenyje, v_2 – katerio greitis, v – upės tėkmės greitis, s – atstumas nuo A iki B, t – darbo dienos trukmė.

Pažymėsime

$$\frac{s}{v_1-v}=x, \qquad (1)$$

$$\frac{s}{v_1+v}=y, \qquad (2)$$

$$\frac{s}{v_2-v}=z, \qquad (3)$$

$$\frac{s}{v_2+v}=u. \qquad (4)$$

Tuomet

$$t=9\,(x+y)=5\,(z+u). \qquad (5)$$

Pagal uždavinio sąlygas

$$y+\frac{x}{6}=\frac{1}{3}, \qquad (6)$$

$$\frac{5}{6}\,u=\frac{1}{3}. \qquad (7)$$

Iš (5), (6) ir (7) lygčių gauname $u=\frac{2}{5}$,

$$\begin{cases} x+y=\frac{t}{9}, & (8) \\ x+6y=2, & (9) \\ z+\frac{2}{5}=\frac{t}{5}. & (10) \end{cases}$$

(8)–(10) lygtys sudaro trijų lygčių su keturiais nežinomaisiais x, y, z, t sistemą. Dar trūksta vienos lygties. Šią lygtį gausime iš (1)–(4) lygčių, nes nežinomieji x, y, z, u nėra nepriklausomi. Iš (1)–(4) lygčių išplaukia, kad

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{u}-\frac{1}{z},$$

arba $\left(\text{turint galvoje, kad } u=\frac{2}{5}\right)$

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{5}{2}-\frac{1}{z}. \quad (11)$$

Eliminavę iš (8)–(11) lygčių sistemos nežinomuosius x, y, z, gauname

$$\frac{45}{18-t}-\frac{15}{2(t-3)}=\frac{5}{2}-\frac{5}{t-2}. \quad (12)$$

Pertvarkę (12) lygtį, turime

$$t^3-4t^2-12t=0;$$

iš čia

$$t_1=0,\ t_2=-2,\ t_3=6.$$

Kadangi $t>0$, tai $t=6$.

XI SKYRIAUS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI IR NURODYMAI

11.33. Lygtis pertvarkoma į lygtį

$$2\sin^3 x+2\sqrt{3}\sin^2 x\cos x-3\sin x=0.$$

11.37. $\sin x\cos x(\sin^5 x+\cos^5 x-2)=0.$
Lygtis $\sin^5 x+\cos^5 x=2$ neturi sprendinių.

11.38. $\frac{1}{8}\sin^3 2x(-\cos 2x)=\cos 2x.$

11.39. $\cos 2x(\cos^4 x+\sin^4 x+1)=0.$

11.40. $2\operatorname{tg}^2 2x+\operatorname{tg} 2x-1=0.$

11.41. $\cos^2 x\cos 8x=0.$

11.42. $\cos 2x+\cos 6x+\cos 4x=0.$

11.47. $(\sin 2x-\cos 2x)(3\sin 2x+2\cos 2x)=0.$

11.51. $\cos 4x+\cos 2x=1,\ 2\cos^2 2x+\cos 2x-2=0.$

11.55. $\sin 2x\cos 2x=\cos^2 2x.$

11.58. $(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x-1)=0,\ x\neq\frac{\pi n}{2}.$

11.61. $\sin x+\cos x=t,\ t^2+2t-3=0.$

11.63. $\cos 2x=t,\ t^3+t^2-t=0.$

11.64. $\cos 2x(\sin 4x-1)=0.$

11.65. $\sin 2x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=2.$

11.66. $(\cos x-\sin x)(\cos 2x-\sin 2x)=0.$

11.67. $(\sin x+\cos x)\left(\sin 2x-2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=0.$

11.68. $(\cos x-\sin x)\left(1+\sin x\cos x-(\sin x+\cos x)\right)=0.$

11.69. Du atvejai: a) $\operatorname{tg} x=1$; b) $\operatorname{tg} x>0$, $\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}=0.$

11.70. $\sin 4x(2\sin 6x-1)=0.$

11.73. $3(\operatorname{tg} 3x+\operatorname{ctg} 2x)=4(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x),$

$$\frac{3}{\cos 3x}=\frac{4}{\cos x},\quad 4(\cos 3x-\cos x)+\cos x=0,$$

$$\cos x\left(\sin^2 x-\frac{1}{16}\right)=0,\quad \cos x\neq 0.$$

11.74. $\frac{\cos 3x}{\sin 3x}=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-\frac{\cos x}{\sin x}=-\frac{\cos 3x}{\sin x\cos 2x};$

a) $\cos 3x=0$;

b) $\sin 3x+\sin x\cos 2x=0$, $\sin x(3-4\sin^2 x+1-2\sin^2 x)=0,$

$$\sin^2 x=\frac{2}{3},\qquad \cos 2x=-\frac{1}{3}.$$

11.75. $\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\sin 3x\sin 4x}=0,$

$$\frac{\sin x\cos 4x\cos 3x}{\cos x\sin 3x\sin 4x}=0.$$

11.76. $\frac{1-\cos x}{1-\sin x}\left(\frac{1+\cos x}{1+\sin x}-\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\sin x+\sin^2 x}\right)=0,$

$(\cos x-1)(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=0.$

11.77. $\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{3}$, $\sin 2x-\cos 2x=\cos 2x+\sin 2x+$
$+\sqrt{3}$, $\cos 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

11.78. Lygtį padauginkite iš $\sin\frac{x}{2}$ ir sinusų sandaugą pakeiskite algebrine suma.

11.79. $\sin 2x(1+2\cos x)=\cos x(1+2\cos x).$

11.80. $1-\cos 2x=\sin x-\sin 3x$, $2\sin^2 x+2\sin x\cos 2x=0.$

11.81. Funkcijas $\sin 3x$ ir $\sin 2x$ išreikškite funkcijomis $\sin x$ ir $\cos x$.

11.82. Panaudokite formulę $\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x.$

11.83. Panaudokite formules

$$\sin 4x=2\sin 2x(1-2\sin^2 x),\ \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x.$$

11.84. $(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x+\sin x+\cos x)=0.$

11.85. $\sin 2x=t$, $\sin^4 x+\cos^4 x=1-\frac{t^2}{2}$, $t^2+t-1=0.$

11.86. $2\cos x=\cos 2x(1+\cos 2x)$, $\cos x(\cos x\cos 2x-1)=0.$

11.87. $2+4(1-2\sin^2 2x)=\frac{2}{\sin 2x}$, $3\sin 2x-4\sin^3 2x=1$, $\sin 6x=1,$

11.88. Pažymėkite $\cos 2x=t$. Tuomet $\cos 4x=2t^2-1$, $\sin^6 x=\left(\frac{1-t}{2}\right)^3$, t^3-t^2- $-2t=0$.

11.89. $\cos 2x=t$, $t^3-3t^2+2t=0$.

11.90. $\cos 2x=t$, $4t^3+6t^2-4t=0$.

11.91. Pažymėkite $\sin 2x=t$ ir panaudokite formulę

$$\sin^6 x+\cos^6 x=1-\frac{3}{4}\sin^1 2x$$ (žr. p. 277).

11.93. Panaudokite formulę

$$\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+x\right).$$

11.94. $1+\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\frac{1+\cos x \sin x}{\cos x \sin x}$,

$$\sec^2 x+\operatorname{tg} x=\frac{1+\cos x \sin x}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{cosec}^2 x+\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

11.95. Panaudokite formulę

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} 3x=-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} 3x.$$

11.96. Panaudoję formulę $\operatorname{tg} 4x-\operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} x(1+\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x)$, pradinę lygtį pakeiskite lygtimi

$$(1+\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x)(4\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} 2x)=0.$$

11.97. Panaudokite formulę $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ (teisingą, kai $x\neq\frac{\pi}{4}+$ $+k\pi$); funkcijas $\operatorname{ctg} x$ ir $\operatorname{ctg} 2x$ išreikškite funkcija $\operatorname{tg} x$.

11.98. Panaudoję formulę

$$\operatorname{tg}^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \quad \left(x\neq\pm\frac{\pi}{4}+k\pi\right),$$

pradinę lygtį pakeiskite lygtimi $\operatorname{tg} 4x=-4$.

11.99. $\frac{4\sin 4x \sin 6x}{\sin^2 2x}=8\cos 2x$, $\cos 2x\left(\frac{\sin 6x}{\sin 2x}-1\right)=0$.

11.100. $(\sin x-\cos x)(2+\sin x+\cos x+\sin x\cos x)=0$.

11.101. $\cos x(\cos x-\sin x+2\sin x\cos x+1)=0$.

11.102. $(\sin 2x-\cos 2x)(\cos 2x+\sin 2x+1)=0$.

11.103. Pritaikę formules

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x=\cos x(1-4\sin^2 x),$$

$\sin 4x=4\sin x\cos x(1-2\sin^2 x)$, pradinę lygtį pertvarkykite į lygtį $\cos x(\sin x-1)$ $(6\sin^2 x+\sin x-2)=0$.

11.104. Pritaikykite formules

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin x\cos x(\sin x+\cos x).$$

11.105. $2\sin 4x\cos 2x-\sin 4x=2\cos^2 2x-\cos 2x$,

$$\cos 2x(2\cos 2x-1)(2\sin 2x-1)=0.$$

11.106. $\sin 2x+\sin 6x+1+\cos 4x=\cos 2x+\sin 4x$,

$$2\sin 4x\cos 2x+2\cos^2 2x=\cos 2x+\sin 4x,$$

$$\cos 2x\,(2\cos 2x-1)\,(1+2\sin 2x)=0.$$

11.107. $\sin x+2\sin x\cos x+4\sin^2 x\cos x=2\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$,

$$(2\cos x+1)\,(2\sin^2 x+\sin x-1)=0.$$

11.108. $4\sin x\cos^2 x+2\sin x+3\cos x=1+2\cos^2 x+6\sin x\cos x$,

$$2\sin x\,(1+2\cos^2 x-3\cos x)=1+2\cos^2 x-3\cos x.$$

11.109. $\dfrac{\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x}{\sin x\cos 2x}=\dfrac{\sin 5x-\sin x}{\sin x\sin 5x}$,

$$\frac{\cos 3x}{\cos 2x}=\frac{2\sin 2x\cos 3x}{\sin 5x},\quad \cos 3x\,(\sin 5x-\sin 4x)=0;$$

tikrindami šaknis, nepamirškite, kad $\cos 2x\neq 0$, $\sin 5x\neq 0$.

11.110. Pritaikę formules

$$\frac{2}{\sin 4x}=\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} 2x,\quad \operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x};\quad \operatorname{tg} 3x=\operatorname{tg} x\,\frac{3-\operatorname{tg}^2 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x},$$

pradinę lygtį pakeiskite lygtimi

$$\operatorname{tg} x\,(3\operatorname{tg}^4 x-2\operatorname{tg}^2 x-5)=0.$$

11.111. $1-\cos 2x+\sin 2x+2\cos 3x\,(\sin x+\cos x)-2\sin x-2\cos 3x=0$,

$$\sin^2 x+\sin x\cos x-\sin x+\cos 3x\,(\cos x+\sin x-1)=0,$$

$$(\cos x+\sin x-1)\,(\cos 3x+\sin x)=0.$$

11.112. Turime $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{4}}{\sin x\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)}=\dfrac{2}{\sqrt{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1}$

$$1+\sin 2x+\cos 2x=1+\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Taigi lygtis įgys išraišką

$$2\sin 4x\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1}\right)=2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right),$$

$$\sin 4x\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1=\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 4x,$$

$$\sin 4x\left(\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0,\quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

11.113. $\operatorname{tg} x=t$, $t^2-4at+a^2+3=0$.

11.114. Pažymėję $\sin x=t$, gauname lygtį $t^2-6t+4a^2-3=0$, turinčią šaknis

$$t_1=3-2\sqrt{3-a^2},\quad t_2=3+2\sqrt{3-a^2}.$$

Kai $|a| \leqslant \sqrt{3}$, tai šaknys yra realios, be to, $t_2 > 1$. Pradinė lygtis turi sprendinius, kai $|t_1| \leqslant 1$, t.y.

$$-1 \leqslant 3 - 2\sqrt{3-a^2} \leqslant 1.$$

11.115. Pažymėję $\sin x + \cos x = t$, gauname lygtį $t^2 - 2B\sqrt{2}\,t - 6B^2 = 0$; iš čia $t_1 = 3B\sqrt{2}$, $t_2 = -B\sqrt{2}$, t. y. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 3B$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -B$.

11.116. Pažymėkite $\sin x - \cos x = t$.

11.117. $1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = a$, $\cos 4x = 4a - 3$.

11.118. $\cos 2x = t$, $t^2 + (2B+1)\,t - 2\,(2B+1)^2 = 0$.

11.119. $\cos 2\,x = t$, $t^2 + 2at + 1 = 0$.

11.120. Lygtis $a\cos x + b\sin x + c = 0$ turi sprendinius, kai $c^2 \leqslant a^2 + b^2$; lygtis $a\operatorname{tg} x + b\operatorname{ctg} x + 2c = 0$ turi sprendinius, kai $a = 0$, taip pat, kai $a \neq 0$ ir kvadratinė lygtis $at^2 + 2ct + b = 0$ turi realiuosius sprendinius, t.y. kai $c^2 \geqslant a\,b$.

Jeigu pirmoji uždavinio lygtis neturi sprendinių, tai $c^2 > a^2 + b^2$. Bet tada, aišku, $c^2 > ab$ (nes $a^2 + b^2 \geqslant ab$). Iš to išplaukia, kad antrcji lygtis turi sprendinius.

11.121. Sandaugas $\sin(x+\alpha)\sin(x+3\alpha)$, $\cos(x+\alpha)\cos(x+3\alpha)$ pakeiskite suma. Gausite lygtį $\big(\sin(x+2\alpha) - \cos(x+2\alpha)\big)\cos 2\alpha = \big(\sin(x+2\alpha) + \cos(x+2\alpha)\big)\cos(2x + 4\alpha)$. Pritaikę formulę $\cos(2x+4\alpha) = \cos^2(x+2\alpha) - \sin^2(x+2\alpha)$, lygtį parašykite taip:

$$\big(\sin(x+2\alpha) - \cos(x+2\alpha)\big)\big(\cos 2\alpha + 1 + \sin(2x+4\alpha)\big) = 0.$$

11.122. I-asis būdas. $1 - \sin 2x = \operatorname{ctg} x - 1$,

$$(\cos x - \sin x)^2 = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x}, \quad (\cos x - \sin x)(\cos x \sin x - \sin^2 x - 1) = 0.$$

2-asis būdas. $\sin 2x$ ir $\operatorname{ctg} x$ išreikškite $\operatorname{tg} x$. Gausite lygtį $2\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$, turinčią šaknį $\operatorname{tg} x = 1$.

11.123. Pažymėkite $\cos 2x - \frac{1}{\cos 2x} = t$, $t^2 - t - 2 = 0$.

11.124. Pažymėję $x + \frac{\pi}{4} = t$, gauname $\sin^3 t = \sin t - \cos t$, $\sin t\cos^2 t - \cos t = 0$.

11.125. $\cos x$ ir $\cos^2\frac{3}{4}x$ išreikškite nežinomuoju $t = \cos\frac{x}{2}$:

$$4t^3 - 4t^2 - 3t + 3 = 0,$$

$$(4t^2 - 3)(t - 1) = 0.$$

11.126. Pažymėkime $\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2} = y$; tada $3y = \pi - \left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{10}\right)$. Taigi gauname lygtį $\sin(\pi - 3y) = 3\sin y$. Toliau pritaikykite formulę $\sin 3y = 3\sin y - 4\sin^3 y$.

11.127. Padauginę abi lygties puses iš $8\sin\frac{x}{5}$, gauname

$$\sin\frac{8x}{5} = \sin\frac{x}{5}.$$

Duotajai lygčiai tiks tos ir tik tos šios lygties šaknys, kurios nebus lygties $\sin\frac{x}{5} = 0$ šaknys.

11.128. Panaudoję formules

$$\sin^3 x=\frac{3\sin x-\sin 3x}{4},\quad \cos^3 x=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4},$$

gausite lygtį $3\cos 2x+\cos 6x=\frac{1}{2}$. Šią lygtį, pritaikę ką tik parašytą formulę funkcijai $\cos^3 2x$, pakeičiame lygtimi $\cos^3 2x=\frac{1}{8}$.

11.129. Sandaugas $\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-3x\right)$ ir $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+3x\right)$ pakeitę sumomis, lygtį parašome taip:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\left(\cos 2x-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-4x\right)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\left(\cos 2x-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+4x\right)\right)=0.$$

Toliau, pakeitę sandaugas

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}-4x\right) \text{ ir } \sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}+4x\right)$$

sumomis, gauname lygtį

$$\cos 2x\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin(\pi-6x)\right)+\frac{1}{2}\left(\sin\left(-2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin(\pi+6x)\right).$$

Kadangi $\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=2\sin\frac{\pi}{3}\cos 2x=\sqrt{3}\cos 2x$,

$$\sin(\pi+6x)+\sin(\pi-6x)=0,$$

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(-2x-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}\cos 2x,$$

tai lygtį galima parašyti taip:

$$\cos 2x\left(\cos 2x+\frac{1}{2}\right)=0.$$

11.130. Pritaikę formulę $2\operatorname{ctg} 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\alpha$ $\left(\alpha\neq\frac{k\pi}{2}\right)$, turime

$$8\operatorname{ctg} 24x+4\operatorname{tg} 12x=4\operatorname{ctg} 12x,$$

$$4\operatorname{ctg} 12x+2\operatorname{tg} 6x=2\operatorname{ctg} 6x,$$

$$2\operatorname{ctg} 6x+\operatorname{tg} 3x=\operatorname{ctg} 3x.$$

Taigi gauname lygtį $\operatorname{ctg} 3x=\operatorname{tg} 2x$, arba

$$\frac{\cos 5x}{\sin 3x\cos 2x}=0.$$

11.131. Išsprendę duotąją lygtį kaip kvadratinę nežinomojo $\cos 3x$ atžvilgiu, gauname

$$\cos 3x=\frac{\cos^4 x\pm\sqrt{\cos^8 x-\cos^2 x}}{2}. \tag{1}$$

Kai $\cos x=0$, tai iš (1) lygybės turime $\cos 3x=0$. Kai $|\cos x|=1$, tai iš (1) lygybės gauname $\cos 3x=\frac{1}{2}$, o tai prieštarauja sąlygai $|\cos x|=1$. Pagaliau, kai $0<|\cos x|<1$, tai $\cos^8 x<\cos^2 x$ ir (1) lygtis neturi sprendinių.

Taigi pradinės lygties sprendiniai turi tikti lygtims $\cos x=0$ ir $\cos 3x=0$. Todėl $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$.

Patikrinę įsitikiname, kad reikšmės $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$ tinka pradinei lygčiai.

11.132. Uždavinys analogiškas pirmesniajam.

11.133. Lygtį galima parašyti taip:

$$(\sin x+\cos x)\left(\sin^4 x-\sin^3 x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos^3 x+\cos^4 x+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=0.$$

Reiškinys, esantis antruosiuose skliaustuose, yra lygus

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x+\frac{3}{\sqrt{2}}=$$

$$=1-\sin^2 x\cos^2 x-\sin x\cos x+\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Kadangi $|\sin x\cos x|\leqslant\frac{1}{2}$, tai

$$|\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x|\leqslant\frac{3}{4}<1+\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Vadinasi, reiškinys, kuris yra antruosiuose skliaustuose, nė su viena x reikšme nėra lygus nuliui. Todėl pradinė lygtis ekvivalenti lygčiai

$$\sin x+\cos x=0.$$

11.134. Pažymėsime $\sin^2 x=u$, $\cos^2 x=v$. Taigi, norėdami išspręsti lygtį

$$\sin^{2m} x+\cos^{2n} x=1,$$

turime rasti lygčių sistemos

$$\begin{cases} u^2+v^2=1, \\ u^{2m}+v^{2n}=1 \end{cases}$$

realiuosius sprendinius. Tokia sistema (žr. **10.46** uždavinį) turi realiuosius sprendinius $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$. Vadinasi, pradinei lygčiai tiks tik tos reikšmės, su kuriomis arba $|\sin x|=1$, arba $|\cos x|=1$, t.y. $x=\frac{\pi n}{2}$.

11.135. Pažymėję $\sin x=u$, $\cos x=v$, gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} u^2+v^2=1, \\ u^{2n+1}+\dfrac{1}{v^{2m+1}}=v^{2n+1}+\dfrac{1}{u^{2m+1}}. \end{cases}$$

Ši sistema (žr. **10.47** uždavinį) turi du realiuosius sprendinius:

$$u=v=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad u=v=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Taigi gauname $\sin x=\cos x$, $x=\frac{\pi}{4}+\pi n$.

11.147. Kadangi $|\sin 2x\cos y|\leqslant 1$, tai sistema gali turėti sprendinius tik tada, kai $a=0$.

11.148. Iš pirmosios lygties turime $\sin x = -\frac{\cos^2 y}{3\sin y}$ ($\sin y \neq 0$, nes kitaip būtų $\sin y = \cos y = 0$). Įrašę į antrąją lygtį bei pertvarkę, gauname $2\cos^2 2y + 25\cos 2y - 13 = 0$; iš čia $\cos 2y = \frac{1}{2}$. Tuomet iš antrosios lygties turime $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Sistema

$$\begin{cases} \cos 2y = \frac{1}{2}, \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

yra pradinės sistemos išvada.

11.149. Sandaugą $\cos x \cos y$ pakeiskite suma.

11.150. Sistema ekvivalenti šiai sistemai:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

11.151. Iš pirmosios lygties gauname

$$\cos(x+y) = 0, \quad x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ir t.t.}$$

11.152. Antrąją lygtį pertvarkome į lygtį

$$\sin^2 2x + \sin^2 2y = 0;$$

iš čia

$$x = \frac{\pi k}{2}, \quad y = \frac{\pi n}{2}. \qquad (*)$$

Bet kokia skaičių x ir y pora, kai jie išreikšti formulėmis (*), tinka pirmajai lygčiai.

11.153. Pakėlę lygtis kvadratu ir sudėję, gauname lygtį

$$\sin^4 x + \cos^8 x = 1,$$

kuri yra duotosios sistemos išvada. Šios lygties sprendiniai yra

$$x = \frac{\pi n}{2}$$

(žr. **11.134** uždavinį).

Kai $x = \pi k$, tai iš pradinės sistemos turime $\sin y = 0$, $\cos y = 1$, todėl $y = 2\pi m$.

Kai $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, tai $\cos y = 0$, $\sin y = 1$; iš čia

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi m.$$

11.154. Padaliję pirmąją lygtį iš antrosios, turime

$$\cos x = 2\cos y. \qquad (1)$$

Įrašę (1) lygybę į pirmąją lygtį ir suprastinę iš $\cos y \neq 0$, gauname lygtį

$$3\sin x + 6\sin y = 4. \qquad (2)$$

Sistema, sudaryta iš (1)—(2) lygčių, ekvivalenti pradinei sistemai ir analogiška sistemai, išnagrinėtai pavyzdyje, p. 298.

11.155. Sudėję lygtis bei pakeitę sinusų ir kosinusų sumas sandaugomis, gauname lygtį

$$\cos\frac{x-y}{2}\left(3\sin\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)=0. \quad (1)$$

Ši lygtis kartu su pradinės sistemos pirmąja lygtimi sudaro sistemą, ekvivalenčią pradinei sistemai.

(1) lygtis išsiskaido į dvi lygtis:

a) $\cos\frac{x-y}{2}=0,\ x-y=\pi(2k+1);$ (2)

b) $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{1}{3},\ x+y=2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n.$ (3)

Dabar reikia iš (2) ir (3) lygčių nežinomąjį y išreikšti nežinomuoju x, įrašyti į pradinės sistemos pirmąją lygtį, o paskui išspręsti lygtį, analogišką lygčiai

$$a\sin x+b\cos x=0.$$

11.156. Antrąją lygtį galima parašyti taip:

$$\cos x-\cos(x+2y)=\cos x,\ \text{arba}\ \cos(x+2y)=0;$$

iš čia

$$x=\frac{\pi}{2}-2y+\pi n. \quad (1)$$

Įrašę šią x reikšmę į pirmąją sistemos lygtį, turime

$$\operatorname{tg}2y+\sin 2y=\sin 4y,$$

$$\sin 2y\,(1+\cos 2y-2\cos^2 2y)=0$$

ir t.t.

11.157. Antrąją lygtį galima parašyti taip:

$$\sin(2x-y)+\sin y=\sin y,$$

arba $\sin(2x-y)=0$. Iš čia

$$y=2x-\pi k. \quad (1)$$

Įrašę šią y reikšmę į pirmąją sistemos lygtį, gauname lygtį

$$4\operatorname{tg}3x=3\operatorname{tg}4x.$$

šreiškę $\operatorname{tg}3x$ ir $\operatorname{tg}4x$ funkcija $\operatorname{tg}x$ ir pertvarkę, turime

$$\operatorname{tg}^3x\,(\operatorname{tg}^4x+7)=0;$$

iš čia $\operatorname{tg}x=0,\ x=\pi n.$

11.158. Pirmąją lygtį parašykite taip:

$$(2\cos x-\operatorname{tg}y)^2=0.$$

Įrašę į antrąją lygtį $\operatorname{tg}y=2\cos x$ bei pertvarkę, gausime lygtį

$$\sin x\,(\sin x+\cos x+1)=0.$$

11.159. Pirmąją lygtį parašome taip:

$$2\cos x\sin y\cos y=\sin^2 y. \quad (1)$$

Iš antrosios lygties išplaukia, kad $\sin y\cos y\neq 0$. Todėl (1) lygtį galima pakeisti lygtimi

$$\operatorname{tg}y=2\cos x. \quad (2)$$

Įrašę (2) lygybę į pradinės sistemos antrąją lygtį bei pertvarkę, gauname

$$(\sin x-\cos x)(2\sin x+1-\sin x\cos x-\cos^2 x)=0,$$

arba

$$(\sin x-\cos x)\sin x(\sin x-\cos x+2)=0 \text{ ir t.t.}$$

11.160. Pakėlę duotosios sistemos lygtis kvadratu ir sudėję, gauname lygtį

$$2a\sin(x+y)=2a, \qquad (1)$$

kuri yra pradinės sistemos išvada.

Galimi du atvejai: $a=0$, $a\neq 0$.

Kai $a=0$, tai pradinė sistema atrodo taip:

$$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Taigi $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$, o y gali įgyti bet kokias reikšmes. Kai $a\neq 0$, tai iš (1) lygties gauname $\sin(x+y)=1$; iš čia

$$y=\frac{\pi}{2}+2\pi k-x. \qquad (2)$$

Įrašę šią y reikšmę į pradinę sistemą, turime

$$(1+a)\sin x=\frac{1+a}{\sqrt{2}}, \quad (1+a)\cos x=\frac{1+a}{\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

Iš (3) lygybių išplaukia, kad reikia atskirai išnagrinėti atvejį $a=-1$. Kai $a=-1$, tai pradinė sistema tampa tokia:

$$\begin{cases} \sin x=\cos y, \\ \cos x=\sin y; \end{cases}$$

iš čia $x+y=\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

Kai $a\neq -1$, tai iš (3) lygčių gauname, kad $x=\frac{\pi}{4}+2\pi m$, o paskui iš (2) lygties randame $y=\frac{\pi}{4}+2\pi l$. Gautieji sprendiniai tinka pradinei sistemai.

11.161. Sudauginę pradinės sistemos lygtis, gauname lygtį

$$a\cos(2x+y)\cos x=a\cos(x+2y)\cos y,$$

kuri yra pradinės sistemos išvada. Šią lygtį parašome taip:

$$2\big(\cos(3x+y)+\cos(x+y)\big)=2\big(\cos(x+3y)+\cos(x+y)\big),$$

arba

$$\cos(3x+y)=\cos(x+3y).$$

Iš čia arba

$$x-y=\pi k, \qquad (1)$$

arba

$$x+y=\frac{\pi k}{2}. \qquad (2)$$

Kai galioja (1) lygybė, tai iš sistemos pirmosios lygties randame $a\cos 3y=\cos y$. Todėl, panaudoję formulę

$$\cos 3y=4\cos^3 y-3\cos y,$$

turime

$$\cos y\,(3a+1-4a\cos^2 y)=0,$$

arba

$$\cos y\,(a+1-2a\cos 2y)=0.$$

Vadinasi,

$$\text{a) } y=\frac{\pi}{2}+\pi n, \tag{3}$$

$$\text{b) } y=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a+1}{2a}+\pi m. \tag{4}$$

Kai galioja (2) lygybė, tai iš pirmosios lygties gauname $\cos y=0$.

Nesunku įsitikinti, kad bet kokia skaičių (x, y) pora, apibrėžta ir (1), (3) formulėmis, ir (1), (4) formulėmis, tinka ir antrajai pradinės sistemos lygčiai.

11.162. Sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} 4\sin(3x+2y)=-\sin x, \\ \sin y=-4\sin(2x+3y). \end{cases} \tag{1}$$

Sudauginę (1) sistemos lygtis, gauname lygtį

$$\sin(3x+2y)\ \sin y=\sin(2x+3y)\ \sin x, \tag{2}$$

kuri yra pradinės sistemos išvada.

Pakeitę šias trigonometrinių funkcijų sandaugas sumomis, gauname lygtį

$$\cos(3x+y)=\cos(x+3y);$$

iš čia

$$x-y=\pi n \tag{3}$$

arba

$$2x+2y=\pi k. \tag{4}$$

Kai galioja (2) lygybė, tai iš pirmosios pradinės sistemos lygties, pertvarkę ją, gauname

$$\sin y\,(16\cos^2 2y+8\cos 2y-3)=0.$$

Kai galioja (3) lygybė, tai $\sin y=0$.

11.163. Sistemą parašome taip:

$$\begin{cases} (\sin x+2\cos y)^2+(\sin y+2\cos x)^2=1, \\ (\sin x+2\cos y)+(\sin y+2\cos x)=1. \end{cases}$$

Tuomet pradinė sistema išsiskaido į dvi sistemas:

$$\begin{cases} \sin x+2\cos y=1, \\ \sin y+2\cos x=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x+2\cos y=0, \\ \sin y+2\cos x=1. \end{cases}$$

Kiekviena šių sistemų yra analogiška sistemai, išnagrinėtai pavyzdyje, p. 298.

11.164. Sistemą parašykite taip:

$$(3\sin x-\cos y)^2+(3\sin y-\cos x)^2=4,$$

$$(3\sin x-\cos y)+(3\sin y-\cos x)=2.$$

11.165. Išsprendę antrąją lygtį kaip kvadratinę nežinomojo $\sin x$ atžvilgiu, gauname

$$\sin x=-\cos y\pm\sqrt{-(1-2\sin y)^2}. \tag{1}$$

(1) reiškinyje esantis pošaknis yra neneigiamas tik tada, kai $1-2\sin y=0$, t.y. kai

$$\sin y=\frac{1}{2}. \qquad (2)$$

Tuomet iš (1) lygybės randame

$$\sin x=-\cos y. \qquad (3)$$

Iš (2) ir (3) lygties išplaukia, kad

$$\cos 2y=\frac{1}{2}, \ \cos 2x=-\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

Panaudoję (4) lygybes, iš pradinės sistemos pirmosios lygties turime

$$\cos x=\frac{1}{2};$$

iš čia

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k.$$

Iš (2) lygties gauname

$$y=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,$$

o atsižvelgę į (3) sąryšį, turime

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, \ y=\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}+2\pi m.$$

11.166. Uždavinys analogiškas pirmesniajam. Iš antrosios lygties randame

$$\cos x=-\cos y\pm\frac{1}{2}\sqrt{-(1-2\sin y)^2};$$

iš čia

$$\sin y=\frac{1}{2}, \ \cos x=-\cos y, \ \cos 2y=\frac{1}{2}, \ \cos 2x=\frac{1}{2}.$$

Tuomet iš pirmosios lygties turime

$$\sin x=\frac{1}{2}.$$

Tą patį rezultatą buvo galima gauti kitaip. Antrąją lygtį pakeičiame lygtimi

$$4(\cos x+\cos y)^2+(2\sin y-1)^2=0;$$

iš čia

$$\cos x+\cos y=0, \ 2\sin y-1=0$$

ir t.t.

XII SKYRIAUS UŽDAVINIŲ SPRENDIMAI IR NURODYMAI

Šio skyriaus uždavinių sprendimuose ir nurodymuose vieni ar kiti teiginiai dažnai formuluojami, nepagrindžiant (pavyzdžiui, kad trikampiai yra panašūs, tiesės lygiagrečios, kad, remiantis geometriniais samprotavimais, vieną kvadratinės lygties šaknį galima atmesti ir kt.). Tačiau, norint išspręsti uždavinius iki galo, visus šiuos teiginius reikės pagrįsti.

12.21. Tarkime, kad O_1, O_2 – vienodų vienas kitą liečiančių skritulių, įbrėžtų į stačiojo trikampio ABC smailiuosis kampus, centrai (174 pav.), E, F – taškai, kuriuose šie skrituliai liečia įžambinę AB, O – įbrėžto į trikampį skritulio centras, K – taškas, kuriame šis skritulys liečia įžambinę.

174 pav.

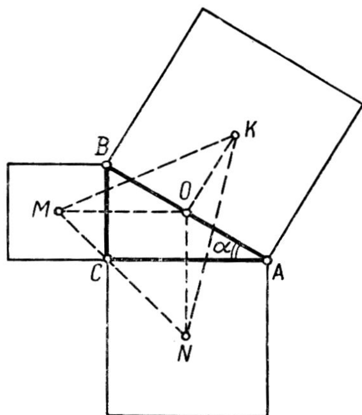
Pažymime $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$, $|OK|=r$, $|O_1E|=|O_2F|=x$. Pagal uždavinio sąlygą $\pi r^2=2\pi x^2$, t. y. $r=$ $=x\sqrt{2}$.

Iš trikampių OAB ir OO_1O_2 panašumo turime

$$\frac{c}{2x}=\frac{r}{r-x}, \quad r=\frac{c(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Iš pastarosios lygybės bei formulės $r=\dfrac{a+b-c}{2}$ gauname $c=\dfrac{a+b}{\sqrt{2}}$. Vadinasi, $c^2=$ $=a^2+b^2=\dfrac{(a+b)^2}{2}$, $(a-b)^2=0$, $a=b$.

Taigi kiekvienas smailusis trikampio kampas lygus $\dfrac{\pi}{4}$.



175 pav.

176 pav.

12.22. Tarkime, kad M, N, K – kvadratų, nubraižytų ant stačiojo trikampio ABC kraštinių, centrai (175 pav.) O – įžambinės AB vidurio taškas, $|AB|=c$, $\widehat{BAC}=$ $=\alpha$. Tada $\widehat{KON}=\pi-\alpha$, $\widehat{MON}=\dfrac{\pi}{2}$, $\widehat{KOM}=\dfrac{\pi}{2}+\alpha$,

$$S_{MNK}=S_{KON}+S_{KOM}+S_{MON}=\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{a+b}{2}\cos\alpha+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{b}{8}(a+b)+\frac{a}{8}(a+b)+\frac{1}{8}(a+b)^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

12.23. Tarkime, kad M, N, K – stačiojo trikampio ABC kraštinių vidurio taškai (176 pav.), O – apskritimo, liečiančio duotuosius pusapskritimius, centras, R – jo spindulys. Nubrėžiame $[OE]\perp[MN]$ ir $[OF]\perp[KM]$. Pažymime $|OE|=x$, $|OF|=y$. Tuomet $|OK|=R-3$, $|ON|=R-4$, $|OM|=R-5$, $|NE|=3-y$, $|KF|=4-x$,

Iš stačiųjų trikampių OEN, OEM ir OFK gauname

$$\begin{cases} (R-4)^2=x^2+(3-y)^2, \\ (R-5)^2=x^2+y^2, \\ (R-3)^2=y^2+(4-x)^2. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, randame $R=\frac{144}{23}$ cm.

12.24. Tarkime, kad apskritimo, liečiančio tris duotuosius apskritimus, centras yra taške O, x – to apskritimo spindulys, $\widehat{OAC}=\alpha$ (177 pav.). Tada

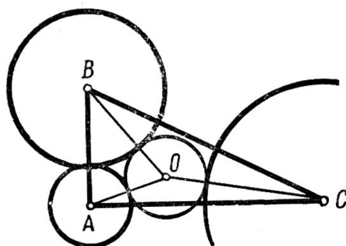
$$|AO|=x+1, |BO|=x+2, |CO|=x+3.$$

Pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampių AOC ir AOB gauname

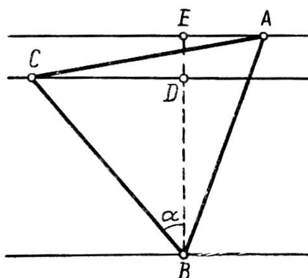
$$\begin{cases} (x+3)^2=(x+1)^2+36-12(x+1)\cos\alpha, \\ (x+2)^2=(x+1)^2+9-6(x+1)\sin\alpha. \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, randame

$$x=\frac{8\sqrt{11}-19}{7} \text{ (cm)}.$$



177 pav.



178 pav.

12.31. Per taisyklingojo trikampio ABC viršūnę B (178 pav.) statmenai duotosioms lygiagrečioms tiesėms išvedame statmenį BE. Tarkime, kad $|AB|=|AC|=|BC|=x$, $\widehat{CBD}=\alpha$. Iš stačiųjų trikampių BCD ir ABE gauname

$$|BD|=b=x\cos\alpha, \quad |BE|=a+b=x\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, randame

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{a^2+ab+b^2}.$$

12.32. 1-asis sprendimas. Galimi du atvejai, pavaizduoti 179 pav. Tarkime, kad O — duotųjų apskritimų centras,

$$|AB|=|AC|=|BC|=x,$$

$$|AB_1|=|AC_1|=|B_1C_1|=y.$$

Iš stačiųjų trikampių COD ir C_1OE gauname

$$\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}-r\right)^2=R^2-\frac{x^2}{4},$$

$$\left(\frac{y\sqrt{3}}{2}+r\right)^2=R^2-\frac{y^2}{4}.$$

Išsprendę šias lygtis, turime

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4R^2-r^2}+r\sqrt{3}\right),$$

$$x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{4R^2-r^2}-r\sqrt{3}\right).$$

2-asis sprendimas. Taisyklingojo trikampio, įbrėžto į r spindulio apskritimą, kraštinė $|AF|=r\sqrt{3}$; $|OG|=\frac{r}{2}$, $|CB_1|=2|CG|=2\sqrt{R^2-\frac{r^2}{4}}=\sqrt{4R^2-r^2}$, $|AB_1|=\frac{1}{2}(|CB_1|-|AF|)=\frac{1}{2}(\sqrt{4R^2-r^2}-r\sqrt{3})$, $|AC|=|CB_1|-|AB_1|=\frac{1}{2}\times$ $\times(\sqrt{4R^2-r^2}+r\sqrt{3})$.

179 pav.

180 pav.

12.33. Tarkime, kad O_1 ir O_2 – duotųjų apskritimų centrai, A – lietimosi taškas, AD – didesniojo apskritimo skersmuo, ABC – taisyklingasis trikampis (180 pav.). Pažymime

$$|AB|=|AC|=|BC|=x,\ \widehat{BAD}=\alpha.$$

Iš stačiojo trikampio ABD ir lygiašonio trikampio AO_1C gauname

$$x=2R\cos\alpha,\ x=2r\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, randame

$$x=\frac{rR\sqrt{3}}{\sqrt{r^2-rR+R^2}}.$$

12.45. Tarkime, kad $|AB|=|BC|=l$, $\widehat{BAC}=\alpha$, R – apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABC, spindulys, $|OM|=|OC|=r$ – apskritimo, apibrėžto apie trapeciją $ACMN$, spindulys (181 pav.).

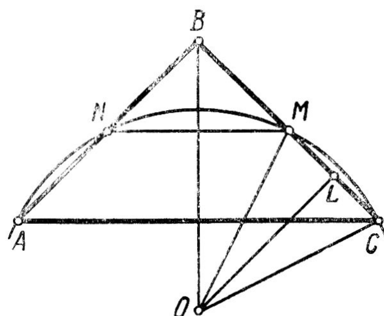
Pritaikę sinusų teoremą, iš trikampio ABC gauname

$$R=\frac{l}{2\sin\alpha}.$$

Nubrėžiame $[OL]\perp[BC]$. Tuomet $|BL|=\frac{3}{4}l$. Iš trikampių BOL ir OML turime

$$|OL|=|BL|\cdot \operatorname{tg}\widehat{OBC}=\frac{3l}{4}\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$r=|OM|=\sqrt{|OL|^2+|ML|^2}=\frac{l}{4}\sqrt{1+9\operatorname{ctg}^2\alpha}.$$



181 pav.

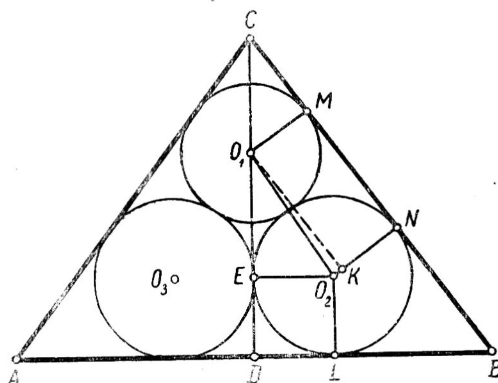
Pagal uždavinio sąlygą $r=\frac{\sqrt{5}}{2}R$, t.y.

$$\frac{l}{4}\sqrt{1+9\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{l\sqrt{5}}{4\sin\alpha}.$$

Išsprendę šią lygtį, randame $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

12.46. Sakykime, kad O_1, O_2, O_3 — duotųjų skritulių centrai (182 pav.), $|O_1M|=r$ ir $|O_2N|=|O_2E|=|O_2L|=R$ — šių skritulių spinduliai, $[O_1K]\parallel[MN]$. Kadangi $[BO_2]$ – kampo ABC pusiaukampinė, tai

$$|BN|=|BL|=R\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}2)=2R.$$



182 pav.

Iš stačiojo trikampio BCD turime

$$|CD| = \frac{|BD|}{\operatorname{ctg}(2\operatorname{arcctg} 2)} = \frac{3R\cdot 2\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} 2)}{\operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} 2)-1} = 4R,$$

$$|BC| = \sqrt{|BD|^2+|CD|^2} = 5R.$$

Iš trikampio O_1O_2K gauname

$$|MN| = |O_1K| = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Iš trikampio CO_1M randame

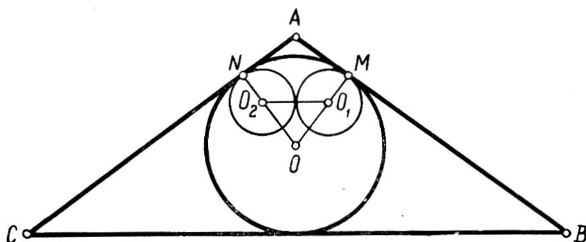
$$|CM| = \frac{r}{\operatorname{ctg}(2\operatorname{arcctg} 2)} = \frac{4r}{3}.$$

Iš lygybės $|BC|=|BN|+|MN|+|CM|$ išplaukia, kad $5R=2R+2\sqrt{Rr}+\frac{4}{3}r$. Iš čia

$$3\frac{R}{r}-2\sqrt{\frac{R}{r}}-\frac{4}{3}=0,\quad \sqrt{\frac{R}{r}}=\frac{1}{3}(1\pm\sqrt{5}).$$

Kadangi $\sqrt{\frac{R}{r}}>0$, tai $\frac{R}{r}=\frac{2}{9}(3+\sqrt{5})$.

12.47. Galimi du atvejai. Pirmasis atvejis: kongruentūs vienas kitą liečiantys skrituliai (jų centrai taškuose O_1 ir O_2) iš vidaus liečia apskritimą, įbrėžtą į duotąjį trikampį ABC (183 pav.). Tuomet trikampis OO_1O_2 yra taisyklingasis. Pažymėję $|O_1M|=|O_2N|=x$, turime $|OO_1|=R-x$, $|O_1O_2|=2x$. Iš čia $R-x=2x$, $x=\frac{1}{3}R$.



183 pav.

Antrasis atvejis: kongruentūs skrituliai iš išorės liečia apskritimą, įbrėžtą į trikampį ABC (184 pav.). Pažymime $|O_1N|=|O_1E|=y$. Tuomet, panagrinėję trikampius AO_1E, OO_1E ir AOM, randame trijų atkarpų AE, OE ir AO ilgius:

$$|AE| = |O_1E|\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = y\sqrt{3},$$

$$|OE| = \sqrt{|OO_1|^2-|EO_1|^2} = \sqrt{R^2+2Ry},$$

$$|AO| = \frac{|OM|}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Iš lygybės $|AO|=|AE|+|OE|$ gauname

$$\frac{2R}{\sqrt{3}}=y\sqrt{3}+\sqrt{R^2+2Ry}.$$

Išsprendę šią lygtį, turime $y=\left(1\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)R$. Kadangi $y<R$, tai $y=\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)R$.

184 pav.

12.48. Tarkime, kad r — įbrėžto į duotąjį trikampį ABC apskritimo spindulys (185 pav.), $|AB|=|BC|=l$, $\widehat{ACB}=\alpha$, $[AD]\perp[BC]$. Tuomet

$$r=\frac{|BE|\cdot|AC|}{|AC|+2|AB|}=\frac{l\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\quad |ME|=2r=\frac{l\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Iš trikampių ABD ir BDM turime

$$|BD|=|AB|\cdot\cos\widehat{ABC}=l\cos(\pi-2\alpha)=-l\cos 2\alpha,$$

$$|BM|=\frac{|BD|}{\cos\widehat{MBD}}=-\frac{l\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Kadangi $|BE|=|BM|+|ME|$, tai

$$l\sin\alpha=\frac{l\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha}-\frac{l\cos 2\alpha}{\sin\alpha}.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname $\cos\alpha=\frac{2}{3}$, $\alpha=\arccos\frac{2}{3}$.

12.49. Kampą ABD pažymime α (186 pav.). Kadangi $S_{BMN}=S_{BOM}+S_{BON}$, tai

$$\frac{1}{2}|BM|\cdot|BN|\cdot\sin 2\alpha=\frac{1}{2}|BM|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}|BN|\cdot|BO|\cdot\sin\alpha.$$

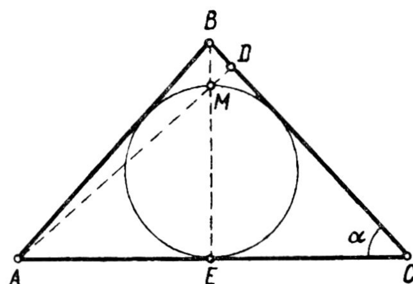
Iš čia

$$\frac{\cos\alpha}{|BO|}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|BM|}+\frac{1}{|BN|}\right).$$

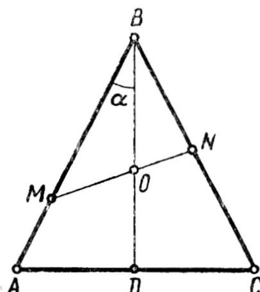
Dabar apskaičiuojame santykį

$$\frac{|DO|}{|BO|}=\frac{|BD|-|BO|}{|BO|}=\frac{|BC|\cdot\cos\alpha}{|BO|}-1=\frac{|BC|}{2}\left(\frac{1}{|BM|}+\frac{1}{|BN|}\right)-1=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{|AM|+|BM|}{|BM|}+\frac{|CN|+|BN|}{|BN|}\right)-1=\frac{1}{2}(m+n).$$



185 pav.



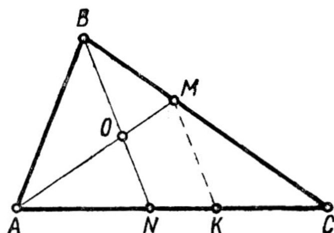
186 pav.

12.61. Išvedame $[MK]\parallel[BN]$ (187 pav.). Iš trikampių BCN ir CKM panašumo išplaukia, kad

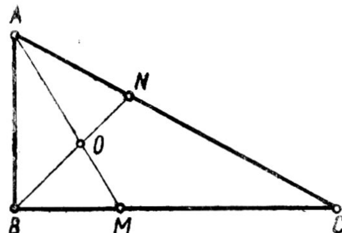
$$|CK|=|CN|\cdot\frac{|CM|}{|BC|}=|CN|\cdot\frac{|CM|}{|CM|+|BM|}=|CN|\cdot\frac{1}{1+m}.$$

Iš čia

$$|KN|=|CN|-|CK|=|CN|\left(1-\frac{1}{1+m}\right)=|CN|\cdot\frac{m}{1+m}.$$



187 pav.



188 pav.

Iš trikampių AON ir AMK panašumo turime

$$\frac{|AO|}{|OM|}=\frac{|AN|}{|KN|}=\frac{|AN|}{|CN|}\cdot\frac{1+m}{m}=\frac{n}{m}(1+m).$$

Analogiškai gauname, kad

$$\frac{|BO|}{|ON|}=\frac{m}{n}(1+n).$$

12.62. Pažymime $|AB|=x$, $|BC|=y$, $|AC|=z$. Iš trikampių ABM ir ABN (188 pav.), pritaikę trikampio vidaus kampo pusiaukampinės savybę, gauname

$$\frac{|BM|}{|AB|}=\frac{|OM|}{|AO|}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{|AN|}{|AB|}=\frac{|ON|}{|BO|}=\sqrt{3}-1.$$

Iš čia

$$|BM|=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad |AN|=x(\sqrt{3}-1).$$

Iš trikampio ABC turime

$$\frac{|AN|}{|CN|}=\frac{|AB|}{|BC|},\quad \frac{|BM|}{|CM|}=\frac{|AB|}{|AC|},$$

t.y.

$$\begin{cases} \dfrac{x(\sqrt{3}-1)}{z-x(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{x}{y}, \\ \dfrac{x}{\sqrt{3}\left(y-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)}=\dfrac{x}{z}. \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname $y=x\sqrt{3}$, $z=2x$. Iš to išplaukia, kad $x^2+y^2=$ $=z^2$. Todėl, remiantis teorema, atvirkštine Pitagoro teoremai, $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{2}$. Vadinasi,

$$\widehat{BAC}=\arcsin\frac{y}{z}=\frac{\pi}{3},\quad \widehat{ACB}=\frac{\pi}{6}.$$

12.63. 1-asis būdas. Pirmiausia reikia įrodyti, kad trikampio pusiaukraštinę m_c, nubrėžtą kraštinei c, galima apskaičiuoti pagal formulę

$$2a^2+2b^2=c^2+(2m_c)^2;$$

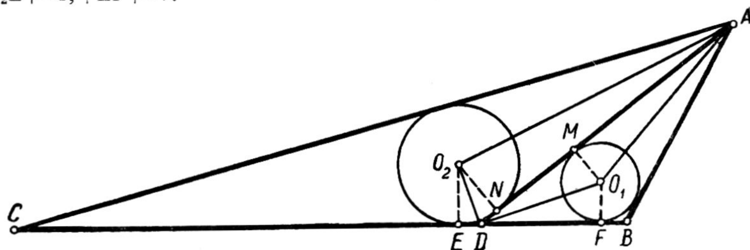
čia a, b, c — kitos dvi trikampio kraštinės. Dabar tarkime, kad x, y, z — duotojo trikampio kraštinių ilgiai. Tuomet

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=z^2+24^2, \\ 2y^2+2z^2=x^2+30^2, \\ 2x^2+2z^2=y^2+42^2. \end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname $x=2\sqrt{105}$, $y=2\sqrt{33}$, $z=2\sqrt{132}$, $S_\triangle=$ $=48\sqrt{6}$ (cm²).

2-asis būdas. Sakykime, kad duotojo trikampio pusiaukraštinės susikerta taške O. Pusiaukraštinės BN tęsinyje atidedame atkarpą $|NK|=|ON|$. Tuomet $\Delta AON=$ $=\Delta NCK$, ir todėl $S_{\triangle OCK}=S_{\triangle AOC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$. Bet trikampio OCK kraštinių ilgiai yra lygūs atitinkamų trikampio ABC pusiaukraštinių dviem trečdaliams, t.y. ΔOCK kraštinės lygios 8, 10 ir 14 (cm). Vadinasi, $S_{\triangle OCK}=16\sqrt{6}$ (cm²), $S_{\triangle ABC}=$ $=48\sqrt{6}$ (cm²).

12.64. Tarkime, kad O_1, O_2 — duotųjų apskritimų centrai, AD — kampo BAC pusiaukampinė (189 pav.). Pagal uždavinio sąlygą $|O_1M|=|O_1F|=2$, $|O_2N|=$ $=|O_2E|=3$, $|EF|=7$.



189 pav.

Iš trikampių O_1AM ir O_2AN panašumo gauname

$$|AN|=\frac{3}{2}|AM|. \tag{1}$$

Iš to išplaukia, kad taškas N yra arčiau taško D, negu taško M, t.y. $|DN|<|DM|$. Bet $|DM|=|DF|$ ir $|DN|=|DE|$. Vadinasi,

$$|DM|+|DN|=|DE|+|DF|=|EF|=7. \tag{2}$$

Įsidėmėtina, kad $[O_1D]\perp[O_2D]$ kaip kampų ADB ir ADC, kurių suma lygi π, pusiaukampinės. Todėl kampai O_1DM ir DO_2N kaip kampai su atitinkamai statmenomis kraštinėmis yra kongruentūs. Vadinasi, statieji trikampiai O_1DM ir O_2DN yra panašūs. Iš čia

$$|DN|\cdot|DM|=6. \tag{3}$$

Išsprendę sistemą, kurią sudaro (2) bei (3) lygtys, ir įvertinę, kad $|DN|<|DM|$, gauname $|DN|=1$, $|DM|=6$, $|MN|=|DM|-$ $-|DN|=5$.

Iš (1) sąryšio turime

$$|AM|+|MN|=\frac{3}{2}|AM|,\quad |AM|=10.$$

Dabar randame $|AD|=|AM|+|DM|=$ $=16$ (cm).

190 pav.

12.65. Pagal uždavinio sąlygą $|BD|=$ $=3$ cm, $|AF|=2\sqrt{2}$ cm. $|CO|:|OE|=$ $=5:1$ (190 pav.).

Pažymime $|OE|=x$, $|OF|=y$, $|OD|=z$. Tada $|OC|=5x$.

Iš trikampių AOD ir BFO bei trikampių OCD ir BOE panašumo gauname $|OD|\cdot$ $\cdot|OB|=|AO|\cdot|OF|=|OC|\cdot|OE|$, t.y.

$$z(3-z)=y(2\sqrt{2}-y)=5x^2. \tag{1}$$

Trikampio ABC plotą parašome taip:

$$S_{ABC}=3x\cdot|AB|=\sqrt{2}\cdot|BC|=\frac{3}{2}\cdot|AC|=\frac{1}{2}(x\cdot|AB|+y\cdot|BC|+z\cdot|AC|).$$

Iš čia

$$|BC|=\frac{3x}{\sqrt{2}}\cdot|AB|,\quad |AC|=2x\cdot|AB|,$$

$$6x\cdot|AB|=x\cdot|AB|+y\cdot\frac{3x}{\sqrt{2}}\cdot|AB|+z\cdot 2x\cdot|AB|.$$

Padaliję abi šios lygybės puses iš $x\cdot|AB|$, gauname

$$3y+2\sqrt{2}\,z=5\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Išsprendę sistemą, kurią sudaro (1) ir (2) lygtys, randame

$$x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\quad y=\sqrt{2},\quad z=1.$$

Dabar iš stačiųjų trikampių AOD ir COD gauname $|AD|=1$, $|CD|=3$.

Vadinasi,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|BD|=6\ (\text{cm}^2).$$

12.66. Tarkime, kad O – duotojo apskritimo centras, r – jo spindulys, $[OD]\perp[BC]$, $\widehat{OBC}=x$, $\widehat{OCB}=y$ (191 pav.). Tuomet iš trikampio ABC randame $x+y=\frac{\pi}{3}$.

Pritaikę sinusų teoremą, iš trikampio $A_1B_1C_1$ gauname

$$|B_1C_1|=2r\sin\widehat{BAC}=r\sqrt{3}.$$

Kadangi panašiųjų trikampių plotų santykis yra lygus atitinkamų kraštinių kvadratų santykiui, tai

$$|BC|=2(1+\sqrt{2})|B_1C|=$$
$$=2r\sqrt{3}(1+\sqrt{2}).$$

Iš stačiųjų trikampių BOD ir COD gauname

$$|BC|=|BD|+|CD|=r(\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y)=$$
$$=2r\sqrt{3}(1+\sqrt{2}).$$

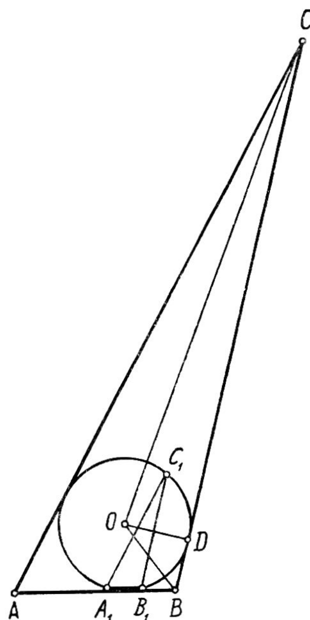
Iš čia

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos(x-y)-\cos(x+y)}=\sqrt{3}(1+\sqrt{2}).$$

Įrašę į šią lygtį $x+y=\frac{\pi}{3}$, randame

$$\cos(x-y)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad x-y=\frac{\pi}{4},$$

$$\widehat{ABC}=2x=\frac{7\pi}{12},\quad \widehat{ACB}=2y=\frac{\pi}{12}.$$



191 pav.

12.67. Pažymime $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$ (192 pav.). Kadangi

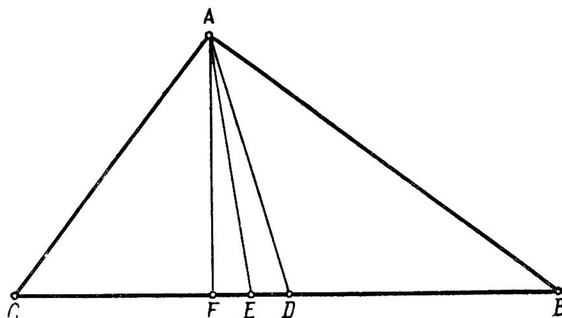
$$S_{AED}=\frac{1}{14}S_{ABC},\quad S_{AFD}=\frac{7}{50}S_{ABC}$$

ir šių trikampių aukštinių ilgiai yra lygūs, tai

$$|ED|=\frac{a}{14},\quad |FD|=\frac{7a}{50}.$$

Iš čia

$$|BE|=|BD|+|DE|=\frac{4a}{7},\quad |CE|=\frac{3a}{7},\quad |CF|=|CD|-|FD|=\frac{9a}{25},\quad |BF|=\frac{16a}{25}.$$



192 pav.

Pritaikę trikampio vidaus kampo pusiaukampinės savybę, gauname

$$\frac{|AC|}{|AB|}=\frac{|CE|}{|BE|},\quad \frac{b}{c}=\frac{3}{4}. \tag{1}$$

Iš trikampių ACF ir ABF gauname

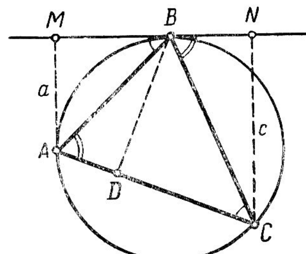
$$|AF|^2=b^2-\left(\frac{9}{25}\right)^2 a^2=c^2-\left(\frac{16}{25}\right)^2 a^2. \tag{2}$$

Išsprendę sistemą, kurią sudaro (1) ir (2) lygtys, turime

$$b=\frac{3}{5}\,a,\quad c=\frac{4}{5}\,a,\quad a^2=b^2+c^2,$$

$$\hat{A}=\frac{\pi}{2},\quad \hat{B}=\arcsin\frac{3}{5},\quad \hat{C}=\arcsin\frac{4}{5}.$$

12.68. Į tiesę, kuri taške B liečia apskritimą, nuleidžiame statmenis AM bei CN ir nubrėžiame $[BD]\perp[AC]$ (193 pav.). Pagal uždavinio sąlygą $|AM|=a$, $|CN|=c$. Kampai ACB ir ABM kaip kampai, kurie matuojami to paties lanko AB puse, yra kongruentūs. Todėl statieji trikampiai BCD bei ABM yra panašūs ir



193 pav.

$$|BD|=\frac{|AM|\cdot|BC|}{|AB|} \tag{1}$$

Iš trikampių ABD ir BCN panašumo analogiškai gauname

$$|BD|=\frac{|CN|\cdot|AB|}{|BC|}. \tag{2}$$

Sudauginę (1) ir (2) lygybes, turime $|BD|^2=|AM|\cdot|CN|=ac$ |, $|BD|=\sqrt{ac}$.

12.71. Įrodykite, kad $|AC|=|BC|=|AB|$.

12.72. Pažymėję lygiagretainio kraštinių ilgius x ir y, gaukite lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{x}{\sin\alpha}=\frac{y}{\sin\beta}, \\ b^2=x^2+y^2-2xy\cos(\alpha+\beta). \end{cases}$$

12.73. Tarkime, kad x, y – lygiagretainio kraštinių ilgiai. Tuomet lygiagretainio plotas

$$S=2x=3y. \qquad (1)$$

Pritaikę teoremą apie kraštinės, esančios prieš trikampio bukąjį kampą, kvadratą, gauname

$$25=x^2+y^2+2x\sqrt{y^2-4}. \qquad (2)$$

Išsprendę sistemą, kurią sudaro (1) ir (2) lygtys, raskite S.

12.74. Tarkime, kad $a>b$, $2x$ ir $2y$ – lygiagretainio įstrižainių ilgiai. Pagal kosinusų teoremą gauname

$$a^2=x^2+y^2+2xy\cos\alpha,$$

$$b^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha.$$

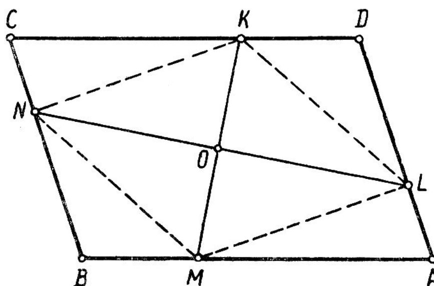
Iš čia

$$a^2-b^2=4xy\cos\alpha, \quad xy=\frac{a^2-b^2}{4\cos\alpha}.$$

Dabar apskaičiuojame lygiagretainio plotą:

$$S=2xy\sin\alpha=\frac{1}{2}(a^2-b^2)\operatorname{tg}\alpha.$$

12.75. Bet kuri tiesė, dalijanti lygiagretainį į dvi lygiaplotes dalis, eina per lygiagretainio simetrijos centrą. Todėl duotosios tiesės MK ir NL kertasi lygiagretainio $ABCD$ simetrijos centre (194 pav.). Keturkampis $MNKL$ – rombas, nes jo įstrižainės yra viena kitai statmenos ir susikirtimo taške dalijasi pusiau.



194 pav.

Pagal uždavinio sąlygą $|AB|=3$, $|AD|=2$, $\hat{A}=\arccos\frac{5}{16}$ ir keturkampių $AMOL$ bei $OKDL$ plotai yra lygūs. Trikampiai OML ir OKL yra kongruentūs, nes $MNKL$ – rombas. Vadinasi,

$$S_{AML}=S_{KDL}.$$

Pažymėję $|AM|=x$, $|AL|=y$, turėsime

$$|KD|=3-x,\quad |DL|=2-y,\quad S_{AML}=\frac{1}{2}\,xy\sin\hat{A},$$

$$S_{KDL}=\frac{1}{2}\,(3-x)(2-y)\sin\hat{D}=\frac{1}{2}\,(3-x)(2-y)\sin\hat{A}.$$

Iš čia

$$(3-x)(2-y)=xy. \qquad (1)$$

Pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampių AML ir KDL randame

$$|ML|^2=x^2+y^2-2xy\cdot\frac{5}{16},$$

$$|KL|^2=(3-x)^2+(2-y^2)+2(3-x)(2-y)\,\frac{5}{16}.$$

Sulyginę $|ML|^2$ ir $|KL|^2$, gauname

$$x^2+y^2-\frac{5}{8}\,xy=(3-x)^2+(2-y)^2+\frac{5}{8}\,(3-x)(2-y). \qquad (2)$$

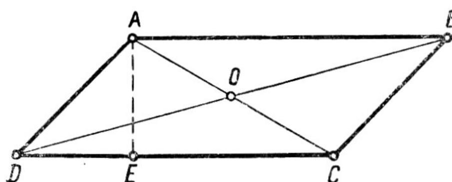
Išsprendę (1) ir (2) lygčių sistemą, turime

$$|AM|=x=2\ (\text{cm}),\quad |BM|=1\ (\text{cm}),$$

$$|AL|=y=\frac{2}{3}\ (\text{cm}),\quad |DL|=\frac{4}{3}\ (\text{cm}).$$

12.76. Pagal uždavinio sąlygą duotojo lygiagretainio $ABCD$ (195 pav.) $|AB|=$ $=2|AD|$, $|BD|=2|AC|$. Kadangi lygiagretainio įstrižainių ilgių kvadratų suma yra lygi visų jo kraštinių ilgių kvadratų sumai, tai

$$5|AC|^2=10|AD|^2,\quad |AC|=\sqrt{2}\,|AD|.$$



195 pav.

Iš trikampio ACD, pritaikę teoremą apie kraštinės, esančios prieš smailųjį kampą, kvadratą, turime

$$|AC|^2=|AD|^2+|CD|^2-2|CD|\cdot|DE|,$$

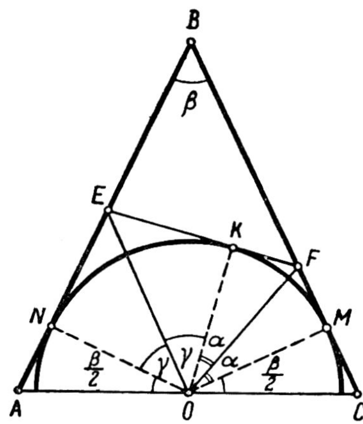
$$2|AD|^2=|AD|^2+4|AD|^2-4|AD|\cdot|DE|.$$

Iš čia

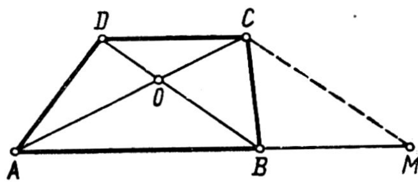
$$|DE|=\frac{3}{4}|AD|,\quad |EC|=|CD|-|DE|=2|AD|-\frac{3}{4}|AD|=\frac{5}{4}|AD|,\quad \frac{|DE|}{|CE|}=\frac{3}{5}.$$

12.77. Tarkime, kad O – rombo centras, $[OM] \perp [BC]$, $[ON] \perp [AB]$, $[OK] \perp \perp [EF]$ (196 pav.). Žinome, kad kongruenčių trikampių atitinkamieji kampai, kurie 196 pav. pažymėti vienodomis raidėmis, yra komgruentūs. Vadinasi, $\alpha + \frac{\beta}{2} + \gamma = \frac{\pi}{2}$ ir $\widehat{COF} = \alpha + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \gamma = \widehat{NEO}$. Be to, $\widehat{OCF} = \widehat{OAE}$. Todėl trikampiai COF ir AOE yra panašūs. Iš čia

$$|AE| \cdot |CF| = |AO| \cdot |CO| = \left(\frac{r}{\cos \frac{\beta}{2}} \right)^2.$$



196 pav.



197 pav.

12.81. Įrodykite, kad kampas, kurį sudaro tiesės, jungiančios apskritimo centrą su šoninės kraštinės galais, lygus $\frac{\pi}{2}$.

12.86. Pratęsę trapecijos šonines kraštines, papildykite ją iki trikampio.

12.87. Pagal uždavinio sąlygą trapecijoje $ABCD$ (197 pav.) $|AB| + |CD| = 14$, $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{3}$, aukštinė $H = \frac{15\sqrt{3}}{7}$.

Per viršūnę C išvedame tiesę, lygiagrečią įstrižainei BD, kuri kraštinės AB tęsinį kerta taške M. Tada $|AM| = |AB| + |CD| = 14$, $\widehat{ACM} = \frac{2\pi}{3}$. Pažymėję $|AC| = x$, $|CM| = |BD| = y$ ir pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampio ACM turime

$$14^2 = x^2 + y^2 + xy. \tag{1}$$

Trikampio ACM plotas lygus

$$\frac{1}{2} |AM| \cdot H = \frac{1}{2} |AC| \cdot |CM| \cdot \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Iš čia

$$30\sqrt{3} = \frac{1}{2} xy\sqrt{3}. \tag{2}$$

Išsprendę sistemą, kurią sudaro (1) ir (2) lygtys, randame

$$x = 10 \text{ (cm)}, \quad y = 6 \text{ (cm)}.$$

12.88. Tarkime, kad $|MN| = x$, h_1 – trapecijos $ABNM$ aukštinė, h_2 – trapecijos $MNCD$ aukštinė (198 pav.). Pagal uždavinio sąlygą $|AB| = a$, $|CD| = b$. Trapecijos $ABCD$ plotas lygus

$$\frac{1}{2}(a+b)(h_1+h_2) = (a+x)h_1 = (b+x)h_2.$$

Pažymėję $\frac{h_2}{h_1}=y$, iš pastarosios lygybės gauname

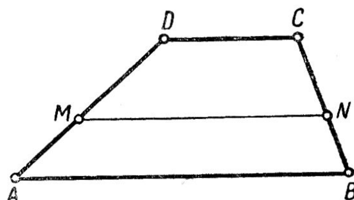
$$(a+b)(1+y)=2(a+x)=2(b+x)y.$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, turime

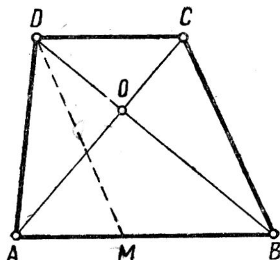
$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

12.89. Duotojoje trapecijoje $ABCD$ nubrėžiame $[DM] \parallel [BC]$ (199 pav.). Tuomet $|AM|=|a-b|$, $\widehat{ADM}=\alpha$. Sakykime, kad H – trapecijos aukštinė, $|AD|=x$, $|DM|=|BC|=y$. Kadangi pagal uždavinio sąlygą trapecijos įstrižainės yra statmenos, tai

$$x^2+y^2=|AO|^2+|DO|^2+|BO|^2+|CO|^2=a^2+b^2.$$



198 pav.



199 pav.

Pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampio ADM gauname

$$(a-b)^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha=a^2+b^2-2xy\cos\alpha.$$

Todėl

$$xy=\frac{ab}{\cos\alpha}.$$

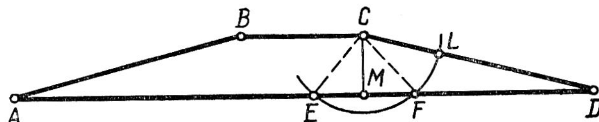
Trikampio ADM plotas yra lygus

$$\frac{1}{2}H|a-b|=\frac{1}{2}xy\sin\alpha=\frac{1}{2}ab\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Iš čia

$$H=\frac{ab\,\mathrm{tg}\,\alpha}{|a-b|},$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}H(a+b)=\frac{ab(a+b)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2|a-b|}.$$



200 pav.

12.90. Tarkime, kad L – duotojo apskritimo ir kraštinės CD susikirtimo taškas (200 pav.), $[CM]\perp[AD]$, $|BC|=b$. Pagal sąlygą $|AD|=(1+\sqrt{15})\,b$,

$$|CE|=|CF|=|CL|=\frac{2}{3}b,\ |MF|=\frac{1}{2}|EF|=\frac{\sqrt{7}}{6}b.$$

Iš stačiojo trikampio CMF turime

$$|CM|=\sqrt{|CF|^2-|MF|^2}=\frac{b}{2}.$$

Kadangi trapecija lygiašonė, tai

$$|DM|=\frac{1}{2}(|AD|-|BC|)=\frac{b\sqrt{15}}{2}.$$

Iš stačiojo trikampio CMD gauname

$$|CD|=\sqrt{|CM|^2+|DM|^2}=2b.$$

Iš čia $|DL|=|CD|-|CL|=\frac{4}{3}b$, $|CL|:|LD|=1:2$.

12.91. Sakykime, kad O – kraštinės AB vidurio taškas, $|AB|=3a$ (201 pav.). Išvedame atkarpas $[OK]$, $[LF]$ ir $[CN]$, statmenas $[AB]$. Tuomet

$$|CD|=2a,\ |OF|=|KL|=\frac{a}{2},\ |BN|=\frac{1}{2}(|AB|-|CD|)=\frac{a}{2}.$$

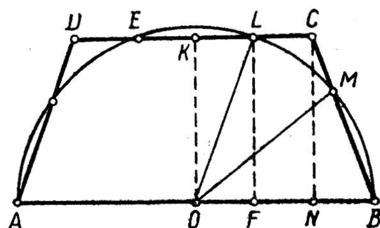
Vadinasi, $OBCL$ – lygiašonė trapecija, todėl

$$|BC|=|OL|=|BO|=\frac{3a}{2}.$$

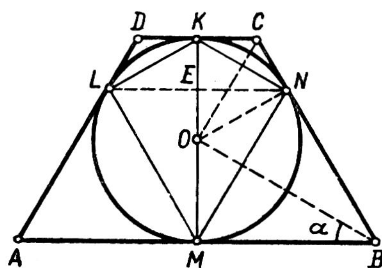
Pritaikę kirstinių savybę, gauname, kad $|CL|\cdot|CE|=|CM|\cdot|BC|$, t.y. $\frac{a}{2}\cdot\frac{3a}{2}=$ $=|CM|\cdot\frac{3a}{2}$. Taigi

$$|CM|=\frac{a}{2},\ |BM|=|BC|-|CM|=a.$$

Vadinasi, ieškomasis santykis $|CM|:|BM|=1:2$.



201 pav.



202 pav.

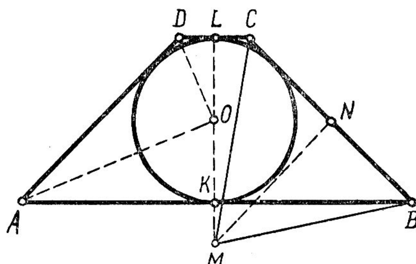
12.92. Tarkime, kad O – apskritimo, įbrėžto į duotąją trapeciją $ABCD$, centras (202 pav.), M, N, K, L – lietimosi taškai. Pažymime $|OM|=|ON|=|OK|=R$, $\widehat{MBO}=\alpha$. Tuomet

$$|BM|=R\operatorname{ctg}\alpha,\ |KC|=R\operatorname{tg}\alpha,\ S_{ABCD}=\frac{1}{2}|KM|(|AB|+|CD|)=\frac{4R^2}{\sin 2\alpha}.$$

Kampai NOE ir ABC kaip kampai su atitinkamai statmenomis kraštinėmis yra kongruentūs, t.y. $\widehat{NOE}=2\alpha$. Iš trikampio NOE turime $|EN|=R\sin 2\alpha$. Todėl

$$S_{MNKL}=\frac{1}{2}|KM|\cdot|LN|=2R^2\sin 2\alpha,\quad \frac{S_{MNKL}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{2}\sin^2 2\alpha=\frac{3}{8},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{6},\quad \frac{|AB|}{|CD|}=\frac{2R\operatorname{ctg}\alpha}{2R\operatorname{tg}\alpha}=3.$$



203 pav.

12.93. Sakykime, kad O – apskritimo, įbrėžto į duotąją trapeciją $ABCD$, centras (203 pav.), M – apskritimo, apibrėžto apie šią trapeciją, centras. Pažymime $|OK|=|OL|=r$, $\widehat{BAD}=\alpha$. Iš trikampių AOK ir DOL turime $|AK|=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $|DL|=r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

Pagal uždavinio sąlygą $|CM|=|BM|=r\sqrt{6}$. Iš trikampių CML ir BKM gauname

$$|LM|=r\sqrt{6-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad |KM|=r\sqrt{6-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Kadangi $|KL|=|LM|\pm|KM|$, tai

$$2=\sqrt{6-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\pm\sqrt{6-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

(pliuso ženklas atitinka tą atvejį, kai taškas M yra trapecijos viduje, minuso ženklas – kai taškas M yra trapecijos išorėje). Pakėlę abi šios lygties puses kvadratu ir turėdami galvoje, kad

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{4}{\sin^2\alpha}-2,$$

po suprastinimų gauname

$$\frac{2}{\sin^2\alpha}-5=\pm\sqrt{49-\frac{24}{\sin^2\alpha}}.$$

Išsprendę šią lygtį ir prisiminę, kad $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, randame $\alpha=\frac{\pi}{4}$.

12.94. Įrodykite, kad į duotąjį apskritimą galima įbrėžti lygiašonę trapeciją, kurios šoninė kraštinė lygi $2\sqrt{5}$ cm, vienas pagrindas lygus 6 cm, o kitas pagrindas yra apskritimo skersmuo. Toliau apskaičiuokite apskritimo, apibrėžto apie šią trapeciją, spindulį.

12.95. Kraštines AD ir BC pratęsiame tol, kol jos susikerta taške M (204 pav.). Pažymime $|AD|=a$, $|BC|=b$, $|DM|=x$, $|CM|=y$, $\widehat{AMB}=\alpha$. Iš trikampių ABM, CDM, ACM ir BDM, pritaikę kosinusų teoremą, turime

$$|AB|^2=(a+x)^2+(b+y)^2-2(a+x)(b+y)\cos\alpha,$$

$$|CD|^2=x^2+y^2-2xy\cos\alpha,$$

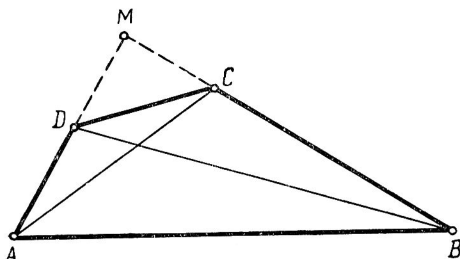
$$|AC|^2=(a+x)^2+y^2-2(a+x)y\cos\alpha,$$

$$|BD|^2=x^2+(b+y)^2-2x(b+y)\cos\alpha.$$

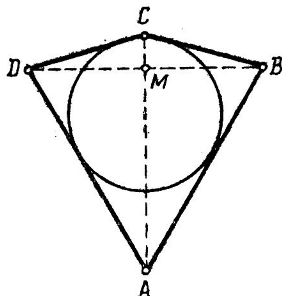
Įrašę šiuos reiškinius į duotąją lygybę

$$|AB|^2+|CD|^2=|AC|^2+|BD|^2$$

ir suprastinę, gauname $ab\cos\alpha=0$. Kadangi $a\neq 0$, $b\neq 0$, tai $\cos\alpha=0$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$.



204 pav.



205 pav.

12.96. Duotojo keturkampio $ABCD$ (205 pav.) kraštinių ilgius pažymime $|AB|=a$ $|BC|=b$, $|CD|=x$, $|AD|=y$. Kadangi keturkampis apibrėžtas apie apskritimą ir jo įstrižainės viena kitai statmenos, tai

$$\begin{cases} x+a=y+b, \\ x^2+a^2=y^2+b^2. \end{cases}$$

Iš šios sistemos gauname, kad arba $x=b$, $y=a$, arba $x=y$, $a=b$. Kai $x=b$, $y=a$, tai trikampis BCD – lygiašonis ir $|BM|=|DM|$.

Sąlygoje duota, kad vienas keturkampio kampas lygus $\frac{\pi}{3}$. Įrodome, kad kampas ABC negali būti lygus $\frac{\pi}{3}$. Pažymime

$$\widehat{ABM}=\alpha,\quad \widehat{CBM}=\beta.$$

Tuomet

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{|AM|}{|BM|}+\frac{|CM|}{|BM|}=2;$$

toliau, kadangi $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{|AM|\cdot|CM|}{|BM|^2}<1$, tai

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\geqslant 2.$$

Iš čia $\alpha+\beta \geqslant \operatorname{arctg} 2 > \frac{\pi}{3}$. Vadinasi, nepamiršdami to, kas bendra, galime laikyti, kad kampas BAD lygus $\frac{\pi}{3}$. Tada trikampis ABD – taisyklingasis ir $|AB|=|BD|=|AC|$. Iš lygiašonio trikampio ABC, kurio $\widehat{BAC}=\frac{\pi}{6}$, gauname

$$\frac{|BC|}{|AB|}=2\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Galutinai

$$|BA|:|AD|:|CD|:|CB|=1:1:\sqrt{2-\sqrt{3}}:\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

12.103. Stygos ilgis x apskaičiuojamas iš lygties

$$R^2=\frac{x^2}{4}+(a-x)^2;$$

nepamirškite, kad turi būti $0<x\leqslant a$.

12.105. Kampą, kurį sudaro tiesės, jungiančios R spindulio apskritimo centrą su kitų dviejų apskritimų centrais, pažymėkite α, atstumą tarp apskritimų, kurių spinduliai yra r_1 ir r_2, centrų pažymėkite y, o ieškomąjį išorinės liestinės ilgį pažymėkite x. Sudarykite lygčių sistemą

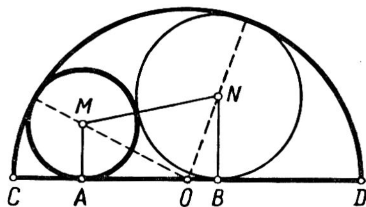
$$\begin{cases} a^2=2R^2-2R^2\cos\alpha, \\ y^2=(R+r_1)^2+(R+r_2)^2-2(R+r_1)(R+r_2)\cos\alpha, \\ x^2=y^2-(r_1-r_2)^2. \end{cases}$$

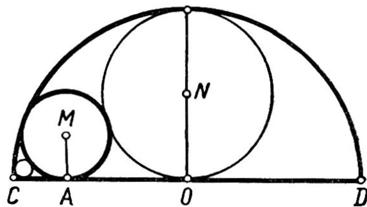
12.106. Atstumą tarp duotųjų apskritimų centrų pažymėkite l, o nežinomąjį kampą — x. Gaukite sistemą

$$\frac{R-r}{l}=\sin\frac{\alpha}{2},\quad \frac{R+r}{l}=\sin\frac{\beta}{2},\quad \sin\frac{x}{2}=\frac{r}{l}$$

ir raskite jos sprendinį

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$





206 pav.

12.107. Tarkime, kad x — ieškomasis apskritimo spindulys, A — šio apskritimo ir duotosios atkarpos lietimosi taškas, O — duotosios atkarpos vidurio taškas. Tuomet x rasite iš lygties

$$|AO|^2=\left(\frac{R}{2}+x\right)^2-\left(\frac{R}{2}-x\right)^2=(R-x)^2-x^2.$$

12.108. Duota $|CD|=2R$, $|AM|=\frac{R}{4}$ (206 pav.). Atkarpos BN ilgį pažymime x. Turime

$$|AB|^2=|MN|^2-(|BN|-|AM|)^2=\left(\frac{R}{4}+x\right)^2-\left(\frac{R}{4}-x\right)^2=$$

$$=(|AO|\pm|BO|)^2=\left(\sqrt{\left(R-\frac{R}{4}\right)^2-\left(\frac{R}{4}\right)^2}\pm\sqrt{(R-x)^2-x^2}\right)^2.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname $x=\frac{R}{2}$ ir $x=\frac{R}{18}$.

12.109. Duota $|OD|=R$, $|AD|=r$ (207 pav.). Atkarpos BC ilgį pažymime x. Turime

$$|AB|^2=(r+x)^2=|BC|^2+|AC|^2=$$

$$=x^2+\left(AO\pm\sqrt{BO^2-BC^2}\right)^2=x^2+\left(R-r\pm\sqrt{(R-x)^2-x^2}\right)^2.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname

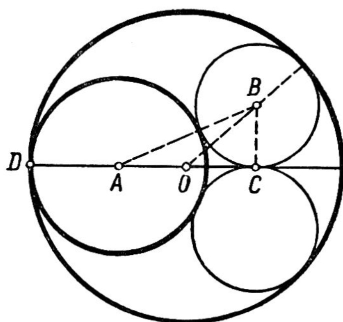
$$x=\frac{4rR\,(R-r)}{(R+r)^2}.$$

12.110. Duota $|AD|=R$, $|BC|=r$ (207 pav.). Pažymėję $|OD|$ raide x, kaip ir **12.109** uždavinyje, sudarome lygtį

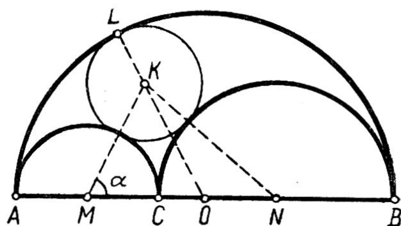
$$(R+r)^2=r^2+\left(x-R\pm\sqrt{(x-r)^2-r^2}\right)^2.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname

$$x=\frac{R}{4R-r}\,(r+2R+2\sqrt{R^2+2rR}).$$



207 pav.



208 pav.

12.111. Duota $|AM|=a$, $|BN|=b$ (208 pav.). Pažymime $|KL|=x$, $\widehat{NMK}=\alpha$. Pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampio MNK išreiškiame $|KN|^2$, o iš trikampio OMK – $|OK|^2$:

$$\begin{cases}(b+x)^2=(a+x)^2+(a+b)^2-2\,(a+x)\,(a+b)\cos\alpha,\\ (a+b-x)^2=(a+x)^2+b^2-2\,(a+x)\,b\cos\alpha.\end{cases}$$

Išsprendę šią lygčių sistemą, gauname

$$x=\frac{ab\,(a+b)}{a^2+ab+b^2}.$$

12.112. Duota $|OB|=R$, $|NE|=\frac{3}{8}R$ (209 pav.). Iš trikampio ONE turime

$$|OE|=\sqrt{\left(R-\frac{3}{8}R\right)^2-\left(\frac{3}{8}R\right)^2}=\frac{R}{2}.$$

$|FM|$ pažymime x. Tuomet

$$|KN|=|OE|-|FM|=\frac{R}{2}-x,$$

$$|OF|=\sqrt{|OM|^2-|FM|^2}=\sqrt{(R-x)^2-x^2},$$

$$|KM|=|OF|-|NE|=\sqrt{R^2-2Rx}-\frac{3}{8}R.$$

Kadangi $|MN|^2=|KN|^2+|KM|^2$, tai

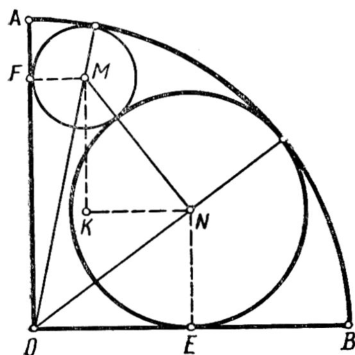
$$\left(\frac{3}{8}R+x\right)^2=\left(\frac{R}{2}-x\right)^2+\left(\sqrt{R^2-2Rx}-\frac{3}{8}R\right)^2.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname

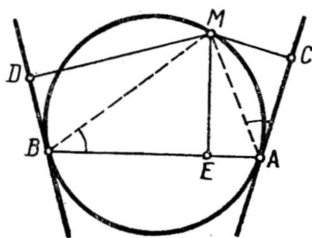
$$x=\frac{22-2\sqrt{21}}{75}R.$$

12.113. Į tieses, kurios apskritimą liečia taškuose A ir B, nuleidžiame atitinkamai statmenis MC ir MD bei nubrėžiame $[ME]\perp[AB]$ (210 pav.). Pagal uždavinio sąlygą $|MC|=a$, $|MD|=b$. Kampai ABM ir CAM yra kongruentūs, nes jie matuojami to paties lanko AM puse. Vadinasi, statieji trikampiai BME bei ACM yra panašūs ir

$$|ME|=\frac{|MC|\cdot|BM|}{|AM|}. \quad (1)$$



209 pav.



210 pav.

Iš trikampių AME ir BDM panašumo analogiškai gauname

$$|ME|=\frac{|DM|\cdot|AM|}{|BM|}. \quad (2)$$

Sudauginę (1) ir (2) lygybes, turime

$$|ME|^2=|MC|\cdot|DM|=ab, \quad |ME|=\sqrt{ab}.$$

Čia pateiktuose uždavinių sprendiniuose ir nurodymuose vieni ar kiti teiginiai dažnai formuluojami, nepagrindžiant (pavyzdžiui, kad tiesės ir plokštumos yra lygiagrečios arba statmenos, kad tiesė arba plokštuma liečia rutulį ir kt.). Tačiau turėkite galvoje tai, kad, norėdami uždavinius išspręsti iki galo, visus šiuos teiginius turėsite pagrįsti.

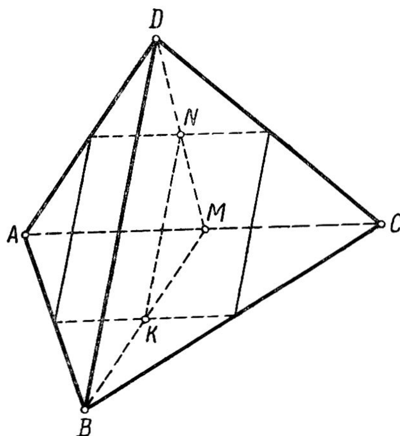
13.2. Ieškomasis rutulys liečia tris plokštumas: *ABC*, *ACD* ir kertančiąją plokštumą, kurios sudaro trikampės prizmės šoninį paviršių. Todėl didysis rutulio apskritimas bus įbrėžtas į šios prizmės statųjį pjūvį. Vadinasi, rutulio spindulys r yra lygus apskritimo, įbrėžto į trikampį *MNK*, spinduliui (211 pav.); čia M – briaunos AC vidurio taškas. Turime

$$|MN|=|KM|=\frac{b\sqrt{3}}{4}, \quad |KN|=\frac{b}{2}.$$

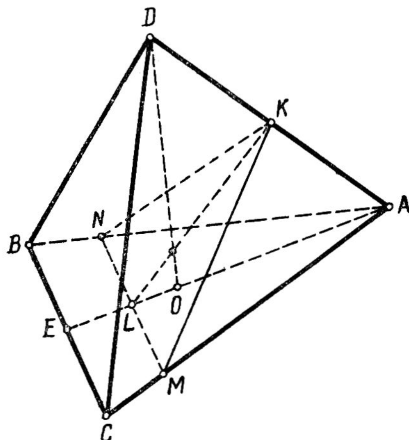
Vadinasi,

$$r=\frac{2S_{MNK}}{|KN|+2|MN|}=\frac{b(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}.$$

13.3. Duotųjų rutulių, kurių spinduliai lygūs x, centrus pažymime M, N, K, L. Nesunku pastebėti, kad *MNKL* – taisyklingasis tetraedras, kurio briauna lygi $2x$, o sienos yra lygiagrečios duotojo tetraedro *ABCD* sienoms.



211 pav.



212 pav.

Rutulio, įbrėžto į tetraedrą *ABCD*, centrą pažymime O. Šio rutulio spindulys $r=\frac{a}{2\sqrt{6}}$. Kadangi taškas O nuo tetraedro *MNKL* sienų yra nutolęs atstumu, lygiu $r-x$, tai jis yra rutulio, įbrėžto į tetraedrą *MNKL*, centras. Šio rutulio spindulys lygus

$$r-x=\frac{x}{\sqrt{6}}.$$

Iš čia

$$x=\frac{r\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}}=\frac{a}{2(1+\sqrt{6})}.$$

13.4. Tarkime, kad $(DO]$ – tetraedro *ABCD* aukštinė, $\widehat{OAD}=\alpha$, *MNK* – duotasis pjūvis (212 pav.). Kadangi tiesė BC yra lygiagreti plokštumai *MNK*, tai plokštumų *ABC* ir *MNK* susikirtimo tiesė bus lygiagreti BC, t.y. $[MN] \parallel [BC]$. Pagal uždavinio są-

lygą $|KA|=\frac{a}{2}$, $\widehat{ALK}=\frac{\pi}{4}$ (kaip dvisienio kampo, kurį sudaro plokštumų KMN ir ABC linijinis kampas).

Iš trikampio AOD turime

$$\cos\alpha=\frac{|AO|}{|AD|}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Pritaikę sinusų teoremą, iš trikampio AKL gauname

$$|KL|=\frac{|KA|\cdot\sin\alpha}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{a}{\sqrt{3}},$$

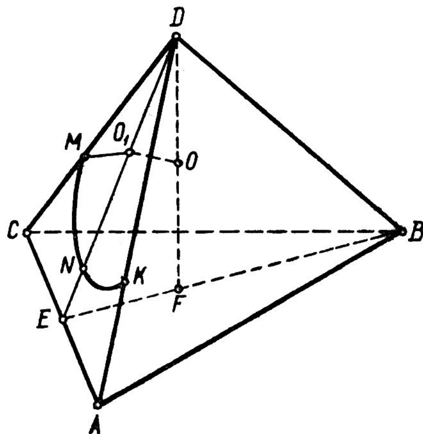
$$|AL|=\frac{|AK|\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{a}{\sqrt{2}}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{a(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{3}}.$$

Iš trikampių AMN bei ABC panašumo išplaukia, kad

$$|MN|=\frac{|BC|\cdot|AL|}{|AE|}=\frac{a(1+\sqrt{2})}{3}.$$

Vadinasi,

$$S_{MNK}=\frac{1}{2}|MN|\cdot|KL|=\frac{a^2(1+\sqrt{2})}{6\sqrt{3}}.$$



213 pav.

13.5. Rutulio viduje yra sienos ACD (213 pav.) dalis, apribota atkarpomis DK, DM ir lanku MNK. Pastarasis priklauso apskritimui, kurio centras yra taške O_1 ir spindulys $r=|O_1D|=|O_1M|=|O_1N|$; čia O – rutulio centras, $[OO_1]\perp[DE]$. Taigi ieškomasis plotas

$$S=6(S_{O_1MD}+S_{O_1MN}).$$

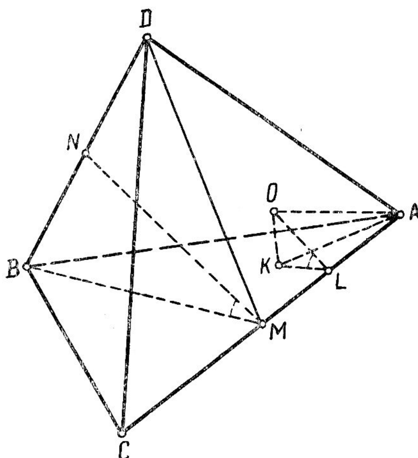
Iš trikampių OO_1D ir DEF panašumo gauname

$$r=|O_1D|=\frac{|OD|\cdot|DF|}{|DE|}=\frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

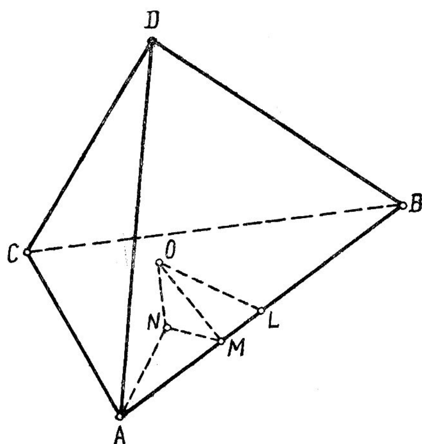
Kadangi trikampis O_1MD yra lygiašonis ($|O_1M|=|O_1D|$) ir $\widehat{O_1DM}=\frac{\pi}{6}$, tai $\widehat{MO_1D}=\frac{2\pi}{3}$ ir $\widehat{MO_1N}=\frac{\pi}{3}$. Taigi

$$S=6\left(\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{6}\pi r^2\right)=\frac{2a^2}{27}(2\pi+3\sqrt{3}).$$

13.6. Nubrėžiame rutulio liečiamąją plokštumą, lygiagrečią tetraedro sienai BCD (be to, taip, kad rutulys ir taškas A būtų vienoje šios plokštumos pusėje). Nuo trisienio kampo, kurio viršūnė A, ši plokštuma nukerta taisyklingąjį tetraedrą, į kurį įbrėžto rutulio spindulys lygus R. Atstumas nuo rutulio centro O iki taško A lygus rutulio, apibrėžto apie gautąjį tetraedrą, spinduliui, t.y. lygus $3R$.



214 pav.



215 pav.

Pastaba. Iš taško O į plokštumą ABC ir tiesę AC nuleidžiame statmenis OK bei OL (214 pav.). Tada iš lygybių $|OK|=R$, $|OA|=3R$ lengvai gauname

$$|AK|=2R\sqrt{2},\ |KL|=R\sqrt{2},\ |OL|=R\sqrt{3},\ |AL|=R\sqrt{6}.$$

Šiuos sąryšius panaudosime, spręsdami kitus uždavinius.

13.7. Tarkime, kad O — ieškomojo rutulio centras, N — jo projekcija sienoje ABC, $[OM]\perp[AB]$, L — $[AB]$ vidurio taškas (215 pav.). Atkarpos ON ilgį pažymėsime r. Tada (žr. pastabą, kaip spręsti **13.6** uždavinį) $|MN|=r\sqrt{2}$, $|AM|=r\sqrt{6}$, $|OM|=r\sqrt{3}$. Aišku, kad $|ML|=\big||AL|-|AM|\big|=\left|\frac{a}{2}-r\sqrt{6}\right|$, $|OL|=\frac{a}{2}\pm r$; čia pliuso ženklas atitinka rutulių lietimąsi iš išorės, minuso ženklas — iš vidaus. Bet $|OL|^2=|OM|^2+|ML|^2$, t.y.

$$\left(\frac{a}{2}\pm r\right)^2=3r^2+\left(\frac{a}{2}-r\sqrt{6}\right)^2.$$

Išsprendę šią lygtį, turime $r=\frac{a}{8}(\sqrt{6}\pm 1)$.

13.8. Sakykime, kad O_1, O_2 – duotųjų rutulių centrai, O_3, O_4—jų projekcijos sienoje ABC, $[O_1M]\perp[AB]$, $[O_2N]\perp[AB]$ (216 pav.). Tada $|AM|=2R\sqrt{6}$, $|BN|=3R\sqrt{6}$, $|O_3M|=2R\sqrt{2}$, $|O_4N|=3R\sqrt{2}$ (žr. pastabą, kaip spręsti **13.6** uždavinį).

Iš trapecijų $O_1O_2O_4O_3$ ir O_3O_4MN gauname

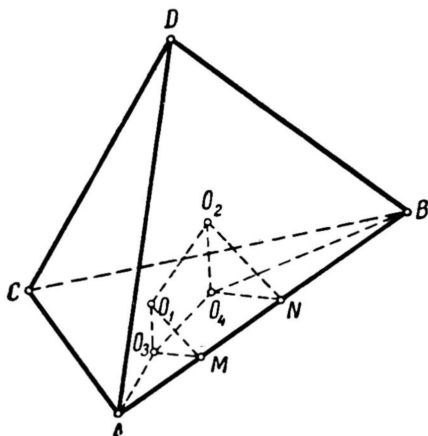
$$|O_3O_4|^2=(3R+2R)^2-(3R-2R)^2=24R^2,$$

$$MN=\sqrt{|O_3O_4|^2-(|O_4N|-|O_3M|)^2}=R\sqrt{22}.$$

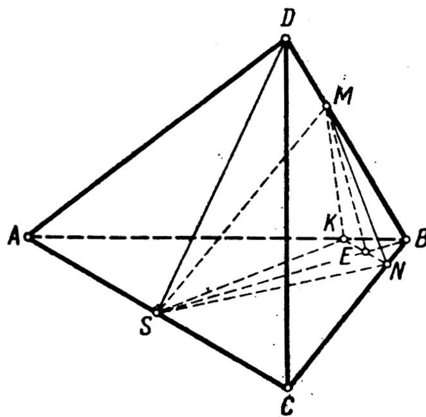
Vadinasi,

$$|AB|=|AM|+|MN|+|BN|=(5\sqrt{6}+\sqrt{22})R.$$

13.9. Sakykime, kad $S-[AC]$ vidurio taškas, $|SK|=|SM|=|SN|$ — kūgio sudaromosios (217 pav.). Kūgio pagrindo spindulys yra apskritimo, apibrėžto apie trikampį MNK, spindulys. Randame šio trikampio kraštines.



216 pav.



217 pav.

Iš lygiašonio trikampio BDS ($|BS|=|DS|$) gauname

$$\cos\widehat{BDS}=\frac{|BD|}{2|DS|}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Iš trikampio DSM, pritaikę kosinusų teoremą, turime

$$|SM|^2=|SD|^2+|DM|^2-2|SD|\cdot|DM|\cdot\cos\widehat{BDS}=\frac{19a^2}{36}.$$

Kadangi $|SK|=|SN|$, tai $[KN]\parallel[AC]$ ir todėl trikampis BKN – taisyklingasis. Taigi

$$|BE|=\sqrt{3}\,|NE|,\quad |SE|=\frac{a\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\,|NE|.$$

Iš trikampio SNE gauname $|SN|^2=|NE|^2+|SE|^2$, t.y.

$$\frac{19a^2}{36}=|NE|^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\,|NE|\right)^2.$$

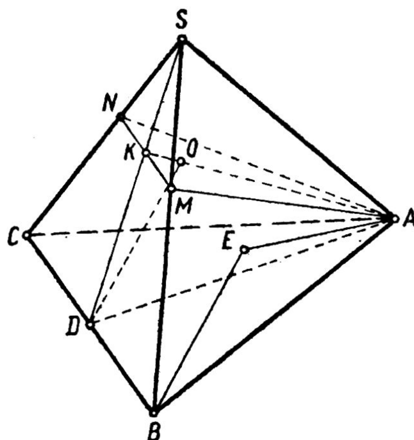
Išsprendę šią lygtį, randame $|NE|=\frac{a(9\pm7)}{24}$. Bet $|NE|<\frac{a}{2}$, vadinasi, $|NE|=$ $=\frac{a}{12}$, $|KN|=|BN|=\frac{a}{6}$. (Pliuso ženklas atitinka tą atvejį, kai kūgis kerta ne pačias briaunas *AB*, *BC*, bet jų tęsinius už taškų *A* ir *C*.) Pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampio *BMN* turime

$$|MN|^2=|BM|^2+|BN|^2-2|BM|\cdot|BN|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{13a^2}{36},\ \text{t.y.}\ |MN|=|KM|=\frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Apskritimo, apibrėžto apie trikampį *MNK*, spindulį *r* apskaičiuojame pagal formulę

$$r=\frac{|MN|}{2\sin\widehat{MKN}}=\frac{|MN|^2}{2|ME|}=\frac{13a}{6\sqrt{51}}.$$

13.10. Kadangi tiesė *BC* lygiagreti kertančiajai plokštumai ir priklauso sienos *BCS* plokštumai, tai kertančiosios plokštumos bei sienos *BCS* plokštumos susikirtimo tiesė yra lygiagreti [*BC*]. Iš to išplaukia, kad pjūvyje gausime lygiašonį trikampį *AMN*: čia $[MN]\parallel[BC]$, $|AN|=|AM|$ (218 pav.). Tarkime, kad *D* — briaunos *BC* vidurio



218 pav.

taškas, [*DO*] ir [*BE*] – statmenys, nuleisti į kertančiąją plokštumą. Kadangi tiesė *BC* lygiagreti kertančiajai plokštumai, tai $|DO|=|BE|$. Kampas *BAE* – tai kampas tarp tiesės *AB* ir kertančiosios plokštumos, t.y. $\widehat{BAE}=\frac{\pi}{6}$.

Iš stačiojo trikampio *BAE* turime

$$|DO|=|BE|=\frac{a}{2}.$$

Norėdami apskaičiuoti trikampio *AMN* plotą, randame $|AK|$ ir $|MN|$. Pažymime, $\widehat{KAD}=\alpha$, $\widehat{KDA}=\beta$. Pritaikę sinusų teoremą, iš trikampio *AKD* gauname

$$|AK|=\frac{|AD|\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{|AD|}{\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta+\cos\alpha}.$$

Iš stačiojo trikampio AOD randame

$$\sin\alpha=\frac{|OD|}{|AD|}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \cos\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Iš lygiašonio trikampio ASD turime $\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{2\sqrt{2}}$. Vadinasi, $|AK|=\frac{3a\sqrt{2}}{5}$.

Pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampio AKD turime

$$|KD|=\sqrt{|AK|^2+|AD|^2-2|AK|\cdot|AD|\cdot\cos\alpha}=\frac{3a\sqrt{3}}{10}.$$

Kadangi trikampiai SMN ir SBC yra panašūs, tai

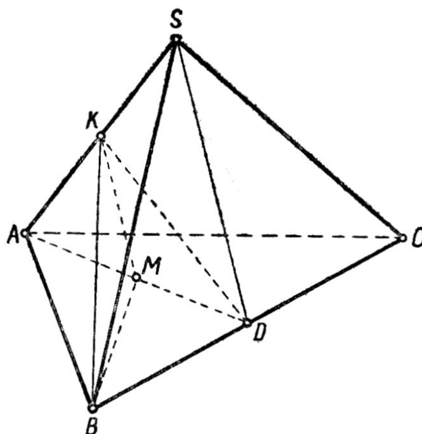
$$|MN|=\frac{|BC|\cdot|SK|}{|SD|}=\frac{a(|SD|-|KD|)}{|SD|}=\frac{2a}{5}.$$

Galutinai

$$S_{AMN}=\frac{1}{2}|AK|\cdot|MN|=\frac{3\sqrt{2}\,a^2}{25}.$$

Pastaba. Spręsdami šį uždavinį, kai kurie stojantieji į MFTI suklydo, pažymėdami tašką E. Atkreipiame dėmesį, kad taškas E yra tiesinių BE ir OE susikirtimo taškas; čia $[BE]\parallel[DO]$ ir $[OE]\parallel[BC]$.

13.11. Galimi du skirtingi atvejai: 1) reikia rasti atstumą tarp sienos SBC aukštinės SD ir sienos SAB aukštinės BK (219 pav.); 2) reikia rasti atstumą tarp sienos SBC aukštinės SD ir sienos SAB aukštinės AN (220 pav.).



219 pav.

Pirmasis atvejis. Nubrėžiame $[KM]\parallel[SD]$ (žr. 219 pav.). Kadangi tiesė SD lygiagreti plokštumai BMK, tai ieškomasis atstumas x lygus piramidės $BDKM$ aukštinei, nubrėžtai iš viršūnės D.

Atstumą x apskaičiuojame iš lygties

$$V=\frac{1}{3}\,xS_{BKM}=\frac{1}{3}\,hS_{BDM};$$

čia V – piramidės $BDKM$ tūris, h – taško K atstumas nuo plokštumos BDM. Kadangi K – briaunos AS vidurio taškas, tai $h=\frac{1}{2}H$; čia H – tetraedro $SABC$ aukštinė, t.y.

$$h=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Kadangi $[KM]\parallel[SD]$, tai M – $[AD]$ vidurio taškas, ir, vadinasi,

$$S_{BDM}=\frac{1}{2}|BD|\cdot|DM|=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}.$$

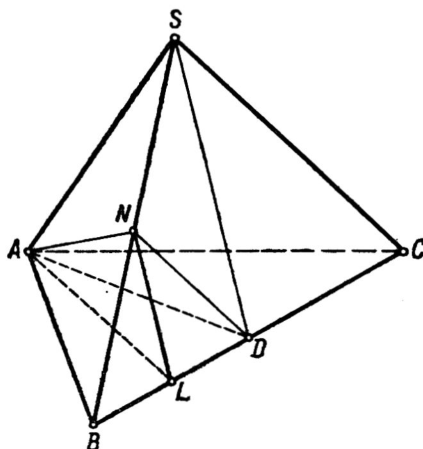
Kad galėtume apskaičiuoti trikampio BKM plotą, randame jo kraštinių ilgius. Turime $|BK|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $|KM|=\frac{1}{2}|SD|=\frac{a\sqrt{3}}{4}$, $|BM|=\sqrt{|BD|^2+|DM|^2}=\frac{a\sqrt{7}}{4}$. Pritaikę Herono formulę, gauname

$$S_{BKM}=\frac{a^2\sqrt{5}}{16}.$$

Taigi

$$x=\frac{hS_{BDM}}{S_{BKM}}=\frac{a}{\sqrt{10}}.$$

Antrasis atvejis. Nubrėžiame $[NL]\parallel[SD]$ (žr. 220 pav.). Kadangi tiesė SD lygiagreti plokštumai ANL, tai nežinomas atstumas y lygus piramidės $ADNL$ aukštinei, nuleistai iš viršūnės D.



220 pav.

Atstumą y apskaičiuojame iš lygties

$$V_1=\frac{1}{3}yS_{ANL}=\frac{1}{3}hS_{ADL};$$

čia V_1 — piramidės $ADNL$ tūris,

$$h=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{3}},\quad S_{ADL}=\frac{1}{2}|AD|\cdot|DL|=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$$

($L-[BD]$ vidurio taškas, nes $[NL]\parallel[SD]$).

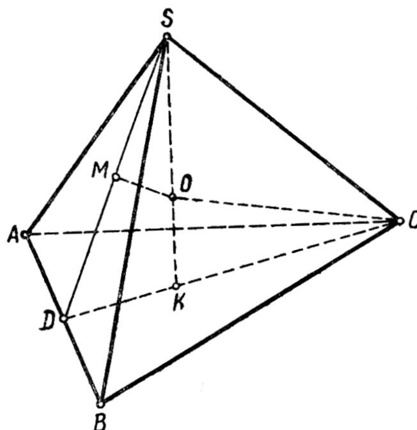
Kad galėtume apskaičiuoti trikampio ANL plotą, randame jo kraštinių ilgius. Turime $|AN|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $|NL|=\frac{1}{2}|SD|=\frac{a\sqrt{3}}{4}$, $|AL|=\sqrt{|AD|^2+|DL|^2}=$ $=\frac{a\sqrt{13}}{4}$. Pritaikę Herono formulę, turime

$$S_{ANL}=\frac{a^2\sqrt{35}}{32}.$$

Vadinasi,

$$y=\frac{hS_{ADL}}{S_{ANL}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{35}}.$$

13.12. Tarkime, kad O — duotųjų sferų centras. Kadangi taškas O vienodai nutolęs nuo tetraedro $SABC$ viršūnių A, B, C (221 pav.), tai jis priklauso tetraedro aukštinei SK arba jos tęsiniui. Iš taško O į sieną SAB nuleidžiame statmenį OM. Šis statmuo bus trikampio SCD plokštumoje; čia D – briaunos AB vidurio taškas. Duota $|OM|=r$, $|OC|=R$.



221 pav.

Statieji trikampiai SOM bei SKD, turintys bendrą smailųjį kampą KSD, yra panašūs. Todėl

$$\frac{|SO|}{|MO|}=\frac{|SD|}{|KD|}=3, \text{ t.y. } |SO|=3r.$$

Briaunos AB ilgį pažymime x. Tada $|KC|=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $|SK|=x\sqrt{\frac{2}{3}}$, $|KO|=$ $=\left|\,|SK|-|SO|\,\right|=\left|x\sqrt{\frac{2}{3}}-3r\right|$. Bet $|KO|^2+|KC|^2=|OC|^2$, t.y.

$$\left(x\sqrt{\frac{2}{3}}-3r\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=R^2.$$

Išsprendę šią lygtį, randame

$$x=r\sqrt{6}\pm\sqrt{R^2-3r^2}. \tag{1}$$

Dabar reikia nuspręsti, kokį ženklą imsime (1) formulėje, atsižvelgdami į sąryšį tarp R ir r. Pirmiausia (1) reiškinys turi būti realus. Todėl turi galioti nelygybė

$$R^2-3r^2\geqslant 0, \text{ t.y. } R\geqslant r\sqrt{3}.$$

Toliau, prisiminę sąlygą, kad r spindulio sfera turi liesti tetraedro šonines sienas, turime $|SM|\leqslant|SD|$. Bet $|SD|=\frac{x\sqrt{3}}{2}$, o iš stačiojo trikampio SOM išplaukia, kad $|SM|=2r\sqrt{2}$. Taigi turi galioti nelygybė

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(r\sqrt{6}\pm\sqrt{R^2-3r^2})\geqslant 2r\sqrt{2},$$

t.y.

$$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2-3r^2}\geqslant\frac{r}{\sqrt{2}}. \qquad (2)$$

Vadinasi, (1) formulėje reikia rašyti pliuso ženklą. Taigi

$$x=r\sqrt{6}+\sqrt{R^2-3r^2}.$$

13.24. Sakykime, kad K – taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ aukštinės SO vidurio taškas (222 pav.), $[KM]\perp[AS]$, $[KN]\perp[DS]$. Duota $|KM|=h$, $|KN|=b$. Pažymime $|OD|=x$, $|OS|=y$. Kadangi trikampiai SNK ir SOD yra panašūs, tai

$$x\sqrt{\frac{1}{4}y^2-b^2}=by. \qquad (1)$$

Iš trikampių SMK ir SAO panašumo turime

$$2x\sqrt{\frac{1}{4}y^2-h^2}=hy. \qquad (2)$$

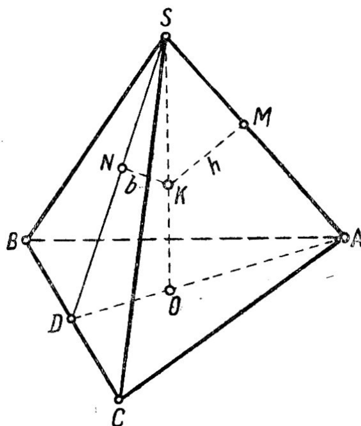
Išsprendę (1)—(2) lygčių sistemą, gauname

$$x=\frac{bh\sqrt{3}}{\sqrt{h^2-b^2}}, \quad y=\frac{2bh\sqrt{3}}{\sqrt{4b^2-h^2}}.$$

Vadinasi,

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}yS_{ABC}=x^2y\sqrt{3}=$$

$$=\frac{18b^3h^3}{(h^2-b^2)\sqrt{4b^2-h^2}}.$$



222 pav.

13.25. Tarkime, kad $|AB|=a$ — piramidės $SABC$ pagrindo kraštinė (223 pav.), $[SO]$ – piramidės aukštinė, plokštuma ACM yra statmena briaunai BS, $\widehat{BDS}=x$. Tada $\widehat{AMC}=\alpha$,

$$|AM|=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad |OD|=\frac{a}{2\sqrt{3}}, \quad |SD|=\frac{a}{2\sqrt{3}\cos x},$$

$$|AS|=\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{12\cos^2 x}}.$$

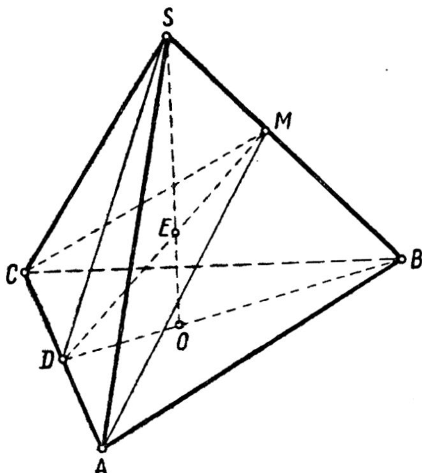
Trikampio ABS plotas lygus

$$\frac{1}{2}\,|AM|\cdot|BS|=\frac{1}{2}\,|AC|\cdot|SD|,$$

t.y.

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{3\cos^2 x}}=\frac{2}{\sqrt{3}\cos x}.$$

Išsprendę šią lygtį, randame $\sin x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\alpha}{2}$. Taigi $x=\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.



223 pav.

13.26. Ritinio viršutinio pagrindo apskritimas yra įbrėžtas į trikampį $A_1B_1C_1$. Šis trikampis yra duotosios piramidės $SABC$ pjūvis, gautas, piramidę perkirtus ritinio viršutinio pagrindo plokštuma (224 pav.). Tarkime, kad SO – piramidės aukštinė, $|AB|=a$, $|O_1D_1|=r$. Tuomet

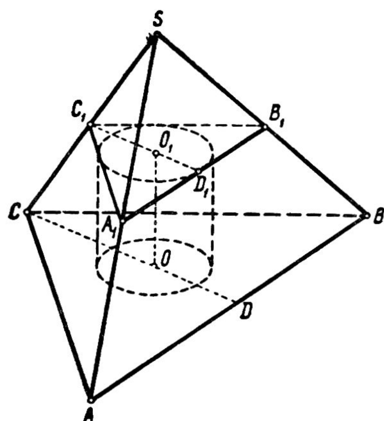
$$|OO_1|=2r,\ |SO|=|CO|=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Bet $|SO|=|SO_1|+|O_1O|=|C_1O_1|+|O_1O|=4r$, todėl $a=4\sqrt{3}\,r$. Vadinasi, $V_{\text{rit.}}=2\pi r^3$, $V_{\text{pir.}}=16\sqrt{3}\,r^3$, $\frac{V_{\text{pir.}}}{V_{\text{rit.}}}=\frac{8\sqrt{3}}{\pi}$.

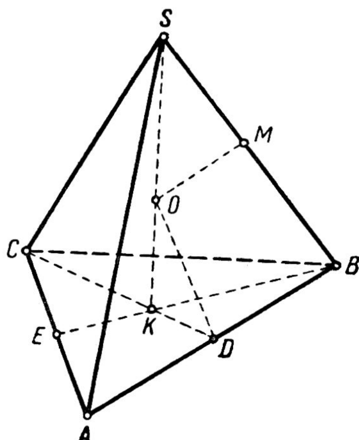
13.27. Sakykime, kad SK – duotosios piramidės $SABC$ aukštinė (225 pav.), O – rutulio centras, $[OM]\perp[BS]$, $|OM|=|OD|=r$.

Atkarpos BM ir BD, kaip dvi to paties rutulio liestinės, nubrėžtos iš vieno taško B, yra kongruenčios, t.y. $|BM|=|BD|=\frac{a}{2}$. Kadangi trikampiai SOM ir SBK yra panašūs, tai

$$r=|OM|=\frac{|SM|\cdot|BK|}{|SK|}=\frac{\left(l-\frac{a}{2}\right)\frac{a}{\sqrt{3}}}{\sqrt{l^2-\frac{a^2}{3}}}=\frac{a(2l-a)}{2\sqrt{3l^2-a^2}}.$$



224 pav.



225 pav.

13.28. Sakykime, kad O – rutulio centras, $[OD]\perp[BS]$, $|OA|=|OD|=r$, $[DE]$ ir $[SK]$ – statmenys, nuleisti į plokštumą ABC (226 pav.). Atkarpos BD ir AB kaip dvi tos pačios sferos liestinės, nubrėžtos iš vieno taško B, yra kongruenčios, t.y. $|BD|=|AB|=a$. Kadangi trikampiai BDE ir BSK yra panašūs, tai

$$|DE|=\frac{|BD|\cdot|SK|}{|BS|}=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2},$$

$$|BE|=\frac{|BK|\cdot|BD|}{|BS|}=\frac{a^2}{b\sqrt{3}}.$$

Pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampio ABE gauname

$$|AE|^2=|AB|^2+|BE|^2-2|AB|\cdot|BE|\cos\frac{\pi}{6}=a^2-\frac{a^3}{b}+\frac{a^4}{3b^2}.$$

Trapecijos $AODE$ kampai prie viršūnių A ir E yra statieji. Vadinasi,

$$|OD|^2=|AE|^2+(|AO|-|DE|)^2,$$

t.y.

$$r^2=a^2-\frac{a^3}{b}+\frac{a^4}{3b^2}+\left(r-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2}\right)^2.$$

Išsprendę šią lygtį, randame

$$r=\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{b^2-\frac{1}{3}a^2}}.$$

13.29. Nesunku įrodyti, kad rutulio centras O yra piramidės $SABC$ aukštinėje SD (227 pav.). Nubrėžiame $[OL]\perp[BM]$. Pažymime $|OL|=|OD|=r$. Kadangi atkarpos BL ir BD kaip to paties rutulio liestinės, nubrėžtos iš vieno taško B, yra kongruenčios, tai $|BL|=|BD|=\frac{a}{\sqrt{3}}$. Pusiaukraštinę BM randame iš lygybės

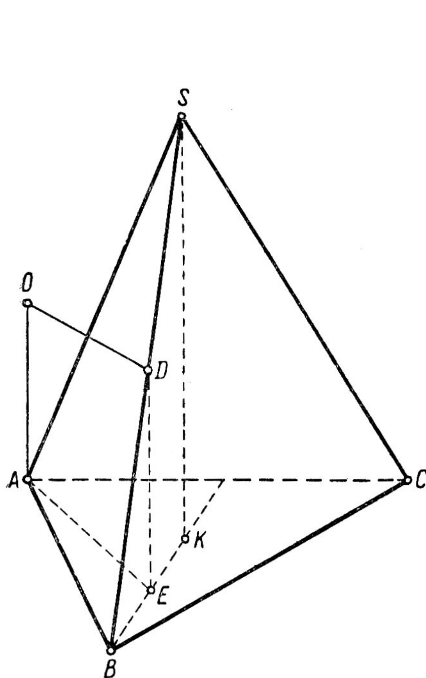
$$(2|BM|)^2+|AS|^2=2|2AB|^2+2|BS|^2.$$

Iš stačiojo trikampio ASD gauname

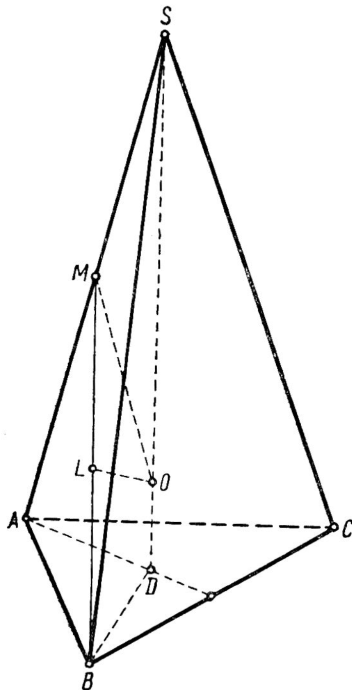
$$|AS|=\frac{a\sqrt{10}}{\sqrt{3}}.$$

Tuomet

$$|BM|=\frac{2a}{\sqrt{3}},\quad |ML|=|BM|-|BL|=\frac{a}{\sqrt{3}}.$$



226 pav.



227 pav.

Iš stačiojo trikampio MOL turime

$$|MO|^2=r^2+\frac{1}{3}a^2.$$

Pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampio MOS gauname

$$|MO|^2=|MS|^2+|OS|^2-2|MS|\cdot|OS|\cdot\cos\widehat{MSO}.$$

Bet $|SO|=|SD|-|OD|=a\sqrt{3}-r$, o iš trikampio ASD randame

$$\cos\widehat{MSO}=\frac{|DS|}{|AS|}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Vadinasi,

$$r^2+\frac{1}{3}a^2=\frac{10a^2}{12}+(a\sqrt{3}-r)^2-2\cdot\frac{a\sqrt{10}}{2\sqrt{3}}(a\sqrt{3}-r)\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Išsprendę šią lygtį, turime

$$r=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

13.34. Įrodykite, kad $abc=2hS$; čia

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$$

yra duotosios piramidės pagrindo plotas (žr. **13.33** uždavinio rezultatą).

13.35. Įrodykite, kad apie duotąją piramidę apibrėžta sfera yra kartu apibrėžta apie stačiakampį gretasienį, kurio briaunos AS, BS ir CS.

13.36. Sakykime, kad ABS – duotosios piramidės šoninė siena, AB – pagrindo įžambinė. Įrodykite, kad $\widehat{SAB}=\widehat{SBA}=\beta$ ir kad sferos, apibrėžtos apie duotąją piramidę, spindulys lygus apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABS, spinduliui.

13.37. Panaudokite **13.36** uždavinio rezultatą ir įrodykite, kad duotosios piramidės aukštinė, nuleista į pagrindą, sutampa su trikampio ABS aukštine SD (žr. nurodymą **13.36** uždaviniui).

13.38. Įrodykite, kad duotosios piramidės šoninės briaunos su pagrindu sudaro kongruenčius kampus, ir pasinaudokite nurodymu **13.37** uždaviniui.

13.41. Įrodykite, kad rutulio, apibrėžto apie duotąją piramidę, centras sutampa su tašku, kuriame plokštuma, statmena briaunai SA ir einanti per jos vidurį, kerta statmenį, nubrėžtą plokštumai ABC per apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABC, centrą.

13.42. Tarkime, kad D – briaunos BC vidurio taškas. Tuomet AD – duotosios piramidės aukštinė. Aukštinės AD ilgį pažymime x. Turime $|BD|=\frac{1}{2}$, $|SD|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $|AS|=\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}$. Iš trikampių ABD ir ABS (pagal kosinusų teoremą) turime

$$|AB|^2=x^2+\frac{1}{4}=1+\left(x^2+\frac{3}{4}\right)-\sqrt{x^2+\frac{3}{4}}.$$

Išsprendę šią lygtį, randame $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Vadinasi,

$$V_{SABC}=\frac{1}{3}\,xS_{BCS}=\frac{\sqrt{2}}{8}\ (\text{cm}^3).$$

13.43. Sakykime, kad O – rutulio, įbrėžto į duotąją piramidę $ABCD$, centras (228 pav.), $|OK|=r$ – jo spindulys, AB – pagrindo ABC įžambinė, $[OL]\perp[AB]$, $[OM]\perp[BC]$, $[ON]\perp[AC]$.

Kadangi rutulio, įbrėžto į duotąją piramidę, centras sutampa su dvisienių kampų, kuriuos sudaro piramidės sienos, pusiaukampinių plokštumų susikirtimo tašku, tai $\widehat{OMK}=\frac{\alpha}{2}$, $\widehat{ONK}=\frac{\beta}{2}$, $\widehat{OLK}=\frac{\gamma}{2}$. Vadinasi,

$$|KM|=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\quad |KN|=r\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},\quad |KL|=r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

Trikampio ABC plotas lygus

$$\frac{1}{4}\,l^2=\frac{1}{2}\,(|BC|\cdot|KM|+|AC|\cdot|KN|+|AB|\cdot|KL|)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,lr\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\,lr\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+lr\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right);$$

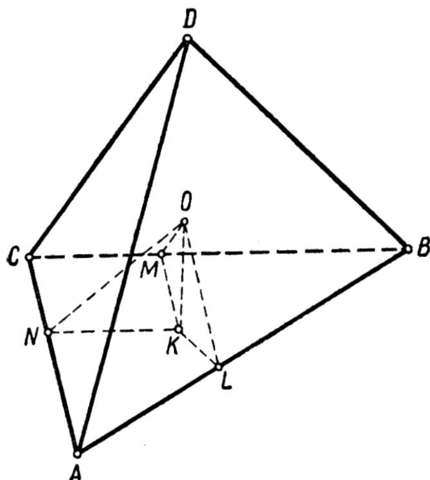
iš čia

$$r=\frac{l}{2\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\sqrt{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)}.$$

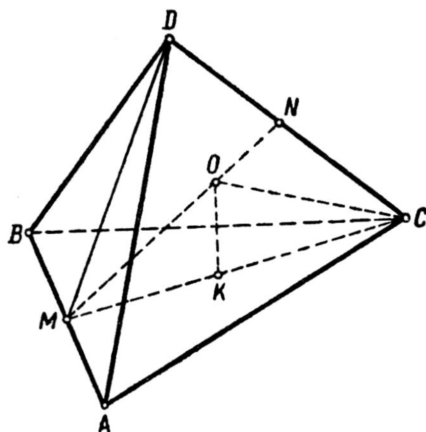
13.44. Tarkime, kad $[CM]\perp[AB]$, $[MN]\perp[CD]$ (229 pav.), K – apibrėžto apie trikampį ABC apskritimo centras, $[KO]\perp[CM]$. Nesunku pastebėti, kad taškas O – rutulio, apibrėžto apie duotąją piramidę, centras, OC – šio rutulio spindulys. Turime

$$|DM|=|CM|=\sqrt{|AC|^2-|AM|^2}=\sqrt{65},$$

$$|MN|=\sqrt{|CM|^2-|CN|^2}=7.$$



228 pav.



229 pav.

Pritaikę formulę $R=\frac{abc}{4S}$, randame $|KC|=\frac{37}{\sqrt{65}}$. Taigi

$$|MK|=|CM|-|KC|=\frac{28}{\sqrt{65}}.$$

Kadangi trikampiai MOK ir MCN yra panašūs, tai

$$|OK|=\frac{|CN|\cdot|MK|}{|MN|}=\frac{16}{\sqrt{65}}.$$

Vadinasi,

$$|OC|=\sqrt{|OK|^2+|KC|^2}=5\ \text{(cm)}.$$

13.45. Sakykime, D – briaunos BC vidurio taškas, O – rutulio, apibrėžto apie duotąją piramidę, centras (nesunku įrodyti, kad jis yra tiesėje AD), $|OA|=|OC|$ – jo spindulys, $[OM]\perp[DS]$ (230 pav.). Tada M – apskritimo, apibrėžto apie trikampį BCS, centras. Iš trikampių KDS $\left(\text{pagal sąlygą kampas } KDS \text{ lygus } \frac{\pi}{4}\right)$ ir SCD gauname

$$|SD|=h\sqrt{2},\quad |SC|=\sqrt{2h^2+\frac{1}{4}a^2}.$$

Iš trikampio MCS turime

$$|SM|=\frac{|SC|}{2\cos \widehat{DSC}}=\frac{|SC|^2}{2|SD|}=\frac{a^2+8h^2}{8h\sqrt{2}};$$

iš čia

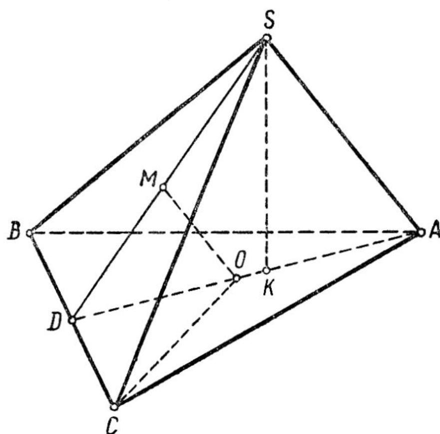
$$|DM|=|SD|-|SM|=\frac{8h^2-a^2}{8h\sqrt{2}}.$$

Iš trikampio OMD randame

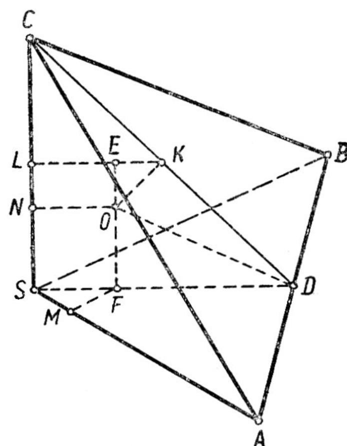
$$|OD|=|DM|\sqrt{2}=\frac{8h^2-a^2}{8h}.$$

Vadinasi,

$$|OC|=\sqrt{|OD|^2+|CD|^2}=\frac{1}{8h}\sqrt{a^4+64h^4}.$$



230 pav.



231 pav.

13.46. Sakykime, kad D – briaunos AB vidurio taškas (231 pav.) Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad SCD – lygiašonis statusis trikampios, $|SD|=|AD|=R$, SCD – dvisienio kampo SC pusiaukampinė plokštuma; sferos, įbrėžtos į trisienį kampą C, centras O yra plokštumoje SCD.

Nubrėžiame $[OK]\perp[CD]$, $[OF]\perp[SD]$, $[FM]\perp[AS]$, $[KL]\perp[CS]$. Pažymime $|OK|=|FM|=x$. Turime $|LE|=|SF|=|FM|\sqrt{2}=x\sqrt{2}$, $|EK|=\frac{1}{\sqrt{2}}|OK|=$ $=\frac{x}{\sqrt{2}}$; $|LK|=|LE|+|EK|=\frac{3x}{\sqrt{2}}$, $|CK|=|LK|\sqrt{2}=3x$, $|CD|=|SD|\sqrt{2}=$ $=R\sqrt{2}$. Aišku, kad $|DK|=||CD|-|CK||=|R\sqrt{2}-3x|$ (taškas K gali būti ir $[CD]$ tęsinyje), $|OD|=|R\pm x|$; čia pliuso ženklas atitinka sferų lietimąsi iš išorės, minuso ženklas – lietimąsi iš vidaus. Iš stačiojo trikampio KOD gauname $|OD|^2=|OK|^2+|KD|^2$, t.y. $(R\pm x)^2=x^2+(R\sqrt{2}-3x)^2$. Išsprendę šią lygtį, randame

$$x=\frac{R}{9}\left(3\sqrt{2}+1\pm\sqrt{10+6\sqrt{2}}\right) \text{ ir } x=\frac{R}{9}\left(3\sqrt{2}-1\pm\sqrt{10-6\sqrt{2}}\right).$$

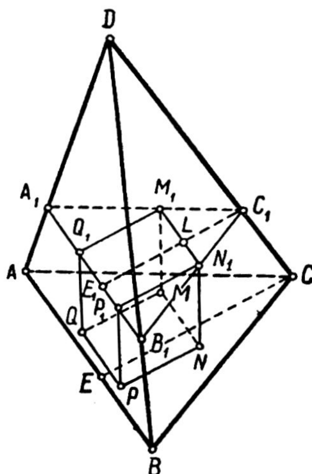
13.47. Piramidėje $ABCD$, nubraižę kertančiąją plokštumą $P_1Q_1M_1N_1$, gauname pjūvį $A_1B_1C_1$ (232 pav.). Šis pjūvis lygiagretus sienai ABC. Nubrėžiame $[C_1E_1] \perp [A_1B_1]$. Kubo briaunos ilgį pažymime x. Tuomet piramidės $A_1B_1C_1D$ aukštinės, nuleistos iš viršūnės D, ilgis lygus $c-x$. Pritaikę teoremą apie lygiagrečius piramidės pjūvius, gauname

$$\frac{|A_1B_1|}{|AB|}=\frac{|C_1E_1|}{|CE|}=\frac{c-x}{c}.$$

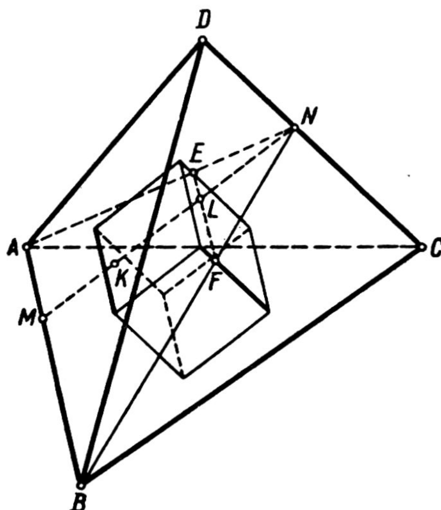
Iš čia randame $|A_1B_1|=\frac{a(c-x)}{c}$, $|C_1E_1|=\frac{b(c-x)}{c}$. Kadangi trikampiai $A_1B_1C_1$ ir $M_1N_1C_1$ yra panašūs, tai $\frac{|A_1B_1|}{|M_1N_1|}=\frac{|C_1E_1|}{|C_1E_1|-x}$, t.y. $\frac{a(c-x)}{cx}=\frac{b(c-x)}{b(c-x)-cx}$. Išsprendę šią lygtį, turime

$$x=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}.$$

13.48. Pirmiausia reikia įrodyti, kad keturios kubo briaunos lygiagrečios $[AB]$ ir keturios kubo briaunos lygiagrečios $[CD]$ (233 pav.). Tiesės MN susikirtimo su kubo sienomis taškus pažymime K ir L, $|KL|=x$, $|KM|=y$, $|NL|=z$. Tada $x+y+z=c$.



232 pav.



233 pav.

Plokštuma ABN lygiagreti kuriai nors kubo sienai, nes $[MN]$ ir $[AB]$ yra lygiagrečios tam tikroms kubo briaunoms. Vadinasi, tiesės AN ir BN kerta kubo briaunas atitinkamai taškuose E, F, be to, taip, kad $|EF|=x$ ir $[EF] \parallel [AB]$. Kadangi trikampiai EFN ir ABN yra panašūs, tai

$$\frac{|EF|}{|AB|}=\frac{|LN|}{|MN|}, \text{ t.y. } \frac{x}{a}=\frac{z}{c}, \quad z=\frac{cx}{a}.$$

Samprotaudami analogiškai, iš trikampio CDM (paveiksle jis neparodytas) gautume, kad $y=\frac{cx}{b}$. Įrašę gautąsias y ir z reikšmes į lygtį $x+y+z=c$, turime $x+\frac{cx}{b}+\frac{cx}{b}=c$, iš kurios

$$x=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}.$$

13.56. Tarkime, kad O – kubo centras. $|SC|=h$ – piramidės aukštinė, x – piramidės pagrindo kraštinė (234 pav.). Kadangi pagal sąlygą apatinė kubo briauna yra tiesėje $[CD]$, o kubo centras – piramidės aukštinėje, tai viršutinė kubo briauna irgi lygiagreti $[CD]$ ir priklauso trikampio SCD plokštumai. Be to, viršutinė kubo briauna kertasi su piramidės aukštine SC taške M, kuris yra viršutinės kubo briaunos vidurio taškas. Turime

$$|MN|=\frac{1}{2}a,\ |CM|=a\sqrt{2},$$

$$|SM|=h-a\sqrt{2},$$

$$|BO|=|OC|=$$

$$=\frac{a}{\sqrt{2}},\ |SO|=h-\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Kadangi trikampiai SBO ir SAC yra panašūs, tai

$$\frac{|BO|}{|AC|}=\frac{|SO|}{|SC|},$$

234 pav.

t.y.

$$\frac{a\sqrt{2}}{x}=\frac{h\sqrt{2}-a}{h\sqrt{2}}. \quad (1)$$

Antra vertus, trikampiai SMN ir SCD irgi yra panašūs, todėl $\frac{|MN|}{|CD|}=\frac{|SM|}{|SC|}$, t.y.

$$\frac{a}{x}=\frac{h-a\sqrt{2}}{h}. \quad (2)$$

Išsprendę (1)–(2) lygčių sistemą, gauname $x=a(2\sqrt{2}-1)$, $h=\frac{a}{2}(2+3\sqrt{2}$. Vadinasi,

$$\frac{V_{\text{pir.}}}{V_{\text{kub.}}}=\frac{x^2h}{3a^3}=\frac{19\sqrt{2}}{6}-1.$$

13.57. Sakykime, kad O – rutulio, apibrėžto apie piramidę $SABCD$, centras (235 pav.), $|OS|=|OA|=R$ – šio rutulio spindulys, SK – piramidės aukštinė. Nubrėžiame $[SE]\perp[BC]$, $[OM]\perp[SE]$, $[ON]\perp[AC]$. Pagal uždavinio sąlygą $|OM|=a$, $|ON|=b$. Iš atitinkamų trikampių panašumo gauname $\frac{a}{\sqrt{R^2-a^2}}=\frac{|KE|}{|SK|}$, $\frac{b}{\sqrt{R^2-b^2}}=\frac{|AK|}{|SK|}=\frac{\sqrt{2}|KE|}{|SK|}$. Vadinasi, $\frac{b}{\sqrt{R^2-b^2}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{R^2-a^2}}$, todėl $R=$ $=\frac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$.

13.58. Sakykime, O – rutulio, įbrėžto į piramidę $SABCD$, centras (235 pav.), SK – piramidės aukštinė. Nubrėžiame $[SE]\perp[BC]$, $[OM]\perp[SE]$, $[ON]\perp[AS]$. Pagal uždavinio sąlygą $|ON|=\sqrt{2}$, $|OE|=\sqrt{5}$. Pažymime $|OM|=|OK|=r$, $|OS|=x$. Tuomet $|KE|=\sqrt{5-r^2}$, $|AK|=\sqrt{2}\sqrt{5-r^2}$. Kadangi trikampiai SOM ir SKE yra panašūs, tai

$$\frac{x+r}{\sqrt{5-r^2}}=\frac{\sqrt{x^2-r^2}}{r}. \quad (1)$$

Iš trikampių SON ir SAK panašumo išplaukia, kad

$$\frac{x+r}{\sqrt{5-r^2}}=\sqrt{x^2-2}. \qquad (2)$$

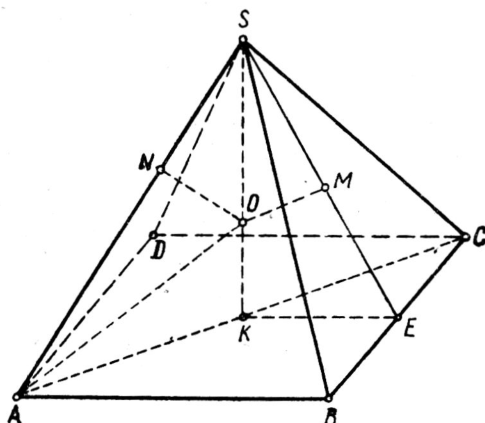
Taigi belieka išspręsti (1) ir (2) lygčių sistemą. Suprastinę (1) lygtį iš $\sqrt{x+r}>0$ ir pakėlę kvadratu, gauname

$$\frac{x+r}{5-r^2}=\frac{x-r}{r^2},$$

$$x=\frac{5r}{5-2r^2}.$$

Atėmę iš (1) lygties (2) lygtį, turime $r\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x^2-r^2}$, iš kurios $x=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}$.

Vadinasi, $\frac{5}{5-2r^2}=\frac{1}{\sqrt{r^2-1}}$. Išsprendę šią lygtį, randame $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (cm).



235 pav.

13.59. Pirmiausia atkreipiame dėmesį, kad keturkampio $KLMN$ įstrižainių susikirtimo taškas yra plokštumoje SBD ir plokštumoje SAC, t.y. priklauso piramidės aukštinei SO. Iš lygiašonių trikampių SAC ir SBD (236 pav.), pritaikę **12.49** uždavinio rezultatą, gauname

$$\frac{|OP|}{|SP|}=\frac{1}{2}\left(\frac{|AM|}{|SM|}+\frac{|CK|}{|SK|}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{|BN|}{|SN|}+\frac{|DL|}{|SL|}\right);$$

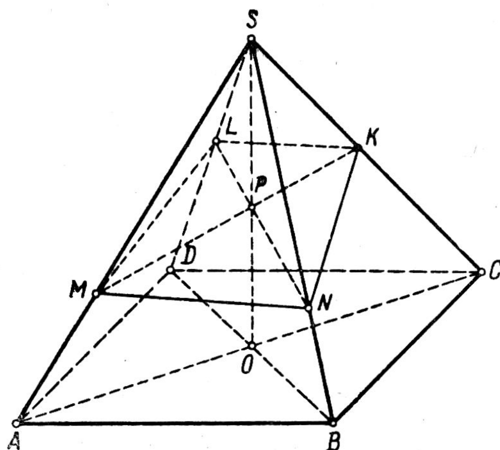
iš čia

$$\frac{|DL|}{|SL|}=m-n+p.$$

13.60. Tarkime, kad O_1 ir O_2 – duotųjų rutulių centrai (237 pav.). Kadangi piramidė taisyklinga, tai taškai O_1 ir O_2 yra trikampio SAC plokštumoje, be to, taškas O_1 priklauso piramidės aukštinei SK, o taškas O_2 – dvisienio kampo AB pusiaukampinei plokštumai. Nubrėžiame $[SD]\perp[BC]$, $[O_1E]\perp[SD]$, $[O_2L]\parallel[AC]$, $[O_2M]\perp[AC]$, $[O_2N]\perp[AB]$. Tuomet, pritaikę trijų statmenų teoremą, gauname, kad $[MN]\perp[AB]$ ir kampas O_2NM yra lygus dvisienio kampo tarp piramidės pagrindo bei šoninės sienos pusei, t.y. $\widehat{O_2NM}=\frac{1}{2}\widehat{KDS}$.

Atkarpos SD ilgį pažymime x. Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad $|KD| = \frac{1}{2}x$ ir $\widehat{KDS} = \frac{\pi}{3}$. Vadinasi, $\widehat{O_2NM} = \frac{\pi}{6}$. Iš trikampio O_2NM gauname

$$|MN| = |O_2M| \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = 2r\sqrt{3},$$



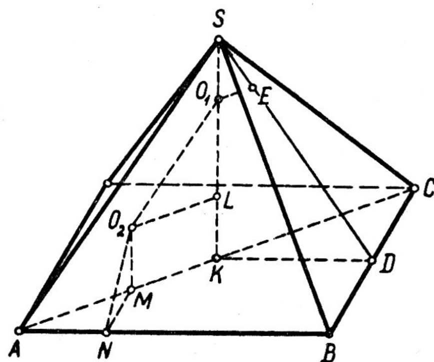
236 pav.

o iš trikampio AMN turime

$$|AM| = |MN|\sqrt{2} = 2r\sqrt{6}.$$

Vadinasi,

$$|O_2L| = |MK| = |AK| - |AM| = \frac{x}{\sqrt{2}} - 2r\sqrt{6}.$$



237 pav.

Iš trikampio SO_1E $\left(\widehat{O_1SE} = \frac{\pi}{6}\right)$ randame

$$|O_1S| = 2|O_1E| = 2r.$$

Taigi

$$|O_1L|=|SK|-|SO_1|-|KL|=\frac{x\sqrt{3}}{2}-4r.$$

Bet $|O_1O_2|^2=|O_1L|^2+|O_2L|^2$, t.y.

$$9r^2=\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}-4r\right)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-2r\sqrt{6}\right)^2.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname

$$x=\frac{2r}{5}(8\sqrt{3}\pm\sqrt{37}).$$

Pagal sąlygą rutuliai yra piramidės viduje. Todėl turi galioti nelygybė $|SK|\geqslant|SO_1|+r$, t.y. $\frac{x\sqrt{3}}{2}\geqslant 3r$. Bet šią sąlygą tenkina tik viena x reikšmė

$$x=\frac{2r}{5}(8\sqrt{3}+\sqrt{37}).$$

13.61. Perkirtę duotąją piramidę plokštuma, gauname keturkampį $AMKN$ (238 pav.), kurio įstrižainės statmenos. Jo plotas lygus

$$S_{\text{pjūv.}}=\frac{1}{2}|AK|\cdot|MN|.$$

Į kertančiąją plokštumą nuleidžiame statmenį BP. Tada kampas tarp tiesės AB ir kertančiosios plokštumos bus matuojamas kampu BAP, kuris pagal sąlygą lygus $\frac{\pi}{6}$. Todėl $|BP|=\frac{1}{2}|AB|=\frac{1}{2}a$. Iš piramidės pagrindo centro į kertančiąją plokštumą nuleidžiame statmenį OL. Kadangi tiesė BD lygiagreti kertančiajai plokštumai, tai $|OL|=|BP|=\frac{a}{2}$. Iš stačiojo trikampio AOL gauname

$$\sin\widehat{LAO}=\frac{|LO|}{|AO|}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \widehat{LAO}=\frac{\pi}{4};$$

iš čia

$$|EO|=|AO|=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad |SE|=|SO|-|EO|=\frac{3a}{\sqrt{2}}.$$

Kadangi trikampiai SMN ir SBD yra panašūs, tai

$$|MN|=\frac{|BD|\cdot|SE|}{|SO|}=\frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Kampą ACK pažymime α. Kadangi kampas KAC lygus $\frac{\pi}{4}$, tai iš trikampio AKC, pritaikę sinusų teoremą, gauname

$$|AK|=\frac{|AC|\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}|AC|}{1+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Iš trikampio SOC turime $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{|OC|}{|SO|}=\frac{1}{4}$. Vadinasi, $|AK|=\frac{8a}{5}$, $S_{\text{pjūv.}}=\frac{3\sqrt{2}}{5}a^2$.

13.62. 1) Išnagrinėsime atvejį, kai pjūvis eina per pagrindo įstrižainę AC (239 pav.). Tokiu atveju pjūvyje gauname lygiašonį trikampį ALC. Randame apskritimo, įbrėžto į šį trikampį, spindulį r_1. Iš stačiojo trikampio SPB (P – piramidės pagrindo centras), turime

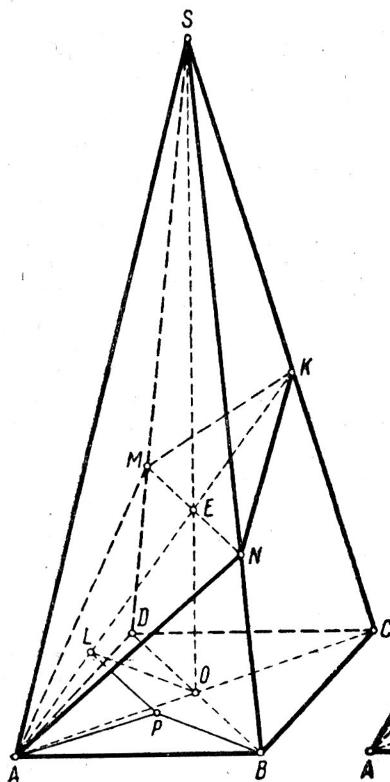
$$|BS|=\frac{|PB|}{\cos \widehat{SBP}}=\frac{|PB|}{\cos\left(\arccos \frac{2}{3}\right)}=\frac{3b}{2\sqrt{2}}.$$

Kadangi $[PL] \parallel [BS]$, tai $[PL]$ – trikampio SBD vidurinė linija. Vadinasi,

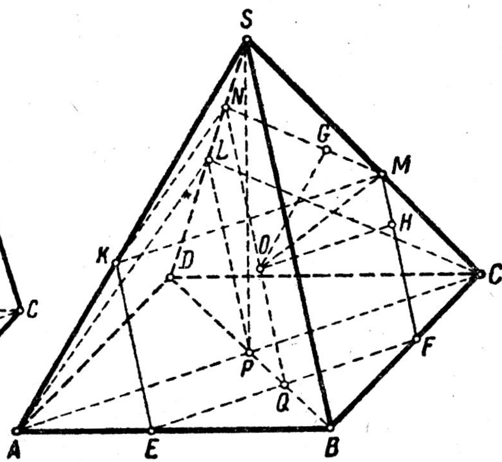
$$|PL|=\frac{1}{2}|BS|=\frac{3b}{4\sqrt{2}},$$

$$|AL|=\sqrt{|AP|^2+|PL|^2}=\frac{5b}{4\sqrt{2}},$$

$$r_1=\frac{|AC|\cdot|PL|}{|AC|+2|AL|}=\frac{b\sqrt{2}}{6}.$$



238 pav.



239 pav.

2) Jeigu kertančioji plokštuma pagrindo įstrižainę BD kerta taške, kuris yra tarp taškų P ir D, tai pjūvyje gauname trikampį, panašų į trikampį ALC, be to, jo kraštinės yra atitinkamai mažesnės už trikampio ALC kraštines. Apskritimo, įbrėžto į tokį trikampį, spindulys yra mažesnis už r_1 ir gali būti išreikštas bet kokiu skaičiumi, esančiu tarp nulio ir r_1. Taigi kiekvienas skaičius r, tinkantis nelygybei

$$0<r\leqslant\frac{b\sqrt{2}}{6},$$

yra uždavinio sprendinys.

3) Išnagrinėsime atvejį, kai kertančioji plokštuma įstrižainę BD kerta taške Q, kuris yra tarp taškų B ir P. Tuomet pjūvyje gausime penkiakampį $EFMNK$, į kurį galima įbrėžti apskritimą. Sakykime, O – šio apskritimo centras, r – jo spindulys.

Įrodome, kad $|MN|=|ON|$. Nubrėžiame $[OG]\perp[MN]$ ir $[OH]\perp[MF]$. Statieji trikampiai OMG ir OMH, turintys bendrą įžambinę OM, yra kongruentūs, nes $|OG|=|OH|=r$. Todėl

$$\widehat{OMG}=\widehat{OMH}.$$

Antra vertus, kampai NOM ir OMH kaip vidaus priešiniai, gauti, dvi lygiagrečias tieses ON ir HM perkirtus trečiąja, yra kongruentūs. Vadinasi,

$$\widehat{OMG}=\widehat{NOM},$$

t.y. trikampis OMN yra lygiašonis ir $|MN|=|ON|$.

Kadangi trikampiai DNQ ir BDS yra panašūs, tai, turėdami galvoje, kad

$$|BQ|=|QF|=r,$$

gauname

$$|NQ|=\frac{|BS|\cdot|DQ|}{|BD|}=\frac{3}{4}(b\sqrt{2}-r);$$

iš čia

$$|ON|=|QN|-|OQ|=\frac{1}{4}(3b\sqrt{2}-7r).$$

240 pav.

Kadangi trikampiai MNK ir ALC yra panašūs, tai (žr. 1) atvejį)

$$|MN|=\frac{|CL|\cdot|KM|}{|AC|}=\frac{5}{4}r.$$

Iš lygybės $|MN|=|ON|$ turime $r=\frac{b\sqrt{2}}{4}$.

13.63. Piramidės aukštinės SF ilgį pažymime h (240 pav.). Tada $|AB|=$ $=\frac{1}{\sqrt{2}}h$,

$$S_{\text{pagr.}}=\frac{1}{2}h^2,\quad |FQ|=\frac{1}{2\sqrt{2}}h$$

(Q – briaunos BC vidurio taškas),

$$|SQ|=\sqrt{|SF|^2+|FQ|^2}=\frac{3}{2\sqrt{2}}\ h.$$

Įbrėžto į šią piramidę rutulio spindulys yra apskritimo, įbrėžto į trikampį SPQ, spindulys; čia P – briaunos AD vidurio taškas (šis trikampis paveiksle neparodytas), t.y.

$$r=\frac{|PQ|\cdot|SF|}{|PQ|+2|SQ|}=\frac{1}{4}\ h.$$

Ieškomasis duotosios piramidės pjūvis yra keturkampis $AMNK$, kurio įstrižainės yra statmenos. Jo plotas lygus

$$S_{\text{pjūv.}}=\frac{1}{2}\ |KM|\cdot|AN|.$$

Sakykime, kad O – rutulio, įbrėžto į duotąją piramidę, centras, $[OE]\perp[AN]$. Statieji trikampiai AOE ir AOF yra kongruentūs, nes jie turi bendrą įžambinę AO ir $|OE|=|OF|=r=\frac{1}{4}\ h$. Vadinasi, $\widehat{OAE}=\widehat{OAF}$. Pažymime $\widehat{NAC}=\alpha$, $\widehat{ACN}=\beta$. Tada $\widehat{OAF}=\frac{\alpha}{2}$. Iš trikampio AOF turime

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{|OF|}{|AF|}=\frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{4}{3},\quad \sin\alpha=\frac{4}{5},\quad \cos\alpha=\frac{3}{5}.$$

Iš trikampio ALF gauname

$$|LF|=|AF|\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{3}\ h,$$

todėl

$$|SL|=|SF|-|LF|=\frac{1}{3}\ h.$$

Kadangi trikampiai SKM ir SBD yra panašūs, tai

$$|KM|=\frac{|BD|\cdot|SL|}{|SF|}=\frac{1}{3}\ h.$$

Pritaikę sinusų teoremą, iš trikampio ACN turime

$$|AN|=\frac{|AC|\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{h}{\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta+\cos\alpha}.$$

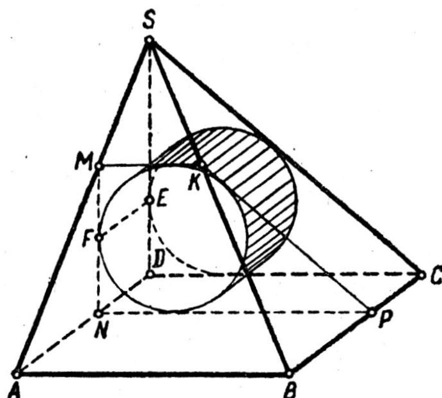
Iš trikampio SFC randame $\operatorname{ctg}\beta=\frac{|FC|}{|SF|}=\frac{1}{2}$. Vadinasi,

$$|AN|=h,\quad S_{\text{pjūv.}}=\frac{1}{2}\ |KM|\cdot|AN|=\frac{1}{6}\ h^2,\quad \frac{S_{\text{pjūv.}}}{S_{\text{pagr.}}}=\frac{1}{3}.$$

13.65. Iš uždavinio sąlygos išplaukia, kad ritinys liečia sieną SAD pagal sudaromąją EF; čia E – taškas, kuriame briauna SD liečia ritinio pagrindo apskritimą (241 pav.). Ritinio kito pagrindo plokštuma kerta sienas SAD ir SAB atitinkamai pagal tieses MN ir MK. Ši plokštuma lygiagreti tiesėms SD ir AB. Vadinasi,

$$[MN] \parallel [SD],\ [MK] \parallel [AB] \text{ ir } |MN|=2r;$$

čia r – ritinio pagrindo apskritimo spindulys.



241 pav.

Iš stačiojo trikampio SCD turime

$$r=\frac{1}{2}\left(a+h-\sqrt{a^2+h^2}\right).$$

Pažymime $|EF|=|DN|=x$. Kadangi trikampiai AMN ir ASD yra panašūs, tai

$$\frac{2r}{h}=\frac{a-x}{a},$$

iš čia

$$x=a\left(1-\frac{2r}{h}\right)=\frac{a}{h}\left(\sqrt{a^2+h^2}-a\right).$$

13.66. Perkirtę duotąją piramidę, pjūvyje gauname keturkampį $AMNK$ (242 pav.), kurio plotas $S=\frac{1}{2}|MK|\cdot|AN|$. Nubrėžiame $[NE]\perp[AC]$. Kadangi $|SN|:|NC|=2:1$, tai iš trikampių CNE ir CAS panašumo gauname

$$|NE|=\frac{1}{3}h,\ |AE|=\frac{2}{3}|AC|=\frac{2\sqrt{2}a}{3}.$$

Taigi

$$|AN|=\sqrt{|AE|^2+|NE|^2}=\frac{1}{3}\sqrt{h^2+8a^2}.$$

Nubrėžiame $[OL]\parallel[AN]$. Kadangi O – įstrižainės AC vidurio taškas, tai L – atkarpos CN vidurio taškas, ir todėl

$$|NL|=\frac{1}{2}|NC|=\frac{1}{6}|SC|,$$

$$|SN|:|SL|=\frac{2}{3}|SC|:\left(\frac{2}{3}|SC|+\frac{1}{6}|SC|\right)=4:5.$$

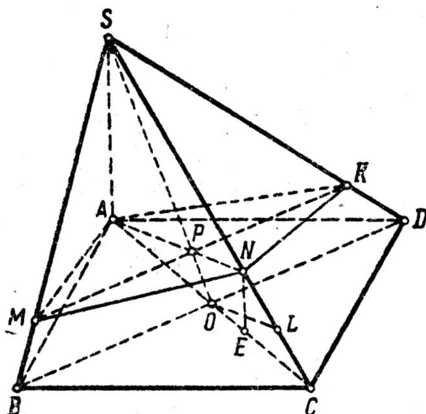
Kadangi trikampiai SPN ir SOL yra panašūs, tai $|SP|:|SO|=|SN|:|SL|=4:5$. Iš trikampių SMK ir SBD panašumo gauname

$$|MK|=\frac{4}{5}|BD|=\frac{4\sqrt{2}a}{5}.$$

Vadinasi,

$$S=\frac{1}{2}|MK|\cdot|AN|=\frac{2a}{15}\sqrt{16a^2+2h^2}.$$

13.67. Šio uždavinio sprendimas yra analogiškas **13.66** uždavinio sprendimui.



242 pav.

13.68. Sakykime, kad a – duotosios piramidės pagrindo kraštinė, h – piramidės apotema. Įrodykite, kad pjūvyje gaunama lygiašonė trapecija, kurios pagrindai lygūs $2a$ ir $\frac{1}{2}a$, o aukštinė lygi $\frac{1}{2}h$. Tuomet šoninės sienos plotas $S=\frac{1}{2}ah$, pjūvio plotas

$$S_1=\frac{5}{8}ah, \quad \frac{S_1}{S}=\frac{5}{4}.$$

13.69. Tarkime, kad SO – piramidės aukštinė, AS ir BS – duotosios šoninės briaunos, $|SO|=x$. Tuomet $|AO|=\sqrt{a^2-x^2}$, $|BO|=\sqrt{b^2-x^2}$. Pritaikę kosinusų teoremą, iš trikampių ABS ir ABO gauname

$$|AB|^2=a^2+b^2-ab=(a^2-x^2)+(b^2-x^2)+\sqrt{(a^2-x^2)(b^2-x^2)}.$$

Išsprendę šią lygtį, randame

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4ab-a^2-b^2}.$$

13.70. Tarkime, kad $[SO]$ – duotosios piramidės aukštinė. Prisiminę uždavinio sąlygą bei pritaikę trijų statmenų teoremą, gauname, kad kampai OAB ir OCB yra statieji, o

$$|SO|=\sqrt{|BS|^2-|BO|^2}=\sqrt{l^2-|BO|^2}.$$

Panagrinėkime keturkampį $ABCO$ (243 pav.). Nubrėžiame $[AM]\perp[BC]$, $[ON]\perp[AM]$. Turime

$$|BM|=|AB|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}a,$$

$$|NO|=|MC|=|BC|-|BM|=b-\frac{1}{2}a,$$

$$|AO|=\frac{|NO|}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2b-a}{\sqrt{3}},$$

$$|BO|^2=|AB|^2+|AO|^2=\frac{4}{3}(a^2-ab+b^2).$$

Taigi

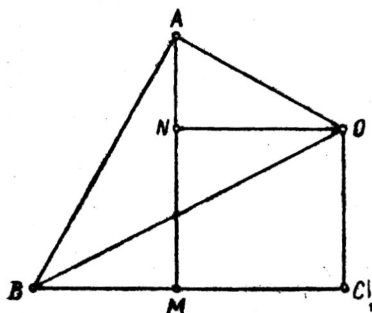
$$|SO|=\sqrt{l^2-\frac{4}{3}(a^2-ab+b^2)}.$$

13.71. 1) Išnagrinėsime atvejį, kai apibrėžtinės sferos centras (taškas O_1) sutampa su piramidės pagrindo centru (244 pav.). Sakykime, O – įbrėžtos į piramidę sferos centras. Nubrėžiame piramidės apotemas SM, SN ir $[OK]\perp[SM]$. Pažymime $|O_1S|=|O_1B|=R$, $|OO_1|=|OK|=r$. Iš taisyklingojo trikampio ABO_1 gauname

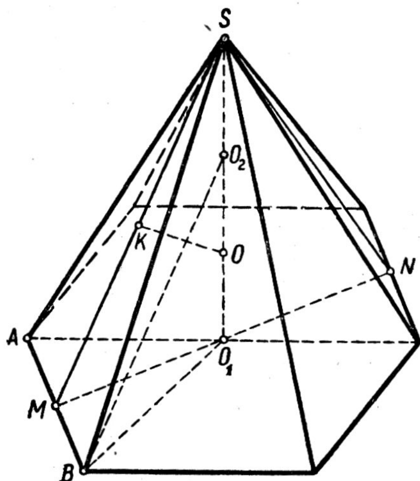
$$|MO_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}|BO_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Iš trikampio SMO_1 randame

$$|MS|=\sqrt{|MO_1|^2+|SO_1|^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}R.$$



243 pav.



244 pav.

Trikampio SMN plotas lygus

$$\frac{1}{2}|MN|\cdot|SO_1|=\frac{1}{2}r(|MN|+2|MS|),$$

t.y.

$$R^2\sqrt{3}=r(R\sqrt{3}+R\sqrt{7}).$$

Iš čia

$$\frac{R}{r}=1+\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

2) Išnagrinėsime atvejį, kai apibrėžtinės sferos centras yra taškas O_2 piramidės aukštinėje SO_1, be to, $|OO_1|=|OO_2|$; čia Q – įbrėžtinės sferos centras. Pažymime $|O_2S|=|O_2B|=R$, $|OO_1|=|OK|=r$. Iš trikampio BO_1O_2 gauname $|BO_1|=$ $=\sqrt{|BO_2|^2-|O_1O_2|^2}=\sqrt{R^2-4r^2}$. Tuomet

$$|MO_1|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2-4r^2}.$$

Iš trikampio SKO turime

$$|SK|=\sqrt{|SO|^2-|KO|^2}=\sqrt{R^2+2rR}.$$

Kadangi trikampiai SOK ir SMO_1 yra panašūs, tai

$$\frac{|MO_1|}{|KO|}=\frac{|SO_1|}{|SK|},$$

t.y.

$$\frac{\sqrt{3}\sqrt{R^2-4r^2}}{2r}=\frac{R+2r}{\sqrt{R^2+2rR}}=\frac{\sqrt{R+2r}}{\sqrt{R}}.$$

Suprastinę šią lygtį iš $\sqrt{R+2r}$, pakėlę kvadratu ir pertvarkę, turime

$$3\left(\frac{R}{r}\right)^2-6\left(\frac{R}{r}\right)-4=0,$$

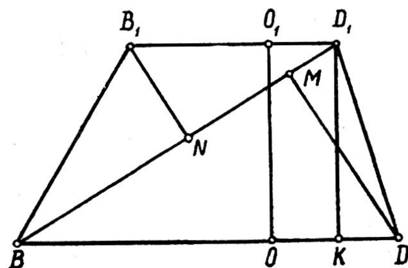
$$\frac{R}{r}=1\pm\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Kadangi $\frac{R}{r}>0$, tai

$$\frac{R}{r}=1+\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

13.73. Išnagrinėsime duotosios nupjautinės piramidės pjūvį, gautą, perkirtus ją plokštuma, einančia per briauną BB_1 ir taškus D bei D_1, kurie yra atitinkami briaunų AC ir A_1C_1 vidurio taškai (245 pav.). Sakykime, kad O ir O_1 – piramidės pagrindų centrai, $[DM]\perp[BD_1]$, $[B_1N]\perp[BD_1]$ ir $(D_1K]\perp[BD]$. Pagal sąlygą

$$|BD|=\frac{b\sqrt{3}}{2},\quad |DM|=m,\quad |B_1N|=n.$$



245 pav.

Statieji trikampiai B_1D_1N ir BDM yra panašūs, nes jų kampai B_1D_1N ir DBM kaip vidaus priešiniai kampai, esantys prie lygiagrečių tiesių BD ir B_1D_1, yra kongruentūs. Todėl

$$|B_1D_1|=\frac{|BD|\cdot|B_1N|}{|DM|}=\frac{bn\sqrt{3}}{2m}.$$

Kadangi $|BO|=\frac{2}{3}|BD|$, $|O_1D_1|=\frac{1}{3}|B_1D_1|$, tai

$$|BK|=|BO|=|O_1D_1|=\frac{b}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{n}{2m}\right).$$

Atkarpos OO_1 ilgį pažymime H. Trikampio BDD_1 plotas lygus

$$\frac{1}{2}|BD|\cdot|D_1K|=\frac{1}{2}|BD_1|\cdot|DM|,$$

todėl

$$|BD_1|=\frac{bH\sqrt{3}}{2m}.$$

Bet $|BD_1|^2=|D_1K|^2+|BK|^2$, t.y.

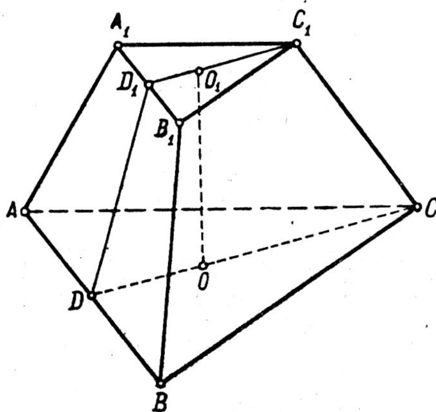
$$\frac{3b^2H^2}{4m^2}=H^2+\frac{b^2}{3}\left(1+\frac{n}{2m}\right)^2.$$

Iš čia

$$H=\frac{b(n+2m)}{\sqrt{9b^2-12n^2}}.$$

13.74. Tarkime, kad O ir O_1 – duotosios nupjautinės piramidės pagrindų centrai, $[DD_1]$ – jos apotema (246 pav.). Pažymime $|AB|=x$, $|A_1B_1|=y$. Iš trapecijos AA_1D_1D turime

$$|DD_1|^2=|AA_1|^2-(|AD|-|A_1D_1|)^2=l^2-\frac{1}{4}(x-y)^2.$$



246 pav.

Įbrėžtas į piramidę rutulys piramidės pagrindus liečia taškuose O, O_1 ir apotemą DD_1. Vadinasi,

$$|DD_1|=|DO|+|D_1O_1|=\frac{x+y}{2\sqrt{3}}.$$

Iš čia

$$l^2-\frac{1}{4}(x-y)^2=\frac{1}{12}(x-y)^2. \qquad (1)$$

Siena BB_1C_1C kerta rutulį, liečiantį visas piramidės briaunas, be to, taip, kad pjūvyje gauname apskritimą, įbrėžtą į trapeciją BB_1C_1C. Taigi

$$|BC|+|B_1C_1|=|BB_1|+|CC_1|,\ x+y=2l. \qquad (2)$$

Išsprendę (1)–(2) lygčių sistemą, gauname

$$x=l\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right),\ y=l\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

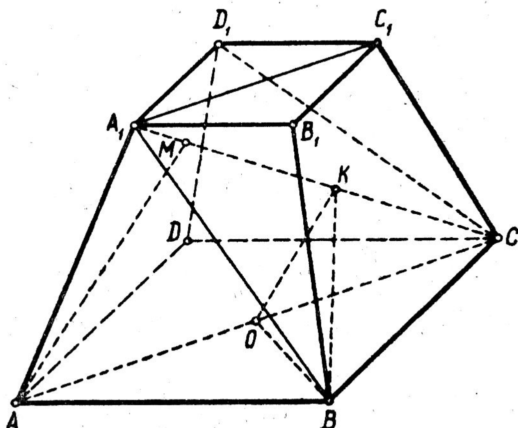
13.75. Sakykime, kad h – duotosios nupjautinės piramidės aukštinė, l – šoninės sienos vidurinė linija. Įrodykite, kad

$$h=\frac{S_1}{l\sqrt{2}},\ S_2=l\sqrt{l^2+h^2}=\sqrt{l^4+\frac{1}{2}S_1^2}.$$

Tuomet ieškomasis plotas

$$S=l^2=\sqrt{S_2^2-\frac{1}{2}S_1^2}.$$

13.76. Duotosios kertančiosios plokštumos AA_1C_1C ir BA_1D_1C kertasi tiese A_1C (247 pav.). Tarkime, kad O – piramidės pagrindo centras. Kadangi piramidė yra taisyklinga, tai $[BO]$ – statmuo plokštumai AA_1C_1C. Nubrėžiame $[OK]\perp[A_1C]$. Tuomet



247 pav.

pagal trijų statmenų teoremą $[BK]\perp[A_1C]$, t.y. kampas OKB kongruentus kampui tarp kertančiųjų plokštumų, ir pagal uždavinio sąlygą $\widehat{OKB}=\alpha$. Iš stačiojo trikampio OKB gauname $|OK|=|BK|\cdot\cos\alpha$. Nubrėžiame $[AM]\perp[A_1C]$. Kadangi O – atkarpos AC vidurio taškas, tai $[OK]$ – trikampio AMC vidurinė linija, t.y. $|AM|=2|OK|=$ $=2|BK|\cos\alpha$. Iš čia

$$S_{AA_1C}=\frac{1}{2}|A_1C|\cdot|AM|=|A_1C|\cdot|BK|\cdot\cos\alpha=S_{A_1BC}\cdot 2\cos\alpha.$$

Samprotaudami analogiškai, įrodytume, kad

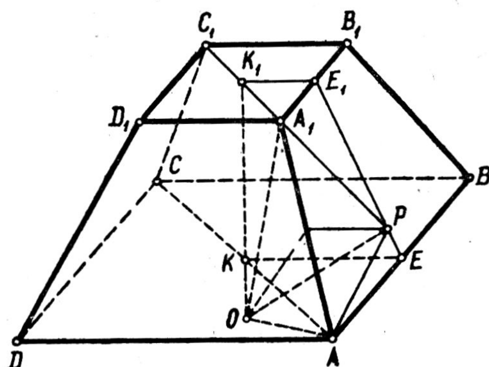
$$S_{A_1CC_1}=S_{A_1CD_1}\cdot 2\cos\alpha.$$

Vadinasi,

$$S_{AA_1C_1C}=S_{A_1D_1CB}\cdot 2\cos\alpha,$$

t.y. duotųjų pjūvių plotų santykis lygus $2\cos\alpha$.

13.77. Sakykime, kad K ir K_1 – nupjautinės piramidės $ABCDA_1B_1C_1D_1$ pagrindų centrai, O – apibrėžtinio rutulio centras (248 pav.). Kadangi piramidė yra taisyklinga, tai taškas O yra tiesėje KK_1. Tarkime, kad taškas O yra piramidės išorėje. Pažymime $|AB|=x$, $|A_1B_1|=y$ $(x>y)$, $|OA|=|OA_1|=R$. Į plokštumą ABB_1A_1 nuleidžiame



248 pav.

me statmenį OP. Nesunku suvokti, kad taškas P – apskritimo, apibrėžto apie trapeciją ABB_1A_1, centras, esantis tiesėje EE_1, kuri jungia $[AB]$ ir $[A_1B_1]$ vidurio taškus. Pagal uždavinio sąlygą

$$x-y=a,\quad |KK_1|=h,\quad |OP|=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{|OA|}{\sqrt{2}}.$$

Vadinasi, $|A_1P|=|AP|=\frac{R}{\sqrt{2}}$ (iš stačiojo trikampio OAP). Kadangi $|AK|=$ $=\frac{x}{\sqrt{2}}$, $|A_1K_1|=\frac{y}{\sqrt{2}}$, $|OA|=|OA_1|=R$, tai iš lygybės $|OK_1|-|OK|=|KK_1|$ gauname

$$\sqrt{R^2-\frac{1}{2}y^2}-\sqrt{R^2-\frac{1}{2}x^2}=h. \tag{1}$$

Iš trapecijos KEE_1K_1 turime

$$|EE_1|=\sqrt{h^2-\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}=\sqrt{h^2+\frac{1}{4}a^2}.$$

Kadangi $|E_1P|+|PE|=|EE_1|$, tai

$$\sqrt{R^2-\frac{1}{2}y^2}+\sqrt{R^2-\frac{1}{2}x^2}=\sqrt{2h^2+\frac{1}{2}a^2} \tag{2}$$

(laikome, kad taškas P yra trapecijos ABB_1A_1 viduje).

Padauginę (1) lygybę iš (2) lygybės, gauname

$$x^2-y^2=2h\sqrt{2h^2+\frac{1}{2}a^2}. \tag{3}$$

Išsprendę sistemą, kurią sudaro (3) lygtis ir lygtis $x-y=a$, turime

$$x=\frac{h}{a}\sqrt{2h^2+\frac{1}{2}a^2}+\frac{1}{2}a,$$

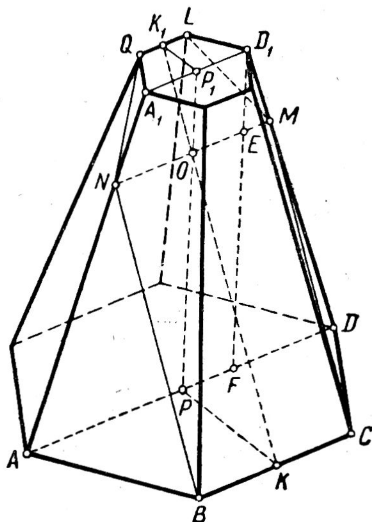
$$y=\frac{h}{a}\sqrt{2h^2+\frac{1}{2}a^2}-\frac{1}{2}a.$$

Pastaba. Jeigu tartume, kad taškas O yra piramidės viduje, tai (1) lygties kairėje pusėje gautume šaknų sumą, o ne skirtumą, ir tuomet iš (1) bei (2) lygčių išplauktų, jog $h=\sqrt{2h^2+\frac{1}{2}a^2}$, o tai neįmanoma. Analogiškai įrodytume, kad taškas P negali būti trapecijos ABB_1A_1 išorėje.

13.78. Duotosios nupjautinės piramidės pjūvyje gauname šešiakampį $BCMLQN$ (249 pav.), kurio plotas $S=S_1+S_2$; čia S_1 – trapecijos $BCMN$ plotas, o S_2 – trapecijos $LMQN$ plotas. Sakykime, kad P ir P_1 – piramidės pagrindų centrai, K ir K_1 – kraštinių BC ir QL vidurio taškai. Kadangi piramidė yra taisyklinga, tai tiesės MN, PP_1 ir KK_1 susikerta viename taške O.

Pagal uždavinio sąlygą $\widehat{OKP}=\widehat{OK_1P_1}=\alpha$, $|QL|=a$, $|BC|=3a$. Vadinasi, $|P_1K_1|=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $|PK|=\frac{3a\sqrt{3}}{2}$, $|OK|=\frac{3a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$, $|OK_1|=\frac{a\sqrt{3}}{2\cos\alpha}$. Kadangi trikampiai OKP ir OK_1P_1 yra panašūs, tai

$$\frac{|OP_1|}{|OP|}=\frac{|P_1K_1|}{|PK|}=\frac{1}{3}.$$



249 pav.

Nubrėžiame $[D_1F]\perp[AD]$. Tiesių MN ir D_1F susikirtimo tašką pažymime E. Kadangi trikampiai D_1EM ir D_1FD yra panašūs, tai

$$\frac{|FM|}{|FD|}=\frac{|D_1E|}{|D_1F|}=\frac{|OP_1|}{|OP_1|+|OP|}=\frac{1}{4}.$$

Bet $|FD|=|PD|-|P_1D_1|=2a$. Taigi

$$|EM|=\frac{a}{2},\ |OM|=|P_1D_1|+|EM|=\frac{3a}{2},\ |MN|=3a=|BC|,$$

$$S_1=|OK|\cdot|BC|=\frac{9a^2\sqrt{3}}{2\cos\alpha},\ S_2=\frac{1}{2}|OK_1|(|MN|+|QL|)=\frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\alpha},$$

$$S=S_1+S_2=\frac{11\sqrt{3}}{2\cos\alpha}\cdot a^2.$$

13.83. Kadangi sfera eina per briaunų AA_1 ir BB_1 vidurio taškus, tai šios sferos centras (taškas O) yra plokštumoje EE_1F_1F, statmenoje briaunai AB ir einančioje per šios briaunos vidurio tašką (250 pav.). Be to, taškas O yra plokštumoje P, kuri statmena atkarpai AC_1 ir eina per jos vidurio tašką K (paveiksle plokštuma P neparodyta). Įsidėmėtina, kad taškai E_1 ir F priklauso plokštumai P, nes kiekvienas jų yra vienodai nutolęs nuo atkarpos AC_1 galų. Vadinasi, tiesė E_1F – plokštumų P ir EE_1F_1F susikirtimo

tiesė, be to, taškas O priklauso tiesei E_1F. Pagaliau, kadangi sfera eina per tašką A ir briaunos BB_1 vidurio tašką, tai taškas O yra tiesėje MN, nubrėžtoje plokštumoje EE_1F_1F taip, kad $[MN] \parallel [EF]$ ir $|ME| = \frac{1}{4}a$. Tada $|NO| = |NF| = |ME| = \frac{1}{4}a$. Išvedame $[KL] \perp [MN]$. Turime

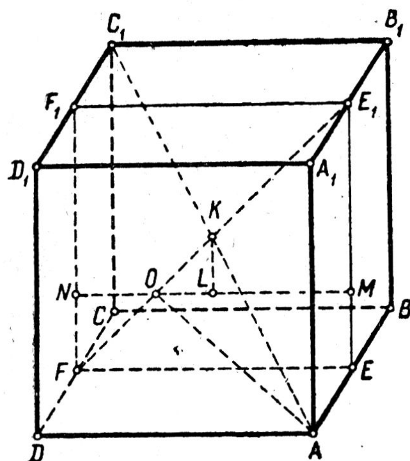
$$|KL| = \frac{1}{4}a, \quad |OL| = |KL| = \frac{1}{4}a,$$

todėl

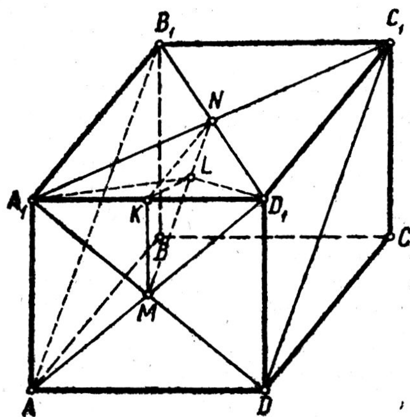
$$|OK| = \frac{\sqrt{2}}{4}a.$$

Sferos spindulį $|AO|$ apskaičiuojame iš stačiojo trikampio AOK $\left(|AK| = \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$:

$$|AO| = \sqrt{|OK|^2 + |AK|^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}.$$



250 pav.



251 pav.

13.84. Plokštumos AB_1D_1 ir A_1C_1D kertasi tiese MN; čia M – sienos ADD_1A_1 centras, o N – sienos $A_1B_1C_1D_1$ centras (251 pav.). Per briaunos A_1D_1 vidurio tašką K nubrėžiame $[KL] \perp [MN]$. Nesunku pastebėti, kad kampas A_1LD_1 yra ieškomojo dvisienio kampo linijinis kampas ir $\widehat{A_1LD_1} = 2\widehat{KLD_1}$. Turime

$$|KN| = \frac{a}{2}, \quad |KM| = \frac{c}{2}, \quad |KD_1| = \frac{b}{2}.$$

Iš stačiojo trikampio KMN gauname

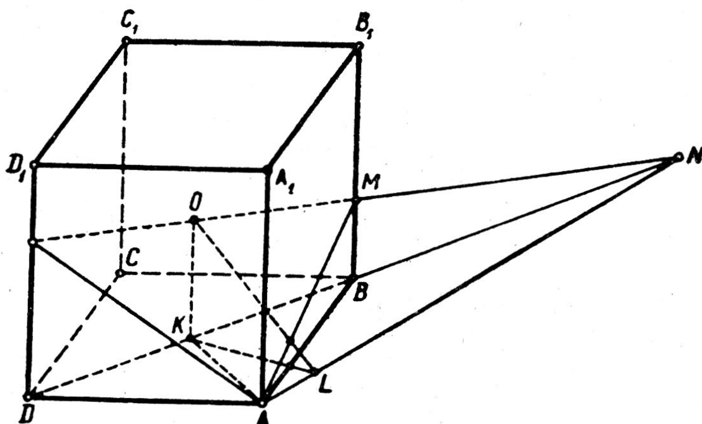
$$|MN| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}, \quad |KL| = \frac{|KM| \cdot |KN|}{|MN|} = \frac{ac}{2\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Vadinasi,

$$\operatorname{tg} \widehat{KLD_1} = \frac{|KD_1|}{|KL|} = \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac},$$

$$\widehat{A_1LD_1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac}.$$

13.85. Sakykime, kad O – kubo centras. Tiesę OM pratęsiame iki jos susikirtimo su įstrižainės BD tęsiniu taške N. Kadangi taškai A ir N priklauso kertančiajai plokštumai ir plokštumai $ABCD$ (252 pav.), tai tiesė AN yra šių plokštumų susikirtimo



252 pav.

linija. Nubrėžiame $[OL] \perp [AN]$ ir $[OK] \perp [BD]$. Tada pagal trijų statmenų teoremą $[KL] \perp [AN]$, t.y. kampas OLK – ieškomojo dvisienio kampo linijinis kampas.

Pažymėję kubo briaunos ilgį a, turime

$$|OK| = \frac{a}{2}, \quad |BM| = \frac{a}{3}, \quad |BK| = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Kadangi trikampiai BMN ir KON yra panašūs, tai

$$\frac{|BN|}{|BM|} = \frac{|BN| + |BK|}{|OK|},$$

todėl

$$|BN| = a\sqrt{2}, \quad |KN| = |BK| + |BN| = \frac{3a}{\sqrt{2}},$$

$$|AN| = \sqrt{|AK|^2 + |KN|^2} = a\sqrt{5}.$$

Iš trikampių KLN ir AKN panašumo išplaukia, kad

$$|KL| = \frac{|AK| \cdot |KN|}{|AN|} = \frac{3a}{2\sqrt{5}}.$$

Vadinasi,

$$\widehat{OLK} = \operatorname{arctg} \frac{|OK|}{|KL|} = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

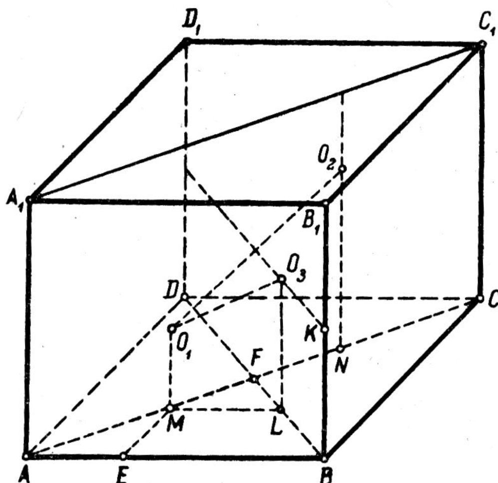
13.86. Tarkime, kad O_1, O_2 ir O_3 – rutulių centrai, r – pirmųjų dviejų rutulių spindulys, R – trečiojo rutulio spindulys (253 pav.). Taškai O_1 ir O_2 yra plokštumoje AA_1C_1C, nes $ABCD$ – kvadratas. Nubrėžiame $[O_1M]\perp[AC]$, $[O_2N]\perp[AC]$, $[ME]\perp$ $\perp[AB]$. Tuomet

$$|MO_1|=|ME|=r,$$

$$|AM|=|CN|=r\sqrt{2},\ |O_2N|=4-r,\ |O_1O_2|=2r,$$

$$|MN|=\sqrt{|O_1O_2|^2-(|O_2N|-|O_1M|)^2}=4\sqrt{r-1}.$$

Įrašę šias dydžių $|AM|$, $|MN|$, $|CN|$ reikšmes lygybėje $|AC|=|AM|+|MN|+$ $+|CN|$, gauname $5\sqrt{2}=2r\sqrt{2}+4\sqrt{r-1}$. Išsprendę šią lygtį, turime $r=\frac{1}{2}(7\pm$ $\pm4)$. Kadangi $|O_1M|<|AA_1|$, t.y. $r<4$, tai $r=\frac{3}{2}$.



253 pav.

Iš uždavinio sąlygų išplaukia, kad taškas O_3 priklauso statmeniui, nubrėžtam atkarpai BB_1 per jos vidurio tašką K ir esančiam plokštumoje BB_1D_1D. Nubrėžiame $[O_3L]\perp[BD]$. Tada

$$|BL|=|O_3K|=R,\ |O_3L|=\frac{1}{2}|BB_1|=2,\ |O_1O_3|=R\pm r$$

(pliuso ženklas atitinka rutulių lietimąsi iš išorės, minuso – iš vidaus). Iš trapecijos MO_1O_3L gauname

$$|ML|^2=|O_1O_3|^2-(|O_3L|-|O_1M|)^2=\left(R\pm\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

o iš trikampio MFL ($|MF|=\frac{1}{2}|MN|=\sqrt{2}$)

$$|ML|^2=|MF|^2+|LF|^2=2+\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-R\right)^2.$$

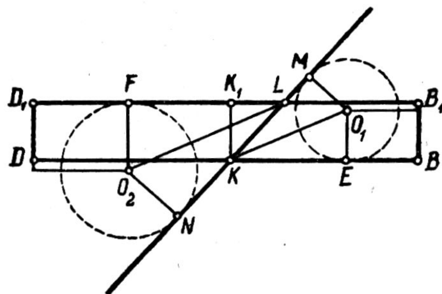
Todėl

$$\left(R\pm\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=2+\left(\frac{5}{\sqrt{2}}-R\right)^2.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname

$$R=\frac{25}{2(5\sqrt{2}\pm 3)}\ \text{(cm)}.$$

13.87. Panagrinėkime plokštumą BB_1D_1D (254 pav.). Ši plokštuma kerta duotą kertančiąją plokštumą tiese KL; čia K – atkarpos BD vidurio taškas. Duotųjų rutulių centrai O_1 ir O_2 yra plokštumoje BB_1D_1D, be to, $|O_1E|=|O_1M|=\frac{a}{5}$, $|BE|=$



254 pav.

$=\frac{a\sqrt{2}}{5}$, $|O_2F|=|O_2N|=\frac{a}{4}$, $|D_1F|=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. Pažymime $\widehat{LKB}=\widehat{KLD_1}=\alpha$. Tuomet $\widehat{O_2LF}=\widehat{O_1KE}=\frac{1}{2}\alpha$. Iš trikampio KO_1E turime

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{|O_1E|}{|BK|-|BE|}=\frac{\sqrt{2}}{3},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{7}.$$

Iš trikampio FLO_2 gauname

$$|FL|=\frac{|FO_2|}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{3a}{4\sqrt{2}},$$

todėl

$$|D_1L|=|D_1F|+|FL|=\frac{5a}{4\sqrt{2}},\quad |K_1L|=|D_1L|-|DK|=\frac{a}{4\sqrt{2}}$$

(K_1 – atkarpos B_1D_1 vidurio taškas). Iš trikampio KLK_1 turime

$$|KK_1|=|K_1L|\operatorname{tg}\alpha=\frac{3a}{14}.$$

13.88. Sakykime, kad O – rutulio centras, r – jo spindulys (255 pav.). Nubrėžiame atkarpą OK, statmeną plokštumai ABD, $[OE]\perp[BD_1]$, $[OF]\parallel[KD]$, $[KM]\perp[AB]$, $[KN]\perp[AD]$. Tuomet

$$|KM|=|KN|=|OK|=|OE|=r,$$

$$|BD^2|=|AB|^2+|AD|^2=13,$$

$$|BD_1|=\sqrt{|BD|^2-|DD_1|^2}=\sqrt{14}.$$

Iš trikampių BKM ir KDN turime

$$|BK|^2=|KM|^2+|BM|^2=r^2+(3-r)^2,$$

$$|DK|^2=|KN|^2+|DN|^2=r^2+(2-r)^2.$$

Atkarpos BE ir BK kaip dvi liestinės, nubrėžtos iš vieno taško B tam pačiam rutuliui, yra kongruenčios, t.y. $|BE|=|BK|=\sqrt{r^2+(3-r)^2}$.
Iš trikampių FOD_1 ir EOD_1 turime

$$|OD_1|^2=|DK|^2+(|DD_1|-|DF|)^2=r^2+(2-r)^2+(1-r)^2,$$

$$|D_1E|=\sqrt{|OD_1|^2-|OE|^2}=\sqrt{(2-r)^2+(1-r)^2}.$$

Įrašę gautąsias reikšmes lygybėje $|BD_1|=|BE|+|D_1E|$, gauname

$$\sqrt{14}=\sqrt{r^2+(3-r)^2}+\sqrt{(2-r)^2+(1-r)^2}.$$

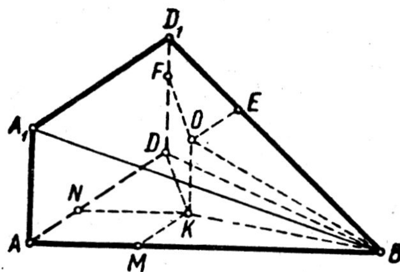
Išsprendę šią lygtį, randame

$$r=\frac{3}{2}\pm\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

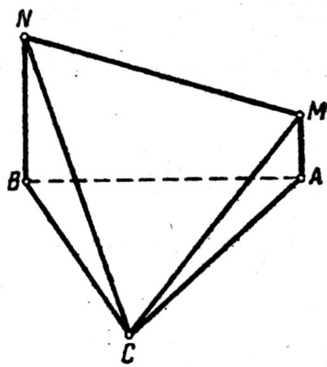
Šios r reikšmės tenkina visas uždavinio sąlygas. Minuso ženklas atitinka atvejį, kai taškas K yra trikampio ABD viduje, o pliuso – kai taškas K yra trikampio ABD išorėje.

13.91. Norėdami rasti $|BC|=x$ ir $|AA_1|=y$, sudarykite lygčių sistemą

$$\begin{cases} y=\sqrt{5-x^2}+\sqrt{8-x^2}, \\ y^2=13-4(x^2-3). \end{cases}$$



255 pav.



256 pav.

13.92. Norėdami rasti $|AP|=x$ ir $|B_1P|=y$, sudarykite lygčių sistemą

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=b^2+h^2, \\ \sqrt{x^2-b^2}+\sqrt{y^2-b^2}=h. \end{cases}$$

13.93. Tarkime, kad CMN – taisyklingasis trikampis, kurį gauname duotosios prizmės pjūvyje (256 pav.), ABC – pjūvis, lygiagretus prizmės pagrindui, $|AC|=a$,

$|BC|=b$; čia kampas ACB yra statusis. Trikampio CMN kraštinės ilgį pažymime x. Tuomet

$$|AM|=\sqrt{x^2-a^2},\quad |BN|=\sqrt{x^2-b^2}.$$

Iš trapecijos $AMNB$ gauname

$$|MN|^2=|AB|^2+(|BN|-|AM|)^2,$$

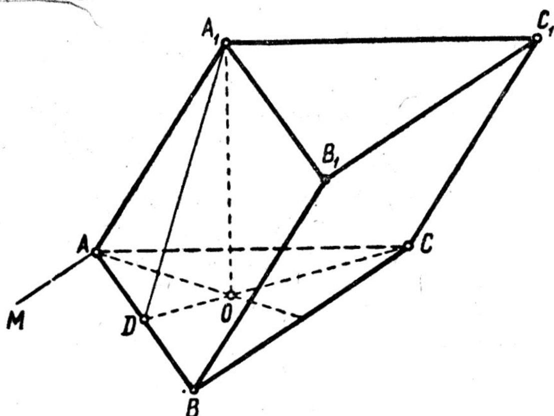
t.y.

$$x^2=a^2+b^2+(\sqrt{x^2-b^2}-\sqrt{x^2-a^2})^2 \qquad (1)$$

tarkime, kad taškai M ir N yra vienoje plokštumos ABC pusėje). Išsprendę (1) lygtį, gauname

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2}\right)}.$$

Pastaba. Taškai M ir N negali būti skirtingose plokštumos ABC pusėse, nes vietoj (1) lygties būtume gavę lygtį, kuri neturi sprendinių. Tai aišku ir iš geometrijos pozicijų: tuomet būtų $|MN|>|NA|>|NC|$ (nes $|AB|>|BC|$), t.y. $|MN|\neq|NC|$, o tai prieštarauja sąlygai.



257 pav.

13.94. Sakykime, kad O – prizmės pagrindo centras (257 pav.), R – įbrėžto į prizmę rutulio spindulys, $|AA_1|=x$. Iš uždavinio sąlygų išplaukia, kad $|A_1O|=2R$. Prizmės tūris lygus

$$|A_1O|\cdot S_{ABC}=\frac{1}{3}R\cdot S;$$

čia S – visas prizmės paviršius. Įrašę šiame reiškinyje $|A_1O|=2R$, gauname

$$S=6S_{ABC}. \qquad (1)$$

Įrodysime, kad BB_1C_1C – stačiakampis. Plokštumoje ABC nubrėžiame $[AM]\perp\perp[AO]$. Tuomet pagal trijų statmenų teoremą $[A_1A]\perp[AM]$. Bet $[BC]\parallel[AM]$ ir $[BB_1]\parallel\parallel[AA_1]$. Vadinasi, $[BB_1]\perp[BC]$. Turime

$$S_{BB_1C_1C}=ax,\quad S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Nubrėžiame $[OD]\perp[AB]$. Tada pagal trijų statmenų teoremą $[A_1D]\perp[AB]$. Todėl

$$|A_1D|=\sqrt{|AA_1|^2-|AD|^2}=\sqrt{x^2-\frac{1}{4}a^2},$$

$$S_{AA_1B_1B}=|AB|\cdot|A_1D|=a\sqrt{x^2-\frac{1}{4}a^2}.$$

Įrašę gautąsias reikšmes į (1) lygybę, turime

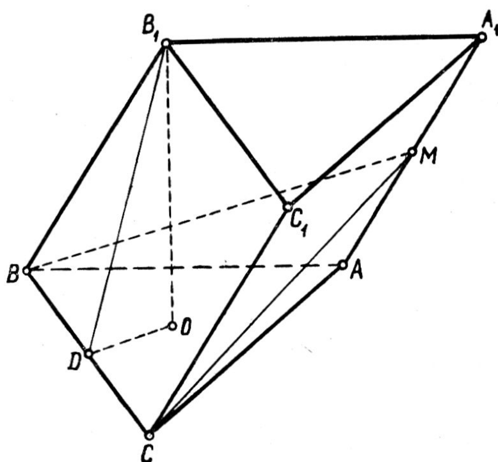
$$ax+\frac{\sqrt{3}}{2}a^2+a\sqrt{4x^2-a^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

Išsprendę šią lygtį, randame

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}}(\sqrt{5}-1).$$

13.95. Sakykime, kad O – pagrindo ABC centras, M – briaunos AA_1 vidurio taškas (258 pav.). Iš uždavinio sąlygų išplaukia, kad AA_1C_1C – stačiakampis (žr. **13.94** uždavinio sprendimą). Vadinasi,

$$|CM|=\sqrt{|AC|^2+|AM|^2}=\sqrt{b^2+\frac{1}{4}l^2}.$$



258 pav.

Kampą BAM pažymime α. Pagal kosinusų teoremą iš trikampio BAM gauname

$$|BM|^2=b^2+\frac{1}{4}l^2-bl\cos\alpha.$$

Nubrėžiame $[OD]\perp[BC]$. Tada pagal trijų statmenų teoremą $[B_1D]\perp[BC]$. Iš trikampio BDB_1 gauname

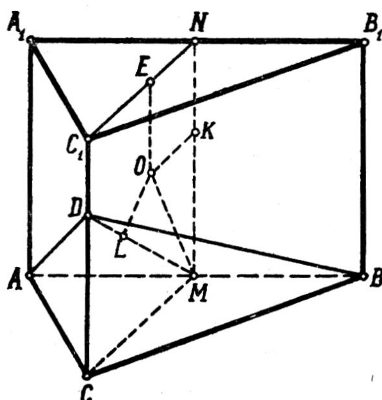
$$\cos\widehat{ABB_1}=\cos\widehat{DBB_1}=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=\frac{|BD|}{|BB_1|}=\frac{b}{2l},$$

$$|BM|=\sqrt{\frac{1}{4}l^2+\frac{3}{2}b^2}.$$

Dabar, žinodami tris trikampio BCM kraštines, apskaičiuojame jo plotą:

$$S_{BCM}=\frac{b}{8}\sqrt{15b^2+4l^2}.$$

13.96. Tarkime, kad O – rutulio centras (259 pav.), r – jo spindulys, AB – trikampio ABC įžambinė, M – briaunos AB vidurio taškas, N – briaunos A_1B_1 vidurio taškas, $|AB|=|AD|=|BD|$.



259 pav.

Iš uždavinio sąlygų aišku, kad taškas O yra plokštumoje CC_1NM. Nubrėžiame $[OK]\perp[MN]$, $[OE]\perp[C_1N]$, $[OL]\perp[DM]$. Tada $|OL|=|OK|=|OE|=r$. Kadangi prizmė yra stačioji ir rutulys liečia visas jos šonines sienas, tai rutulio spindulys lygus apskritimo, įbrėžto į trikampį ABC, spinduliui. Todėl

$$r=\frac{c}{2}(\sqrt{2}-1).$$

Kampą KLM pažymime α. Iš trikampio CDM gauname

$$\cos\widehat{CMD}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{|MC|}{|DM|}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\quad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

Iš trikampio KMO turime

$$|KM|=|OK|\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=r(\sqrt{3}+\sqrt{2}),$$

todėl

$$|MN|=|KM|+|KN|=r(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})=\frac{c}{2}(1+\sqrt{6}-\sqrt{3}),$$

$$V=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CM|\cdot|MN|=\frac{c^3}{8}(1+\sqrt{6}-\sqrt{3}).$$

13.97. Sakykime, kad K – briaunos A_1C_1 vidurio taškas, D – briaunos CC_1 vidurio taškas (260 pav.). Kadangi prizmės pagrindai yra lygiagretūs, tai pirmasis pjūvis kerta plokštumą $A_1B_1C_1$ tiese KL, lygiagrečia tiesei AB. Vadinasi, pirmasis pjūvis – tai trapecija $ABLK$. Antrasis pjūvis yra trikampis A_1B_1D, (MN) – duotųjų pjūvių susikirtimo linija. Nubrėžiame $[DE] \parallel [BC]$. Tada

$$|EF|=\frac{1}{2}|B_1L|=\frac{1}{4}|B_1C_1|,$$

$$|DF|=|B_1C_1|-|EF|=\frac{3}{4}|B_1C_1|=\frac{3}{2}|B_1L|.$$

Kadangi trikampiai B_1LN ir DFN yra panašūs, tai

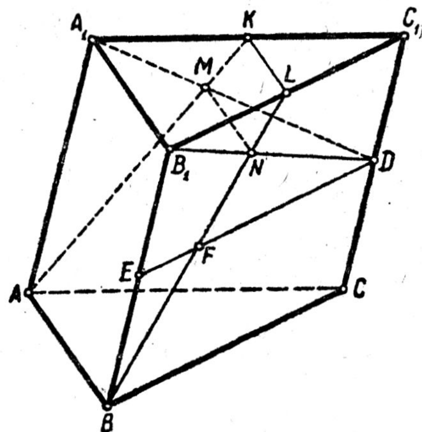
$$|DN|=\frac{|DF|}{|B_1L|}|B_1N|=\frac{3}{2}(|B_1D|-|DN|);$$

iš čia

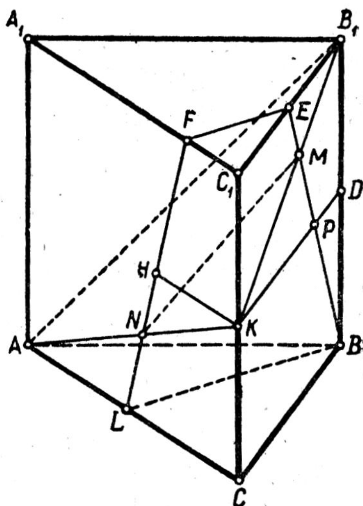
$$\frac{|DN|}{|B_1D|}=\frac{3}{5}.$$

Tiesė AB yra pirmojo pjūvio plokštumoje ir lygiagreti tiesei A_1B_1, kuri priklauso antrojo pjūvio plokštumai. Vadinasi, šių plokštumų susikirtimo tiesė MN yra lygiagreti (A_1B_1). Iš trikampių DMN ir A_1B_1D panašumo gauname

$$\frac{|MN|}{|A_1B_1|}=\frac{|DN|}{|B_1D|}=\frac{3}{5}.$$



260 pav.



261 pav.

13.98. Sakysime, kad K – briaunos CC_1 vidurio taškas, E – briaunos B_1C_1 vidurio taškas, L – briaunos AC vidurio taškas (261 pav.). Perkirtę duotąją prizmę pirmąja plokštuma, pjūvyje gauname trikampį AB_1K. Antroji plokštuma prizmės pagrindą $A_1B_1C_1$ kerta tiese EF, lygiagrečia tiesei BL, nes prizmės pagrindų plokštumos yra lygiagrečios. Vadinasi, perkirtę prizmę antrąja plokštuma, pjūvyje gauname trapeciją $BEFL$. Duotieji pjūviai susikerta atkarpa MN, kurios ilgį reikia rasti.

Iš stačiųjų trikampių ABB_1 ir ACK turime

$$|AB_1|^2=3b^2,\ |B_1K|^2=|AK|^2=\frac{3}{2}b^2,$$

todėl

$$|AB_1|^2=|B_1K|^2+|AK|^2.$$

Toliau, pritaikę teoremą, atvirkštinę Pitagoro teoremai, gauname, kad kampas AKB_1 yra statusis. Vadinasi, $|MN|=\sqrt{|KM|^2+|KN|^2}$. Randame $|KM|$ ir $|KN|$.

Nubrėžiame $[KD] \parallel [BC]$. Tuomet $|PD|=\frac{1}{2}|B_1E|=\frac{1}{4}b$, $|KP|=|KD|-|PD|=\frac{3}{4}b=\frac{3}{2}|B_1E|$. Kadangi trikampiai MKP ir B_1EM yra panašūs, tai $|KM|=\frac{|KP|}{|B_1E|}|MB_1|=\frac{3}{2}(|B_1K|-|KM|)=\frac{3}{2}\left(b\sqrt{\frac{3}{2}}-|KM|\right)$; iš čia

$$|KM|=\frac{3b\sqrt{6}}{10}.$$

Kadangi trikampiai EFC_1 ir BCL, kurių atitinkamos kraštinės lygiagrečios, yra panašūs, tai

$$|FC_1|=\frac{|CL|\cdot|C_1E|}{|BC|}=\frac{b}{4}.$$

Nubrėžiame $[KH] \parallel [AC]$. Tada

$$|KH|=\frac{1}{2}(|CL|+|FC_1|)=\frac{3}{8}b.$$

Iš trikampių NKH ir ANL panašumo išplaukia, kad

$$|KN|=\frac{|KH|}{|AL|}|AN|=\frac{3}{4}(|AK|-|KN|)=\frac{3}{4}\left(b\sqrt{\frac{3}{2}}-|KN|\right),$$

todėl

$$|KN|=\frac{3}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}\,b \text{ ir } |MN|=\sqrt{|KM|^2+|KN|^2}=\frac{3b\sqrt{111}}{35}.$$

13.110. Pirmiausia įrodykite, kad kubo centras yra kūgio aukštinėje. Tarkime kad O – kubo centras, $[SK]$ – kūgio aukštinė, $[AB]$ – kubo briauna, priklausanti kūgio pagrindui. Per tašką O nubrėžiame dvi plokštumas: vieną – einančią per tiesę AB (262 pav., *a*), o kitą – lygiagrečią kūgio pagrindui (262 pav., *b*). Pažymime $|AB|=a$, $|SK|=h$, $|KM|=r$ – kūgio pagrindo spindulys. Tada

$$|BK|=|OE|=\frac{1}{2}a,\ |CE|=|DE|=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

$$|ON|=|OD|=\sqrt{|OE|^2+|DE|^2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Kadangi trikampiai KSM, BCM ir ECN yra panašūs, tai

$$\frac{|KM|}{|KS|}=\frac{|BM|}{|BC|}=\frac{|EN|}{|CE|},$$

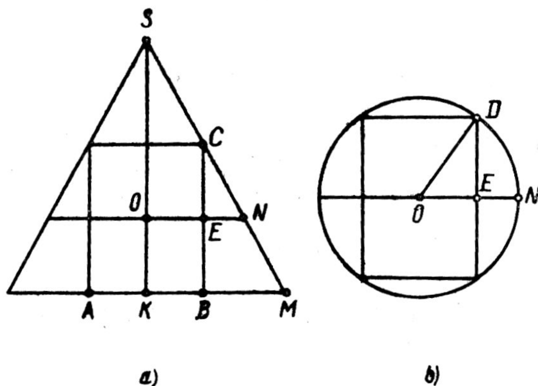
t. y.

$$\frac{r}{h}=\frac{r-\frac{1}{2}a}{a\sqrt{2}}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{a}{2}}{\frac{a}{\sqrt{2}}}.$$

Iš čia

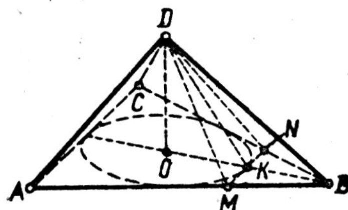
$$r=a\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right),\quad h=\frac{a}{2\sqrt{2}}\,(5+\sqrt{3}),$$

$$\frac{V_{\text{kūg.}}}{V_{\text{kub.}}}=\frac{\pi h r^2}{3a^3}=\frac{\pi\sqrt{2}}{48}\,(53-7\sqrt{3}).$$



262 pav.

13.111. Tarkime, kad tiesė MN yra lygiagreti piramidės $ABCD$ pagrindo kraštinei ir liečia kūgio pagrindo apskritimą taške K (263). Tuomet ieškomasis rutulys yra įbrėžtas į trikampę piramidę $MNBD$. Šio rutulio spindulį r apskaičiuosime pagal formulę $r=\frac{3V}{S}$; čia V ir S – piramidės $MNBD$ tūris ir pilnasis paviršius.



263 pav.

Pagal uždavinio sąlygą $|DO|=2$, $|AB|=3\sqrt{3}$. Taigi

$$|MN|=\frac{1}{3}\,|AB|=\sqrt{3}=|BN|=|BM|,$$

$$|BK|=|OK|=\frac{|AB|}{2\sqrt{3}}=\frac{3}{2},$$

$$|DK|=\sqrt{|DO|^2+|OK|^2}=\frac{5}{2}.$$

Trikampio BDM aukštinė, nuleista iš taško D, yra piramidės apotema bei kūgio sudaromoji, t. y. lygi $|DK|$. Vadinasi,

$$S=3S_{DMN}+S_{BMN}=\frac{9\sqrt{3}}{2},\quad V=\frac{|DO|}{4\sqrt{3}}\,|MN|^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad r=\frac{1}{3}\ \text{(cm)}.$$

13.114. Išnagrinėkite duotojo nupjautinio kūgio ašinį pjūvį (žr. **12.93** uždavinio sprendimą).

13.115. Sakykime, kad O_1, O_2, O_3 – duotųjų rutulių centrai. A, B, C – atitinkamai jų projekcijos ritinio pagrinde, O – ritinio pagrindo centras (264 pav.). Iš trapecijos BCO_3O_2 (paveiksle ji nepavaizduota) gauname

$$|BC|^2=|O_2O_3|^2-(|CO_3|-|BO_2|)^2=\left(\frac{5}{2}r+r\right)^2-\left(\frac{5}{2}r-r\right)^2=10r^2.$$

Iš trikampio BCD turime $|CD|=\sqrt{|BC|^2-|BD|^2}=3r$. Ritinio pagrindo spindulį pažymime x. Tuomet

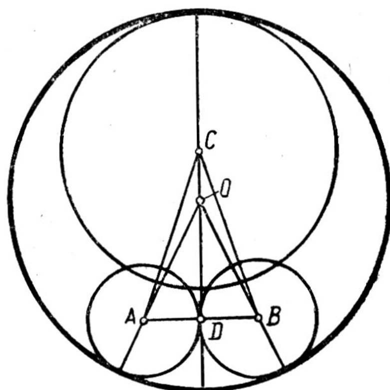
$$|OC|=x-\frac{5}{2}r,\ |OB|=x-r,\ |OD|=\sqrt{|BO|^2-|BD|^2}=\sqrt{x^2-2xr}.$$

Iš lygybės $|CD|=|CO|+|OD|$ gauname

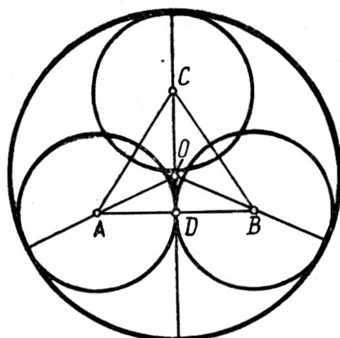
$$3r=x-\frac{5}{2}r+\sqrt{x^2-2xr}.$$

Išsprendę šią lygtį, randame $x=\frac{121}{36}r$.

13.116. Tarkime, kad O_1, O_2, O_3 – duotųjų rutulių centrai. A, B, C – atitinkamai jų projekcijos apatiniame ritinio pagrinde, O – ritinio pagrindo centras



264 pav.



265 pav.

(265 pav.). Kadangi ritinio aukštinė lygi $3r$, o trečiasis rutulys liečia viršutinį ritinio pagrindą, tai $|CO_3|=2r$. Iš trapecijos BCO_3O_2 (ji nepavaizduota paveiksle) gauname

$$|BC|^2=|O_3O_2|^2-O_3C|-|O_2B|^2=(2r)^2-(2r-r)^2=3r^2.$$

Iš trikampio BCD turime $|CD_3|=\sqrt{|BC|^2-|BD|^2}=r\sqrt{2}$.
Ritinio pagrindo spindulį pažymime x. Tuomet

$$|OC|=x-r,\ |OB|=x-r,\ |OD|=\sqrt{|OB|^2-|BD|^2}=\sqrt{x^2-2xr}.$$

Kadangi $|CD|=|CO|+|OD|$, tai $r\sqrt{2}=x-r+\sqrt{x^2-2xr}$.
Išsprendę šią lygtį, gauname

$$x=\left(1+\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)r.$$

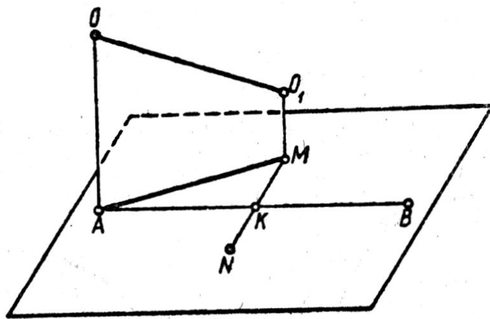
13.117. Sakykime, kad A ir B — r spindulio rutulių centrų projekcijos duotoje plokštumoje, o M ir N — nežinomo spindulio x rutulių centrų projekcijos toje pačioje plokštumoje (266 pav.). Tuomet $|OA|=|AK|=r$, $|O_1M|=|MK|=x$, $|OO_1|=r+x$. Iš trapecijos AOO_1M gauname $|AM|^2=|OO_1|^2-(|AO|-|O_1M|)^2=4rx$, o iš trikampio AMK turime $|AM|^2=r^2+x^2$. Vadinasi,

$$r^2+x^2=4rx, \quad x=(2\pm\sqrt{3})\,r.$$

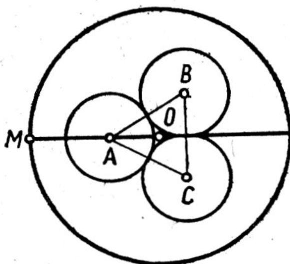
13.118. Sakykime, kad O — duotosios pusiausferos centras. A, B, C — nežinomo spindulio x rutulių centrų projekcijos pusiausferos pagrinde, O_1 — vieno rutulio, kurio spindulys x, centras (267) pav., a ir b). Tuomet ABC — taisyklingasis trikampis, kurio kraštinės ilgis lygus $2x$, O — šio trikampio centras,

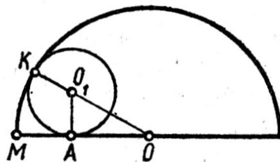
$$|OK|=|OM|=R, \quad |AO_1|=x,$$

$$|OO_1|=R-x, \quad |AO|=\sqrt{|OO_1|^2-|AO_1|^2}=\sqrt{R^2-2Rx}.$$



266 pav.





a) b)

267 pav.

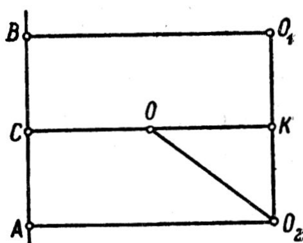
Iš trikampio ABC turime

$$|AO|=\frac{2}{3}\,\frac{|AB|\sqrt{3}}{2}=\frac{2x}{\sqrt{3}}.$$

Taigi

$$\frac{2x}{\sqrt{3}}+\sqrt{R^2-2Rx}, \quad x=\frac{R}{4}\,(\sqrt{21}-3).$$

13.119. Tarkime, kad O_1 ir O_2 – duotųjų rutulių, kurių spinduliai r, centrai, O – nežinomo spindulio x rutulio centras, $[O_1B]$, $[O_2A]$ ir $[OC]$ — statmenys, nuleisti į duotojo dvisienio kampo briauną, K – tiesių O_1O_2 ir OC susikirtimo taškas (268 pav.). Kadangi rutuliai įbrėžti į dvisienį kampą, tai rutulių centrai yra šio dvisienio kampo pusiaukampinėje plokštumoje (ši plokštuma pavaizduota 268 pav.) ir $|O_1B|=|O_2A|=\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, $|OC|=\dfrac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Iš trikampio OO_2K gauname $|OK|^2=(x+r)^2-r^2=x^2+2xr$. Antra vertus, $|OK|=\left||CK|-|CO|\right|=\dfrac{|r-x|}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (taškas O gali būti atkarpos CK tęsinyje). Vadinasi,



268 pav.

$$x^2+2xr=\frac{(r-x)^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Išsprendę šią lygtį, gauname

$$x=\frac{r}{1+\cos\alpha}\left(3-\cos\alpha\pm\sqrt{7-8\cos\alpha+\cos^2\alpha}\right);$$

čia pliuso ženklas atitinka tą atvejį, kai taškas O priklauso atkarpos CK tęsiniui, o minuso – kai taškas O yra tarp taškų C ir K.

Boltianskis V. ir kt.

Bo-207 Elementariosios matematikos paskaitos ir uždaviniai: Mokymo priemonė mokiniams. / V. Boltianskis, J. Sidorovas, M. Šabuninas.— K.: Šviesa, 1982.— 469 p., iliustr.

Knygoje pateikiama elementariosios matematikos teorija ir uždavinių. Ypač daug dėmesio skirta tiems skyriams, kurie nepakankamai išnagrinėti mokymo literatūroje.

Daug knygoje pateiktų uždavinių paimta iš stojamųjų egzaminų į MFTI. Dalį uždavinių paruošė patys autoriai.

Knyga galės naudotis aukštesniųjų klasių mokiniai, matematikos mokytojai, pedagoginių institutų ir universitetų studentai.

51(075)

B $\frac{4306020400—473}{M\ 853(10)—82}$ **131—79**

Vladimiras Boltianskis, Jurijus Sidorovas, Michailas Šabuninas
ELEMENTARIOSIOS MATEMATIKOS PASKAITOS IR UŽDAVINIAI
Mokymo priemonė mokiniams

Redaktorė *M. Andriūnienė*
Viršelis *A. Kvedarauskienės*. Men. redaktorius *V. Oržekauskas*
Techn. redaktorė *E. Arbačiauskienė*. Korektorė *L. Baliulienė*
Vertimą recenzavo *Ričardas Razmas*

Владимир Григорьевич Болтянский, Юрий Викторович Сидоров, Михаил Иванович Шабунин
ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ
Пособие для учащихся

Перевел с русского *Видмантас Повилас Пякарскас*
На литовском языке
Литовская ССР, 233000, Каунас, пр. Ленина, 25, издательство «Швиеса»

ИБ № 301

Duota rinkti 80.08.25. Pasirašyta spausdinti 81.09.22. Formatas 60×90$^{1}/_{16}$, popierius spaudos Nr. 1, romaniška garnitūra, iškilioji spauda, 1 spalva. 29,5 sąl. sp. lnk., 27,2 leid. lnk. Tiražas 5000 egz. Užsakymo Nr. 850. Leid. Nr. 8390

Kaina 45 kap.

Leidykla „Šviesa", 233000 Kaunas, Lenino pr. 25.
K. Poželos spaustuvė, 233000 Kaunas, Gedimino 10.